

- Zur Untersuchung des Stabilitätsverhalten eines RK-Verfahrens mit "großer" Schrittweite wird das Verhalten des Verfahrens für das Testproblem (21) mit $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachtet:

$$(21) \quad \begin{cases} u'(t) = \lambda u(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$



$$(22) \quad \begin{cases} \tilde{u}'(t) = \lambda \tilde{u}(t) \\ \tilde{u}(0) = 1 + \delta \end{cases} \quad \delta \geq 0$$

$$\downarrow \\ u(t) = e^{\lambda t}$$

$$\downarrow \\ \tilde{u}(t) = (1 + \delta) e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \text{Fehler} \leftarrow \lambda = \operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda$$

$$z(t) = \tilde{u}(t) - u(t) = \delta e^{\lambda t} = \delta e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cdot e^{i \operatorname{Im} \lambda t} \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{|z(t)| = \delta e^{\operatorname{Re} \lambda t} \leq \delta, \text{ falls } \operatorname{Re} \lambda \leq 0}$$

OK, aber bekommt man so Aussagen über den allgemeinen Fall $u'(t) = f(t, u(t))$?

- Motivation für das Testproblem (21):

- $\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad u(t) \text{ exakte Lsg.}$
- $\begin{cases} \tilde{u}'(t) = f(t, \tilde{u}(t)) \\ \tilde{u}(0) = u_0 + \delta \end{cases} \quad (\tilde{1}) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u}(t) \text{ gestörte Lsg.}$
- Linearisieren gestörtes Problem $(\tilde{1})$ in der Nähe der exakten Lsg. $u(t)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{u}'(t) &= f(t, u(t) + (\tilde{u}(t) - u(t))) \\ &= \underbrace{f(t, u(t))}_{= u'(t)} + \underbrace{f_u(t, u(t)) (\tilde{u}(t) - u(t))}_{z(t)} + o(\tilde{u}(t) - u(t)) \end{aligned}$$