3.3. Galerkin-Ritz-FEM

3.3.1. Galerkin-Ritz-Verfahren

3.3.1.1. Das Galerkin Verfahren

- <u>Ausgangspkt.</u> = Variationsformulierung (4)

(4) Ges. $u \in V_g$: $a(u,v) = \langle F, v \rangle \;\forall v \in V_0$

- <u>Idee:</u> Ersetze die ∞-dim. Mengen V, V_g, V_0 durch die endlichdimensionalen Mengen:

$$\tilde{V}_h = \{ v_h(x) = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} v_i \varphi_i(x) \} \subset V, \quad \bar{\omega}_h \overset{\text{z.B.}}{=} \{1, 2, \dots, \bar{N}_h\}$$

$$\cup \qquad\qquad \cup \quad \cup \qquad \bar{N}_h = N_h + N_{1,h}$$

$$V_{gh} = \{ v_h(x) = \sum_{i \in \omega_h} v_i \varphi_i(x) + \sum_{i \in \gamma_h} \underset{\substack{\| \\ g_1(x_i)}}{v_i^*} \varphi_i(x) \} \subset V_g, \quad \omega_h = \{1, \dots, N_h\}$$

$$\gamma_h = \{N_h + 1, \dots, \underbrace{N_h + N_{1h}}_{= \bar{N}_h}\}$$

$$\tilde{V}_h \supset V_{0h} = \{ v_h(x) = \sum_{i \in \omega_h} v_i \varphi_i(x) \} = \operatorname{span}\{\varphi_i : i \in \omega_h\} \subset V_0$$

und suchen die Näherungslsg. u_h in der Form

(8) $$u_h(x) = \sum_{i \in \omega_h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unbekannte Koeffizienten}}}{u_i} \varphi_i(x) + \underbrace{\sum_{i \in \gamma_h} g_1(x_i) \varphi_i(x)}_{\to\,\sim\, |_{\Gamma_1} \approx g_1(x)} \in \hat{V}_{gh}$$

sodaß (4) $\forall$ Testfkt. $v_h \in \hat{V}_{0h}$ gilt:

$\Longrightarrow$ Galerkin-Schema ($\Leftrightarrow$ Gleichungssystem) zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten $[u_i]_{i \in \omega_h} =: \underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h}$!