- **Beispiel 3.8:**

Für die SPD Matrix

$$K_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

die bei der FDM-Diskretisierung der RWA (1.4), siehe auch Pkt. 3.1, entsteht, lassen sich die Eigenwerte explizit berechnen (mms*):

$$\lambda_i = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{i}{N+1}\,\frac{\pi}{2}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Für den kleinsten und größten EW folgt:

$$\lambda_1 = \lambda_{min}(K_h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \sin(x)\,\approx\, x \text{ für } x\to 0}}{\approx} \frac{4}{h^2}\,\frac{\pi^2}{4(N+1)} = \pi^2$$

$$\lambda_N = \lambda_{max}(K_h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{N}{N+1}\,\frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{4}{h^2}.$$

Somit erhält man für die Konditionszahl:

$$\infty \xleftarrow[h\to 0]{} \varkappa(K_h) = \varkappa_2(K_h) = \frac{\lambda_N}{\lambda_1} \approx \frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{h^2} \gg 1.$$

Dieses Ergebnis ist typisch für viele Matrizen K_h, die durch Diskretisierung von Differentialgleichungsproblemen 2. Ordnung entstehen: Die Konditionszahl ist von der Größenordnung $1/h^2$:

$$\varkappa(K_h) = \varkappa_2(K_h) = O\left(\frac{1}{h^2}\right).$$