Resümee:

- <u>Interpolationsfehlerabschätzungen:</u>

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{L_2(a,b)} = O(h^{p+1})$$

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{C[a,b]} = O(h^{p+1})$$

wobei $\tilde{u}_h(x) = \mathrm{Int}_h(u) := \sum_{i=0}^{N} u(x_i)\varphi_i(x)$

Satz 2.8 (Cea)

- <u>Diskretisierungsfehlerabschätzung:</u>

$$\| \overset{(2)}{u} - \overset{(2)_h}{u_h} \|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$||| u - u_h ||| \approx \| u - u_h \|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\| u - u_h \|_{L_2(a,b)} = O(h^{p+1}) \quad \text{(Nitsche)}$$

$$\| u - u_h \|_{C[a,b]} = \begin{cases} O(h^{p+1}) & \text{falls } u^{(p+1)} \in L_\infty(a,b) \\ O(h^{p+\frac{1}{2}}) & \text{falls } u^{(p+1)} \in L_2(a,b) \end{cases}$$

- <u>Fehlerabschätzungen für die numerische Integration:</u>

$$\int_a^b u(x)\,dx \approx \int_a^b \tilde{u}_h(x)\,dx \quad \text{(Verallg. Newton-Cotes-Formel)}$$

$$\left| \int_a^b u(x)\,dx - \int_a^b \tilde{u}_h(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (u(x) - \tilde{u}_h(x))\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |u(x) - \tilde{u}_h(x)|\,dx$$

Cauchy

$$\leq \sqrt{\int_a^b 1^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |u - \tilde{u}_h|^2\,dx} = \sqrt{b-a}\,\| u - \tilde{u}_h \|_0 = O(h^{p+1})$$