Durchführbarkeit und Stabilität:

- **Satz 2.12:**

Vor.: $|c_1| > 0$, $|c_n| > 0$;
$|a_i| > 0$, $|b_i| > 0 \; \forall i = \overline{2,n-1}$; $|b_1| > 0$, $|a_n| > 0$;
$$\left.\begin{array}{l} |c_i| \geq |a_i| + |b_i| \; \forall i = \overline{2,n-1} \\ |c_1| \geq |b_1|, \; |c_n| \geq |a_n| \end{array}\right\} (*)$$
wobei für wenigstens eine der Ungleichungen (*) „ > " gelten soll.

Bh.: 1. $\Delta_i := c_i - a_i \alpha_i \neq 0 \; \forall i = \overline{2,n}$ (Durchführbark.)
2. $|\alpha_i| \leq 1 \; \forall i = \overline{2,n}$ (Stabilität)

Beweis: mms* (Induktion) bzw. siehe Literatur! ■

- **Interpretation:**

1. $\Delta_i \neq 0$ sichert die Berechenbarkeit von α_{i+1} und β_{i+1}!
2. $|\alpha_i| \leq 1$ sichert ab, dass Rundungsfehler, die in einem Rechenschritt auftreten, beim Übergang zum nächsten Schritt nicht anwachsen:

$$\left.\begin{array}{l} u_i = -\alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} \\ \tilde{u}_i = -\alpha_{i+1}(u_{i+1} + \delta_{i+1}) + \beta_{i+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_i := \tilde{u}_i - u_i = -\alpha_{i+1}\delta_{i+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\delta_i| \leq |\alpha_{i+1}|\,|\delta_{i+1}| \leq |\delta_{i+1}|, \quad i = \overrightarrow{(n-1)\,(-1)\,1}}$$

Angen.: $\alpha_i = 1.1$: $\delta_1 = (-1)^{n-1}\alpha_2\alpha_3 \cdot\ldots\cdot \alpha_n \delta_n \approx (-1)^{n-1}(1.1)^{n-1}\delta_n$
$n = 1000$: $(1.1)^{n-1} \approx 10^{41}$!!!

- **Übung 2.13:** Man zeige, dass die Vor. von Satz 2.12 durch die FE-Matrix

$$K_h = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1+\alpha_b h \end{bmatrix}$$

des GS $(\underline{4})_h$ erfüllt werden!