■ Richardson-Verfahren ($C = I$): $x^{(0)}$ geg.

$$(9)_{C=I} \qquad \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A x^{(k)} = b \,, \quad k = 0, 1, \ldots$$

■ Präkonditioniertes Richardson-Verfahren:

- Iterationsvorschrift: $x^{(0)}$ geg.

$$(9) \qquad C \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A x^{(k)} = b \,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

wobei der Präkonditioner C:

1) $C \approx A$ z.B. $C = A$, $\tau = 1$ $\leadsto$ $x^{(1)} = x$ - Lsg. (1)
   Genauer: Konditionszahl $(C^{-1}A) \ll$ Kond. (A) !
2) GS $Cw = d$ sollte "schnell" (d.h. für FE-GS mit $O(n)$ ops) auflösbar sein !!

- Algorithmus:

> Startnäherung: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ geg.
> Iteration: $k = 0, 1, \ldots, k_{stop}$ (Konvergenztest)
>
> $d^{(k)} = b - A x^{(k)}$ (Defekt berechnen)
>
> $C w^{(k)} = d^{(k)}$ (PräKond.-System lösen)
>
> $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \tau w^{(k)}$ (Korrektur)

- Beispiele: $C = ?$

1) $C = I$: Klassisches Richardson-Verfahren $(9)_{C=I}$
2) $C = D := \operatorname{diag} A = [\diagdown]$: τ - Jacobi-Verfahren
   $\leadsto$ $\tau = 1$: Jacobi-Verfahren (6)
3) $C = (L + \frac{1}{\omega} D)$, wobei $A = L + D + U = [\;] + [\diagdown] + [\;]$, $\tau = 1$:
   $\leadsto$ SOR (8) bzw. ESV (7) für $\omega = 1$ (muss).
4) $C = (L + \frac{1}{\omega} D) D^{-1} (U + \frac{1}{\omega} D)$, $\tau = \frac{2}{\omega} - 1$: SSOR falls $A = A^T$ ($\leadsto U = L^T$)
5) C = ILU - Zerlegung von A ... siehe Literatur !!