■ <u>Beispiel</u>: Quadratische Gleichung $y^2+2py-q=0$

Der obige Algorithmus 1 zur Berechnung von $y=\sqrt{p^2+q}-p$ führt im Falle $p>0,\ q>0,\ p^2\gg q$ auf folgende Abschätzungen: $\varphi(p,q)=\sqrt{p^2+q}-p$

$$|\Delta y^0| \lesssim eps\left(\left|\frac{p}{\sqrt{p^2+q}}-1\right|\cdot p + \frac{1}{2\sqrt{p^2+q}}\cdot q\right)$$

$$= eps\left(\frac{qp}{(\sqrt{p^2+q}+p)\sqrt{p^2+q}} + \frac{q}{2\sqrt{p^2+q}}\right)$$

$$\overset{p^2\gg q}{\approx} eps\left(\frac{q}{2p}+\frac{q}{2p}\right) = eps\ \frac{q}{p}$$

$$|\Delta y^r| \lesssim eps\left(\frac{1}{2\sqrt{r+q}}\, r + \frac{1}{2\sqrt{s}}\, s + t + y\right)$$

$$= eps\left(\frac{p^2}{2\sqrt{p^2+q}} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q} + \sqrt{p^2+q} + \frac{q}{\sqrt{p^2+q}+p}\right)$$

$$\overset{p^2\gg q}{\approx} eps\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p + p + \frac{q}{2p}\right) \overset{p\gg \frac{q}{p}}{\approx} 2\, eps\ p$$

Wegen $p \gg \frac{q}{p}$ dominiert der restliche Rundungsfehler den unvermeidbaren Fehler. Der Algorithmus ist in diesem Fall numerisch instabil!

Auch ohne detaillierte Fehleranalyse sieht man, dass es im letzten Schritt des Algorithmus 1 zur Auslöschung kommt. Die Subtraktion selbst ist harmlos. Aber die an sich kleinen Rundungsfehler, die in den ersten 3 Schritten des Algorithmus entstehen, werden stark verstärkt.

<u>Übungsaufgabe:</u> Man gebe einen numerisch stabilen Algorithmus zur Berechnung von $y=\varphi(p,q)$ für den Fall $p>0,\ q>0,\ p^2\gg q$ an! Hinweis: $y = q\,/\,(\sqrt{p^2+q}+p)$