

Rundungsfehler:

Sei $\bar{x}$ eine Approximation einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$:
Dann heißt

- $\Delta x = \bar{x} - x$ bzw. $|\Delta x| = |\bar{x} - x|$ - absoluter Fehler,
- $\varepsilon_x = \frac{\bar{x} - x}{x}$ bzw. $|\varepsilon_x| = \left| \frac{\bar{x} - x}{x} \right|$ für $x \neq 0$ - relat. Fehler,

Es gilt offenbar: $\Delta x = \varepsilon_x \cdot x$ und $\bar{x} = x(1 + \varepsilon_x)$

Falls für den absoluten Fehler gilt:

$$|\bar{x} - x| \leq \frac{1}{2} B^s$$

so heißt die Ziffer mit dem Stellenwert B^s gültig.

Die gültigen Ziffern ohne die führenden Nullen heißen signifikant

Die gültigen Zifferen beschreiben den absoluten Fehler,
die Anzahl der signifikanten Zifferen den relat. Fehler.

Nach dem Kaufmännischen Runden nach (2) gilt:

(3)

$$\frac{|\text{rd}(x) - x|}{|x|} \leq \text{eps} = \frac{1}{2} B^{1-t} \quad \text{bzw.} \quad \text{rd}(x) = x(1 + \varepsilon) \text{ mit } |\varepsilon| \leq \text{eps}$$

wobei $\text{eps} = \frac{1}{2} B^{1-t} = \text{Maschinenepsilon} = \text{Maschinengenauigkeit}$

Beweis: o.B.d.A. sei $x > 0$

$$x = m B^e : B^{-1} \leq |m| < 1$$

$\text{rd}(x)$ = gerundete (nach (2)) normalisierte Gleitkommazahl
der Mantissenlänge t

Dann gilt offenbar: $|\text{rd}(x) - x| \leq \frac{1}{2} B^{-t} B^e$ und $|x| \geq B^{-1} B^e$

$$\Rightarrow \frac{|\text{rd}(x) - x|}{|x|} \leq \frac{1}{2} B^{-t} B^e B^{+1} B^{-e} = \frac{1}{2} B^{1-t} = \text{eps}$$

Beispiele: float : $\text{eps} = \frac{1}{2} 2^{1-24} = 2^{-24} \approx 10^{-7}$
double : $\text{eps} = \frac{1}{2} 2^{1-53} = 2^{-53} \approx 10^{-16}$