

# Resümee:

## • Interpolationsfehlerabschätzungen:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{L_2(a,b)} = O(h^{p+1})$$

$$\|u - \tilde{u}_h\|_{C^1[a,b]} = O(h^{p+1})$$

$$\text{wobei } \tilde{u}_h(x) = \text{Int}_h(u) := \sum_{i=0}^N u(x_i) \varphi_i(x)$$

## • Diskretisierungsfehlerabschätzung:

$$\|u^{(2)} - u_h^{(2)}\|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\|u - u_h\| \approx \|u - u_h\|_{H^1(a,b)} = O(h^p)$$

$$\|u - u_h\|_{L_2(a,b)} = O(h^{p+1}) \quad (\text{Nitake})$$

$$\|u - u_h\|_{C^1[a,b]} = \begin{cases} O(h^{p+1}) & \text{falls } u^{(p+1)} \in L_\infty(a,b) \\ O(h^{p+\frac{1}{2}}) & \text{falls } u^{(p+1)} \in L_2(a,b) \end{cases}$$

## • Fehlerabschätzungen für die numerische Integration:

$$\int_a^b u(x) dx \approx \int_a^b \tilde{u}_h(x) dx \quad (\text{Verallg. Newton-Cotes-Formel})$$

$$\left| \int_a^b u(x) dx - \int_a^b \tilde{u}_h(x) dx \right| = \left| \int_a^b (u(x) - \tilde{u}_h(x)) dx \right| \leq \int_a^b |u(x) - \tilde{u}_h(x)| dx$$

$$\text{Cauchy} \rightarrow \leq \sqrt{\int_a^b 1^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |u - \tilde{u}_h|^2 dx} = \sqrt{b-a} \|u - \tilde{u}_h\|_0 = O(h^{p+1})$$