- **Beispiel:** Numerische Differentiation

$$f'(x) \approx f_*(x) := \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] = \text{zentrale Differenzenquotient}$$

Gesamtfehler = Verfahrensfehler + Rundungsfehler

$$\text{Verfahrensfehler} = \left| f'(x) - f_*(x) \right| \approx O(h^2) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Taylor: $$\frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] = \frac{1}{2h}\Big[f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_+)h^3 - \left(f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_-)h^3\right)\Big]$$

Der Rundungsfehler steigt hingegen mit kleiner werdender Schrittweite (Auslöschung) an.

Die Abb. 2.1 zeigt dieses gegenläufige Verhalten am Bsp.

$$f(x) = \sin(x)$$

Für den zentralen Differenzenquotient gilt hier

$$\frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] = \frac{1}{2h}\left[\sin(x+h) - \sin(x-h)\right] = \cos x \,\frac{\sin h}{h}$$

Der letzte Ausdruck ermöglicht für dieses Beispiel die Vermeidung der Auslöschung und damit eine fast rundungsfehlerfreie Auswertung des Differenzenquotienten