- Fehleranalyse:
  - (7) ↴ Datenfehler $\Delta x^{(0)}$ verfälscht Endergebnis $y = x^{(r+1)}$ näherungsweise um den Betrag $\varphi'(x)\Delta x^{(0)}$
  - Bei der Berechnung des Zwischenergebnisses $x^{(s)}$ für $s = 1, 2, \ldots, r$ entsteht ein neuer absoluter Fehler $\Delta x^{(s)}$, der laut (7) zu einer Verfälschung des Endergebnisses um näherungsweise $(\psi^{(s)})'(x^{(s)})\Delta x^{(s)}$ führt, wenn man annimmt, dass alle anderen Operationen exakt ausgeführt werden
  - Schließlich entsteht noch ein weiterer Fehler $\Delta x^{(r+1)}$ bei der letzten elementaren Operation

$$\underset{\overset{\parallel}{x}}{x^{(0)}} + \Delta x^{(0)} \mapsto \ldots \mapsto x^{(s)} + \Delta x^{(s)} \mapsto \ldots \mapsto x^{(r)} + \Delta x^{(r)} \mapsto x^{(r+1)} + \ldots$$

$\varphi'(x)\Delta x^{(0)}$

$\Delta x^{(r+1)}$

$\psi^{(s)\prime}(x^{(s)})\Delta x^{(s)}$

$\psi^{(r)\prime}(x^{(r)})\Delta x^{(r)}$

$$\boxed{\Delta y^R \approx \underbrace{\varphi'(x)\Delta x^{(0)}}_{=\Delta y^0} + \underbrace{\sum_{s=1}^{r} (\psi^{(s)})'(x^{(s)})\Delta x^{(s)} + \Delta x^{(r+1)}}_{=\Delta y^r}}$$

$= \Delta y^0$ unvermeidbarer Fehler (= unabh. v. Alg.)

$= \Delta y^r$ restlicher Rundungsfehler (= abhängig vom gew. Alg.)

  - Definition: Ein Algorithmus heißt numerisch stabil, wenn der restliche Rundungsfehler Δy^r den unvermeidbaren Fehler Δy^0 nicht dominiert.
  - Aus $|\Delta x^{(s)}| \leq \text{eps}\, |x^{(s)}| \;\; \forall s = 0, 1, \ldots, r+1$ folgt

$$|\Delta y^0| \leq \text{eps}\, \underbrace{|\varphi'(x)|\,|x|} \quad \text{und} \quad |\Delta y^r| \leq \text{eps} \underbrace{\left[\sum_{s=1}^{r} |\psi^{(s)\prime}(x^{(s)})|\,|x^{(s)}| + |y|\right]}$$

vergl.