3.2. Variationsformulierung

Handwerkszeug: (vgl. Pkt. 2.1 im 1D Falle)

- **L_2-Räume:** (quadratisch integrierbare Fkt.)

$$L_2(\Omega) := \{u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^1 : \int_\Omega (u(x))^2 dx < \infty, \ \Omega \subset \mathbb{R}^d\}$$

Norm $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{0.5}$:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \equiv \|u\|_{0,\Omega} := \sqrt{\int_\Omega (u(x))^2 dx}$$

Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$:

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} \equiv (u,v)_{0,\Omega} := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

Cauchy-Ungleichung: $|(u,v)| \leq \|u\|\,\|v\|$

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_\Omega u^2 dx}\sqrt{\int_\Omega v^2 dx} \quad \forall u,v \in L_2(\Omega)$$

Analog definieren wir: $L_2(\Gamma), L_2(\tilde{\Gamma}), \ldots \quad \tilde{\Gamma} \subset \Gamma = \partial\Omega$

z.B. $\left|\int_{\tilde{\Gamma}} uv\,ds\right| \leq \sqrt{\int_{\tilde{\Gamma}} u^2 ds}\sqrt{\int_{\tilde{\Gamma}} v^2 ds} \quad \forall u,v \in L_2(\tilde{\Gamma})$

- **Verallgemeinerte Ableitung:**

Die integrierbare Fkt. $w := \frac{\partial u}{\partial x_i}$ heißt verallgemeine Ableitung von u nach x_i, falls

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega w(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^1(\overline{\Omega}),$$

wobei $\overset{\circ}{C}{}^1(\overline{\Omega}) := \{\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^1 : \text{stetig diffbar}, \varphi(x)=0 \ \forall x \in \Gamma\}$.

Analog definiert man verallgemeine Ableitungen höherer Ordnung: $|\alpha| = |(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d)| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d = K$

$$w := \partial^\alpha u \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x^\alpha} : \int_\Omega u\,\partial^\alpha \varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega w\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^K(\overline{\Omega}),$$

wobei $\overset{\circ}{C}{}^K(\overline{\Omega}) := \{\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^1 : K\times\text{stetig diffbar}, \partial^\alpha u = 0 \text{ auf } \Gamma \ \forall |\alpha| \leq K\}$