

3.8. Ergänzungen zu direkten Verfahren

3.8.1. GS mit mehreren rechten Seiten

$$\blacksquare A x_l = b_l, \quad l = 1, 2, \dots, r$$

$$1. A = LU$$

$$\text{ops} \approx n^3/3$$

$$2. L c_l = b_l, \quad l = \overline{1, r}$$

$$\text{ops} \approx r n^2/2$$

$$3. U x_l = c_l, \quad l = \overline{1, r}$$

$$\text{ops} \approx r n^2/2$$

$$\underline{\underline{\text{ops} \approx \frac{n^3}{3} + r n^2}}$$

Beispiel: Berechnung der Inversen $A^{-1} = [x_1 | x_2 | \dots | x_n]$

$$A x_l = e_l := (0, \dots, 0, \overset{l}{1}, 0, \dots, 0)^T, \quad l = \overline{1, n}$$

$$\text{ops} \approx n^3/3 + n n^2 = 4n^2/3 \rightsquigarrow n^3$$

$$\blacksquare x = A^{-1} b : \text{ops} \approx n^3$$

$$r \text{ RHS} \quad n^3 + 2r n^2$$

$$A x = b \text{ GEV: } \text{ops} \approx n^3/3$$

$$r \text{ RHS} \quad n^3/3 + r n^2$$

3.8.2. Berechnung von $\det A$

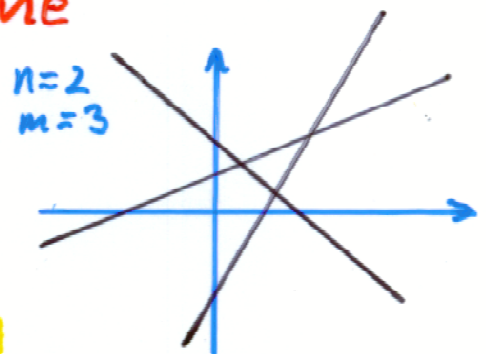
$$A = LU : \det A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$$

3.8.3. Ausgleichsprobleme

Überbestimmtes GS

$$\text{Ges. } x \in \mathbb{R}^n : A x = b \text{ in } \mathbb{R}^m$$

$$\text{mit } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m > n, \quad \text{rang } A = n$$



Ausgleichsproblem: Ges. $x \in \mathbb{R}^n : \|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$

$$Q^T A x = P_{n-1} \dots P_1 A x = Q^T b =$$

$$A^T A x = A^T b \in \mathbb{R}^n$$

$$R x = b_r \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_r \\ b_t \end{pmatrix}$$

$$\text{Allgem. Fall: } \|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$$

$$\text{rang } A \leq n$$

$$\|x\|_2 \rightarrow \min$$