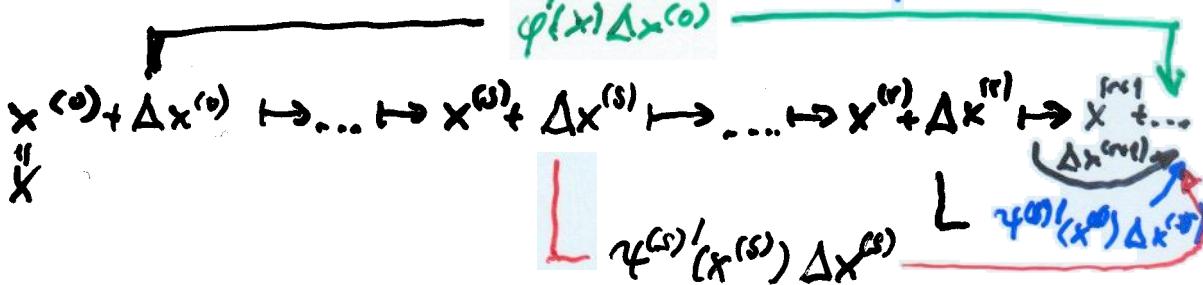


■ Fehleranalyse:

- (7) \rightarrow Datenfehler $\Delta x^{(0)}$ verfälscht Endergebnis $y = x^{(r+1)}$ näherungsweise um den Betrag $\varphi'(x) \Delta x^{(r)}$
- Bei der Berechnung des Zwischenresultates $x^{(s)}$ für $s = 1, 2, \dots, r$ entsteht ein neuer absoluter Fehler $\Delta x^{(s)}$, der laut (7) zu einer Verfälschung des Endergebnisses um näherungsweise $(\varphi^{(s)})'(x^{(s)}) \Delta x^{(s)}$ führt, wenn man annimmt, dass alle anderen Operationen exakt ausgeführt werden
- Schließlich entsteht noch ein weiterer Fehler $\Delta x^{(r+1)}$ bei der letzten elementaren Operation



$$\Delta y^R \approx \varphi'(x) \Delta x^{(0)} + \sum_{s=1}^r (\varphi^{(s)})'(x^{(s)}) \Delta x^{(s)} + \Delta x^{(r+1)}$$

$\underbrace{\varphi'(x) \Delta x^{(0)}}_{\Delta y^0}$ $\underbrace{\sum_{s=1}^r (\varphi^{(s)})'(x^{(s)}) \Delta x^{(s)}}_{\Delta y^r}$ $+ \Delta x^{(r+1)}$

unvermeidbarer Fehler (\equiv unabh. v. Alg.)

restlicher Rundungsfehler (\equiv abhängig vom gew. Alg.)

- Definition: Ein Algorithmus heißt numerisch stabil, wenn der restliche Rundungsfehler Δy^r den unvermeidbaren Fehler Δy^0 nicht dominiert.
- Aus $|\Delta x^{(s)}| \leq \text{eps } |x^{(s)}| \quad \forall s = 0, 1, \dots, r+1$ folgt

$$|\Delta y^0| \leq \text{eps } |\varphi'(x)| / |x| \quad \text{und} \quad |\Delta y^r| \leq \text{eps} \left[\sum_{s=1}^r |\varphi^{(s)}(x^{(s)})| (|x^{(s)}| + |y|) \right]$$

↔ numer.