3.2. Variationsformulierung

- **Handwerkszeug:** (vgl. Pkt. 2.1 im 1D Falle)

- <u>L_2-Räume:</u> (quadratisch integrierbare Fkt.)

  $L_2(\Omega) := \{u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^1 : \int_\Omega (u(x))^2 dx < \infty,\ \Omega \subset \mathbb{R}^2\}$

  <u>Norm $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{0.5}$:</u>

  $$\|u\|_{L_2(\Omega)} \equiv \|u\|_{0,\Omega} := \sqrt{\int_\Omega (u(x))^2 dx}$$

  <u>Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$:</u>

  $$(u,v)_{L_2(\Omega)} \equiv (u,v)_{0,\Omega} := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

  <u>Cauchy-Ungleichung:</u> $|(u,v)| \le \|u\|\,\|v\|$

  $$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \le \sqrt{\int_\Omega u^2 dx}\sqrt{\int_\Omega v^2 dx} \quad \forall u,v \in L_2(\Omega)$$

  <u>Analog definieren wir:</u> $L_2(\Gamma), L_2(\tilde{\Gamma}), \ldots \quad \tilde{\Gamma} \subset \Gamma = \partial\Omega$

  z.B. $\left|\int_{\tilde{\Gamma}} uv\,ds\right| \le \sqrt{\int_{\tilde{\Gamma}} u^2 ds}\sqrt{\int_{\tilde{\Gamma}} v^2 ds} \quad \forall u,v \in L_2(\tilde{\Gamma})$

- <u>Verallgemeinerte Ableitung:</u>

  Die integrierbare Fkt. $w = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ heißt verallgemeine Ableitung von u nach x_i, falls

  $$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega w(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathring{C}^1(\overline{\Omega}),$$

  wobei $\mathring{C}^1(\overline{\Omega}) := \{\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^1 : \text{stetig diff'bar}, \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma\}$.

  Analog definiert man verallgemeinerte Ableitungen höherer Ordnung: $|\alpha| = |(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d)| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d = k$

  $w := \partial^\alpha u \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x^\alpha} : \int_\Omega u\,\partial^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega w\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in \mathring{C}^k(\overline{\Omega}),$

  wobei $\mathring{C}^k(\overline{\Omega}) := \{\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^1 : k\text{x stetig diff'bar}, \partial^\alpha\varphi = 0 \text{ auf } \Gamma \ldots\}$