

■ Präkonditioniertes Richardson-Verfahren:

$$(7) \quad x^{(k+1)} = (I - \tau C^{-1}A) x^{(k)} + \tau C^{-1}b$$

● SATZ 4.3:

Vor.: A SPD und C SPD

Bh.: 1. Dann konvergiert das IV (7) für $\tau \in (0, 2 / \lambda_{\max}(C^{-1}A))$:

$$\|e^{(k+1)}\|_{(S)} \leq q(\tau) \|e^{(k)}\|_{(S)} \leq (q(\tau))^{k+1} \|e^{(0)}\|_{(S)}$$

wobei $e^{(k)} = x - x^{(k)}$,

$$q(\tau) = \max \{ |1 - \tau \lambda_{\min}(C^{-1}A)|, |1 - \tau \lambda_{\max}(C^{-1}A)| \}$$

$$\|\cdot\|_{(S)} := \|\cdot\|_{C^{0.5}(C^{-0.5}AC^{-0.5})^S C^{0.5}};$$

$$S=0: \|\cdot\|_{(0)} = \|\cdot\|_C \text{ (nicht berechenbar)}$$

$$S=1: \|\cdot\|_{(1)} = \|\cdot\|_A \text{ (nicht berechenbar)}$$

$$S=2: \|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_{AC^{-1}A} \text{ (berechenbar)}$$

2. Optimaler Parameter: $\tau = \frac{2}{\lambda_{\min}(C^{-1}A) + \lambda_{\max}(C^{-1}A)}$
 Optimale Konvergenzrate:

$$q_{\text{opt}} = q(\tau_{\text{opt}}) = \frac{\lambda_{\max}(C^{-1}A) - \lambda_{\min}(C^{-1}A)}{\lambda_{\max}(C^{-1}A) + \lambda_{\min}(C^{-1}A)} = \frac{\varrho - 1}{\varrho + 1},$$

mit $\varrho = \lambda_{\max}(C^{-1}A) / \lambda_{\min}(C^{-1}A)$.

3. Für den Fehler $e^{(k)} = x - x^{(k)}$ gilt in der $\|\cdot\|_{(2)}$ -Norm: **BERECHENBAR!**

$$\|e^{(k)}\|_{(2)}^2 = (C^{-1}Ae^{(k)}, e^{(k)}) = (r^{(k)}, r^{(k)})$$

wobei $r^{(k)} = f - Ax^{(k)}$,

$$p^{(k)} = C^{-1}r^{(k)}.$$