4. Iterative Verfahren

- **Idee:**
  - Geg. $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ – Startnäherung
  - Erzeugen (wie?) sukzessiv Folge von Näherungen
    $$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{!} x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \quad (1)$$

- **Fragen:**
  - Konstruktionsprinzipien
  - Konvergenzanalysis: $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x$!?
  - Konvergenzgeschwindigkeit (KG) und Fehlerabschätzungen:

    z. B. q-Lineare KG, d.h. $\exists q \in (0,1)$ – Konvergenzrate
    $$\|x - x^{(k)}\| \le q \|x - x^{(k-1)}\| \le \dots \le q^k \|x - x^{(0)}\| ;$$
    r-Lineare KG, d.h. $\exists q \in (0,1)$ und $\exists c = const > 0$
    $$\|x - x^{(k)}\| \le c\, q^k$$
  - Praktisch: Konvergenztest, z. B. Defekttest
    Man stopt die Iteration, falls
    $$\|d^{(k)}\| \le \varepsilon \|d^{(0)}\| \overset{\text{z.B.}}{:=} \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i^{(0)})^2}$$
    mit dem Defekt (Residuum) $d^{(k)} = b - Au^{(k)}$ und vorgeg. rel. Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-t} \in (0,1)$.
  - In welcher Norm $\|\cdot\|$ soll man den Fehler $e^{(k)} = x - x^{(k)}$ messen?

    z. B. gilt für die A^TA – Energienorm $\|\cdot\|_{A^TA}$:
    $$\|e^{(k)}\|_*^2 := \|e^{(k)}\|_{A^TA}^2 := (A^TAe^{(k)}, e^{(k)}) = \|Ae^{(k)}\|^2$$
    $$= \|A(x - x^{(k)})\|^2 = \|b - Ax^{(k)}\| = \|d^{(k)}\|,$$
    wobei $\|\cdot\| := (\cdot,\cdot)^{0.5} = (\cdot,\cdot)_2^{0.5}$ – Euklidische Norm.