Wichtige Ungleichungen:

a) Cauchy-Ungleichung:

(3)a) $|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u,v \in V = L_2(\Omega), H^1(\Omega), \ldots$

b) Friedrichs-Ungleichung:

(3)b) $\int_\Omega (u(x))^2 dx \leq c_F^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in V_0$

wobei $V_0 := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0$ auf $\tilde{\Gamma}\}$

mit einem "echten" Randstück $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$:

$|\tilde{\Gamma}| := \int_{\tilde{\Gamma}} ds_x > 0$

Bem.: $V_0 = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0$ auf $\Gamma = \partial\Omega\} =: \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

c) Poincaré-Ungleichung:

(3)c) $\int_\Omega u^2 dx \leq c_P^2 \left\{ \left(\int_\Omega u(x) dx \right)^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right\} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$

Mittelungsintegral zur Erkennung von u = const.

d) Randeinbettung: $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma : |\tilde{\Gamma}| > 0$

(3)d) $\int_{\tilde{\Gamma}} u^2 ds_x \leq c_E^2 \int_\Omega (u^2 + |\nabla u|^2) dx \quad \forall u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L_2(\tilde{\Gamma})} \leq c_E \|u\|_{H^1(\Omega)}$$