- <u>Fehleranalysis:</u> $z^{(k)} = \overset{(1)}{x} - \overset{(9)}{x^{(k)}}$

Aus (9) $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau G^{-1} A x^{(k)} + \tau G^{-1} \underset{\underset{Ax}{\| (1)}}{b}$

und (1) $Ax = b$

folgt sofort das <u>Fehlerschema</u>

(10) $z^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} \underset{(9)}{=} x - x^{(k)} - \tau G^{-1} A (x - x^{(k)})$

$= (I - \tau G^{-1} A)\, z^{(k)}$!

Damit gilt die <u>Fehlerabschätzung</u>

(11) $\| z^{(k+1)} \| \le \underbrace{\| I - \tau G^{-1} A \|}_{=: q \, < \, 1} \| z^{(k)} \|$

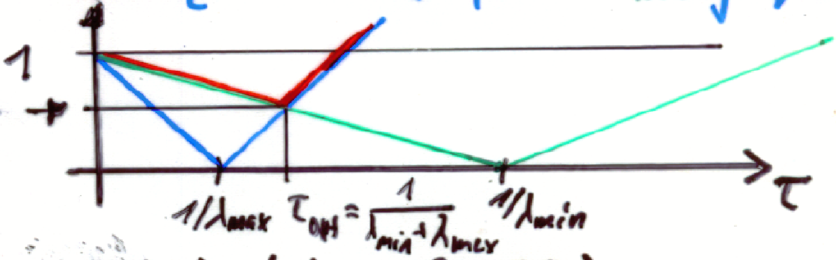
Norm ?? $\quad =: q < 1$!! hängt ab von τ und G

Konvergenzfaktor

Falls $A = A^T > 0$ (spd), dann gilt für die Normen $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}, \|\cdot\|_A, \|\cdot\|_C, \|\cdot\|_{A^T G^{-1} A}$:

$\| I - \tau G^{-1} A \| = \max \{ |1 - \tau \lambda_{max}|, |1 - \tau \lambda_{min}| \} =: q \overset{!}{<} 1$

$q_{opt} = \dfrac{\kappa(C^{-1}A) - 1}{\kappa(C^{-1}A) + 1}$



mit

$\kappa(C^{-1}A) := \lambda_{max}(C^{-1}A) / \lambda_{min}(C^{-1}A)$,

$\lambda_{min/max}$ = min/max EW des verallg. EWP $A\varphi = \lambda G \varphi$.

<u>Bem.:</u> $\| z^{(k)} \|^2_{A^T C^{-1} A} = (G^{-1} A z^{(k)}, A z^{(k)}) = (C^{-1} d^{(k)}, d^{(k)}) = (w^{(k)}, d^{(k)})$

berechenbar!

- <u>In der Praxis:</u> nimmt man anstelle von präkond. Richardson-Verfahren präkond. Krylov-Raum-Verf. z.B. PCG-Verfahren für spd GS (siehe Pkt. 4.2.2)!