

■ Matrix-Vektor-Schreibweise von (7):

$$(7) \quad \Delta y \approx \varphi'(x) \Delta x = J_{\varphi}(x) \Delta x$$

mit

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{bmatrix}, \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}, \varphi'(x) = J_{\varphi}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Normabschätzungen: absoluter Fehler: $\|\Delta y\| \stackrel{(*)}{\leq} \|J_{\varphi}\| \|\Delta x\|$

relativer Fehler: $\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} \leq \dots \quad (8)$

■ Beispiele:

1. Addition zweier Zahlen: $y = \varphi(x_1, x_2) := x_1 + x_2$

$$\varepsilon_{x_1+x_2} \stackrel{(8)}{=} \frac{x_1}{x_1+x_2} \cdot \varepsilon_{x_1} + \frac{x_2}{x_1+x_2} \cdot \varepsilon_{x_2} \quad (x \rightarrow =)$$

Kritisch: $x_1 \approx -x_2 \leadsto$ schlecht konditioniert
 $\leadsto$ Stellenauslöschung

2. Analog Subtraktion: $y = \varphi(x_1, x_2) := x_1 - x_2$

$$\varepsilon_{x_1-x_2} \stackrel{(8)}{=} \frac{x_1}{x_1-x_2} \cdot \varepsilon_{x_1} - \frac{x_2}{x_1-x_2} \cdot \varepsilon_{x_2} \quad (x \rightarrow =)$$

Kritisch: $x_1 \approx x_2$

3. Multiplikation: $y = \varphi(x_1, x_2) := x_1 \cdot x_2$

$$\varepsilon_{x_1 \cdot x_2} \stackrel{(8)}{=} 1 \cdot \varepsilon_{x_1} + 1 \cdot \varepsilon_{x_2} \quad \text{OK}$$

Die Konditionszahlen sind $K_{ij} = 1$, d.h. Multip. ist gut kond. !!

4. Division: $y = \varphi(x_1, x_2) := x_1 / x_2 \quad x_2 \neq 0$

$$\varepsilon_{x_1/x_2} \stackrel{(8)}{=} 1 \cdot \varepsilon_{x_1} - 1 \cdot \varepsilon_{x_2} \quad \text{OK}$$

5. Berechnung einer Lösung der quadr. Gl. $y^2 + 2py - q = 0$:

$$y = \varphi(p, q) = -p \pm \sqrt{p^2 + q} \quad \stackrel{(8)}{\leadsto} \quad \varepsilon_y \approx ?$$