Bemerkungen:

1. Die Variationsformulierung (4) ist eine Verallgemeinerung der klassischen Formulierung (1). In (4) können geringere Glattheitsforderungen an die Eingangsdaten $\lambda_1, \lambda_2, a, \alpha, f, g_1, g_2, g_3$ gestellt werden, z.B. langt es, wenn die Materialzahlen $\lambda_1, \lambda_2, a, \alpha$ nur stückweise stetig sind, wie es in der Praxis bei verschiedenen Materialien üblich.

2. Jede "hinreichend" glatte verallgemeinerte Lsg. $u(\cdot)$, d.h. Lsg. von (4), ist auch klassische Lsg., d.h. Lsg. von (1).
Tatsächlich, durch partielle "Rückintegration" erhält man aus (4) sofort

$$(4)_* \quad \underbrace{\int_\Omega \Big[\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} + auv\Big] dx}_{} + \int_{\Gamma_3} \alpha u v \, ds_x = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds_x + \int_{\Gamma_3} \ldots$$

$$= \int_\Omega \Big[-\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) + au\Big] v \, dx + \underbrace{\int_\Gamma \overbrace{\Big[\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2\Big]}^{= \frac{\partial u}{\partial N}} v \, ds_x}_{= \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds_x + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds_x}$$

$$\forall v \in V_0$$

a) Wählen $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset V_0$, d.h. $\int_\Gamma * \cdot v \, ds_x = 0$

$$\int_\Omega \Big[-\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) + au - f\Big] v \, dx = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$$

$$\Downarrow \qquad \cap$$

$$\int_\Omega \Big[\quad - \times - \quad \Big] v \, dx = 0 \quad \forall v \in L_2(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) + au - f = 0 \text{ in } \Omega$$

d.h. PDgl. gilt in Ω !!