

3.7.2. Die CHOLESKY-Zerlegung für SPD Matrizen

■ Für Symmetrisch Positiv Definite (SPD) Matrizen

$$A^T = A$$

$$x^T A x = (A x, x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

löst sich die Dreieckszerlegung

$$A = U^T U \quad \text{bzw.} \quad A = R R^T$$

mit

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

Berechne für $j=2, 3, \dots, n$

$$u_{1j} = a_{1j} / u_{11}$$

Falls $j > 2$, berechne

für $i=2, 3, \dots, j-1$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right)$$

$$u_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{kj}^2}$$

$$r_{nn} = \sqrt{a_{nn}}$$

(mms)

■ Cholesky-Verfahren

1. Cholesky-Zerlegung von A

$$A = U^T U$$

$$\text{ops} \approx n^3/6$$

2. Vorwärtseinsetzen

$$U^T c = b \quad \Rightarrow c$$

$$\text{ops} \approx n^2/2$$

3. Rückwärtseinsetzen

$$U x = c \quad \Rightarrow x$$

$$\text{ops} \approx n^2/2$$

$$M \approx \frac{n(n+1)}{2} + n$$