

### 3.7.1. Dreieckszerlegung für Bandmatrizen

#### Definition 3.11:

Eine Matrix  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  besitzt eine untere Bandweite (Bandbreite)  $p$  bzw. eine obere Bandweite (BW)  $q$ , falls  $a_{ij} = 0$  für alle  $i, j$  mit  $i > j+p$  bzw. mit  $j > i+q$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,q+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{p+1,1} & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n-p} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Beim GEV ohne Pivotsuche überträgt sich diese Gestalt auf die Dreiecksmatrizen:

$L$  besitzt die gleiche untere BW wie  $A$ ,

$U$  besitzt die gleiche obere BW wie  $A$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ & \textcircled{1} & & & \\ & l_{p+1,1} & & & \\ & & \textcircled{1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & l_{n,n-p} & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,q+1} & & \\ & \textcircled{1} & & & \\ & & \textcircled{1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Aufwand:  $\text{ops}(LU) = O(pqn) \stackrel{BW=p=q}{=} O(BW^2 \cdot n)$   
 $M(LU) \approx (p+q+1)n$

#### Bemerkung:

1. **fill-in** := Nullen im Band bleiben i. A. nicht erhalten

2.  $BW = p = q = 1$ : Tridiagonalmatrizen (siehe Pkt. 3.1)

$$\text{ops} = 8n - 7, \quad M = 4n - 2$$

$O(n)$

$O(n) \Rightarrow$  asymptotisch optimal!