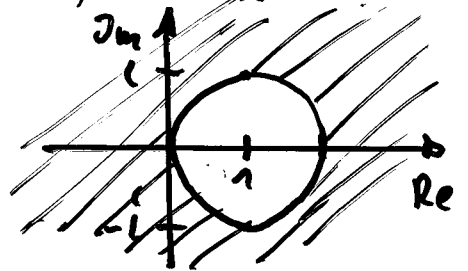


## ■ A-Stabilität für RKV:

- Ideal:  $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\} \subset S$   
 $\nearrow \forall \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq 0$  hätte man Stabilität im obigen Sinne unabhängig von der Schrittweite!
- Def. 5.7: (A-Stabilität)  
 Ein RKV heißt A-stabil, falls  $\mathbb{C}^- \subset S := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$
- Beispiel: Impliziter Euler:  $R(z) = 1/(1-z)$   
 $\Rightarrow S = \{z \in \mathbb{C} : |1-z|^{-1} \leq 1\}$   
 $= \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z-1|\}$



$$\Rightarrow \mathbb{C}^- \subset S,$$

d.h. impliziter Euler ist A-stabil!

d.h. impliziter Euler produziert beschränkte Näherungen, falls Testproblem (21) beschränkte Lsg. hat!

d.h. Fehler in AW werden nicht vergrößert, falls  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ !

■ Bem. 5.8: Explizite RKF sind nicht A-stabil!

■ Beispiele A-stabiler impliziter RK-Formeln:

1. Impliziter Euler

2. Implizite Mittelpunktsregel:  $R(z) = \frac{2+z}{2-z}$

$$f = \lambda u : u_{j+1} = u_j + \tau \lambda g \text{ mit } g = u_j + \frac{\tau}{2} \lambda g$$

$$\nearrow z = \tau \lambda$$

$$u_{j+1} = u_j + \tau \lambda (1 - \frac{\tau}{2} \tau \lambda)^{-1} u_j = (1 + \tau \lambda (1 - \frac{\tau}{2} \tau \lambda)^{-1}) u_j$$

$$\Rightarrow S := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\} = \mathbb{C}^- \quad (\text{unwahr})$$

3. Implizite Trapezregel = Crank-Nicolson:  $R(z) = \frac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}$

$$f = \lambda u : u_{j+1} = u_j + \frac{\tau \lambda}{2} (u_j + u_{j+1}) \quad \& \quad u_{n+1} = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} u_n, \quad z = \tau \lambda$$

$$\Rightarrow S = \mathbb{C}^- = S := \{z \in \mathbb{C} : |\frac{z+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}| \leq 1\}$$

4. Implizite 2-stufige RKF vom Gauß-Typ.