4.2.1. Klassische Iterationverfahren

Jacobi-Verfahren (GSV = Gesamtschrittverfahren):

- **Idee:** $a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ii} x_i + \ldots + a_{in} x_n = b_n$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \Big[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \Big]$$

- **Algorithmus:**

(6)

Startnäherung: $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$ geg.

Iteration: $k = 0, 1, \ldots, k_{stop}$ (Defekttest (5)!)

$x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)})^T \in \mathbb{R}^n$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- **Nachteil bei FE-Systemen $K_h u_h = f_h$:**
Langsame Konvergenz (?), aber in gedämpfter Version (!) gute Glättungseigenschaften → Multigrid-Methoden!

Gauß-Seidel-Verfahren (ESV = Einzelschrittverfahren):

- **Idee:** Verwende die bereits berechneten neuen Komp.!
- **Algorithmus:**

(7)

$\sum_{i=1}^{0} = \sum_{i=n+1}^{n} = 0$

Startnäherung: $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ geg.

Iteration: $k = 0, 1, \ldots, k_{stop}$ (Defekttest (5)!)

$x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)})$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big]$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

- **Nachteile bei FE-GS:** langs. Konv., aber gute Glättung → MGM!