

Resultat:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [z'(x)]^2 dx \leq h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_h\|_1^2 &\leq (1 + c_F^2) |u - \tilde{u}_h|_1^2 = (1 + c_F^2) |z|_1^2 \\ &= (1 + c_F^2) \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z'(x))^2 dx \leq \\ &\leq (1 + c_F^2) \sum_{i=1}^n h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx \\ &= (1 + c_F^2) h^2 \sum_{i=1}^n \|u''(x)\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \end{aligned}$$

d.h. (14) gilt.

q.e.d.

Eingesetzt in (10) ergibt sich

$$(15) \|u - u_h\|_{H^1(a,b)} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + c_F^2)^{0.5} h \left(\sum_{i=1}^n \|u''\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2}.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.17: (H^1 -Konvergenz)

Vor: 1) (V1) und (V2)

2) $p=1$ (Lineare Elemente)

3) Lsg. $u \in \tilde{V}_g : (2) : \exists u'' \in L_2(x_{i-1}, x_i) \forall i=1, \dots, n.$

Bh.: Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

$$\begin{aligned} (15) \|u - u_h\|_{H^1(a,b)} &\leq \frac{\mu_2}{\mu_1} (1 + c_F^2)^{1/2} h \left(\sum_{i=1}^n \|u''\|_{L_2(\delta_i)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{1 + c_F^2} h \|u''\|_{L_2(a,b)} \\ &\quad \uparrow u \in \tilde{V}_g \cap H^2(a,b). \end{aligned}$$