

2.4. 1. Datenfehleranalyse

■ Exakt : $y = \varphi(x)$

Datenfehler

Mit Datenfehler: $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ mit $\bar{x} = x + \Delta x$

Annahme: $\varphi \in C^1$

$$\bar{y} = y + \Delta y$$

↑
Lsg. Fehler

Satz von Taylor ergibt für den absoluten Fehler

$$(6) \quad \bar{y} - y = \Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) \approx J_{\varphi}(x) \cdot \Delta x$$

mit der Jacobin-Matrix (= $n \times n$ Matrix)

$$J_{\varphi}(x) = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right]_{i,j=1,\dots,n}$$

Komponentenweise:

$$(7) \quad \Delta y_i = \varphi_i(x + \Delta x) - \varphi_i(x) \approx \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \cdot \Delta x_j, \quad i = \overline{0, m}$$

Relativer Fehler: vorausgesetzt $y_i \neq 0$

$$(8) \quad \varepsilon_{y_i} := \frac{\Delta y_i}{y_i} \approx \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\frac{x_j}{\varphi_i(x)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)}_{=: K_{ij}} \cdot \varepsilon_{x_j}$$

mit $\varepsilon_{x_j} = \frac{\Delta x_j}{x_j} = \text{relativer Datenfehler} \quad (x_j \neq 0),$

$$K_{ij} = \frac{x_j}{\varphi_i(x)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = \text{Konditionszahlen des Problems.}$$

■ Definition:

Ein Problem heißt gut konditioniert (oder auch: datenstabil), wenn kleine Fehler der Daten nur kleine Störungen der Lösung bewirken, d.h. $|K_{ij}| \leq 1 \quad \forall i,j = \overline{1,n}$.
Andernfalls heißt das Problem schlecht konditioniert (dateninstabil).