

Wachstum der Komponenten von $\bar{U}$:

Nicht so einfach ist die Auswirkung der Pivotsuche auf das Wachstum der Elemente von $\bar{U}$.

Für den k -ten Eliminationsschritt gilt wegen $|l_{ik}| \leq 1$:

$$|\tilde{a}_{ij}^{(k)}| = |\tilde{a}_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} \tilde{a}_{kj}^{(k-1)}| \leq |\tilde{a}_{ij}^{(k-1)}| + |\tilde{a}_{kj}^{(k-1)}|,$$

also $\max |\tilde{a}_{ij}^{(k)}| \leq 2 \max |\tilde{a}_{ij}^{(k-1)}|.$

Es kommt also maximal zu einer Verdopplung der Einträge pro Eliminationsschritt.

Somit gilt zumindest folgende Abschätzung:

$$(13) \quad \max |u_{ij}| \leq 2^{n-1} \max |a_{ij}|.$$

Bei der Verwendung der Totalpivotsuche vermutet man

$$\max |u_{ij}| \leq n \max |a_{ij}|.$$

Diese Vermutung wurde 1991 **widerlegt**! Gould 91
Edelman 91

Seither vermutet man, dass

$$\max |u_{ij}| \leq (\alpha n + \beta) \max |a_{ij}|,$$

dass also die Elemente von $\bar{U}$ nur moderat anwachsen.

Diese Behauptung konnte bisher nicht bewiesen oder widerlegt werden !!! Alle praktische Rechnungen bestätigen jedoch diese Vermutung!

Wilkinson konnte jedoch folgende schwächere Abschätzung beweisen:

$$(14) \quad \max |\tilde{a}_{ij}^{(k)}| \leq f(k) \max |a_{ij}^{(0)}|$$

wobei

$$f(k) := \sqrt{k} \sqrt{2 \cdot 3^{1/2} \cdot 4^{1/3} \cdot \dots \cdot k^{1/(k-1)}}.$$

Daher gilt das GEV mit TP als **numerisch stabil**!