Lemma 2.6: a-priori estimates

Ass: $\exists$ constants $\mu_2 \geq \mu_1 > 0$:

$$a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

$$|a(w,v)| \leq \mu_2 \|w\|_V \|v\|_V \quad \forall w, v \in V$$

St.: If $u \in H^1((0,T), V; H) = X$ is a solution of the IVP $(6)_{LVF}$: $u' + Au = F$, $u(0) = u_0$, then $\exists$ constants $C_1, C_2, C_3 = C(\mu_1, \mu_2, \|F\|_{V^*}, \|u_0\|_H)$:

$$\|u\|_X \leq C_1, \quad \|Au\|_{X^*} \leq C_2, \quad \|u(t)\|_H \leq C_3 .$$

Proof: We have

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 = \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \underbrace{\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2\right]}_{= \langle u'(s), u(s)\rangle} ds$$

$$= \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \left[\langle F(s), u(s)\rangle - a(u(s), u(s))\right] ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \left[\|F(s)\|_{V^*} \|u(s)\|_V - \mu_1 \|u(s)\|_V^2\right] ds$$

For $t = T$, it follows

$$0 \leq \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 = \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^T \left[\|F(s)\|_{V^*} \|u(s)\|_V - \mu_1 \|u(s)\|_V^2\right] ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \|F\|_{X^*} \|u\|_X - \mu_1 \|u\|_X^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\|u\|_X \leq \frac{1}{2\mu_1}\left(\|F\|_{X^*} + \sqrt{\|F\|_{X^*}^2 + 4\mu_1 \|u_0\|_H}\right) = C_1}$$

From the boundedness of A, it immediately follows that

$$\boxed{\|Au\|_{X^*} \leq \mu_2 \|u\|_X \leq \mu_2 C_1 = C_2}$$

From the first equation we get

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2 + 2\|F\|_{X^*} \|u\|_X \leq \underbrace{\|u_0\|_H^2 + 2C_1\|F\|_{X^*}}_{= C_3^2}$$