■ Beurteilung des Fehlers $e = \overset{(4)}{u} - \overset{(4)_h}{u_h} \in \tilde{V}_0$:

- Zur Beurteilung des Fehlers benötigen wir eine Norm $\|\cdot\|$ (siehe Pkt. 2.1: Normaxiome). In der Praxis sind folgende Normen interessant:

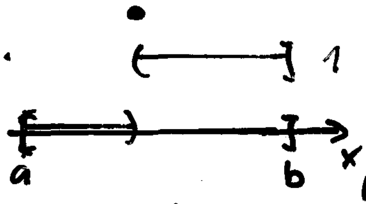
1. **C-Norm:** $\|v\|_C \equiv \|v\|_{C[a,b]} := \max_{x\in[a,b]} |v(x)|$, d.h.

$$\|u-u_h\|_C = \max_{x\in[a,b]} |u(x)-u_h(x)| \leq \;? \quad (h\to 0)$$

Bemerkung: L_∞-Norm: $\|v\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in(a,b)} |v(x)|$

max	min
sup	inf
ess sup	ess inf

z.B.



$\Rightarrow \|v\|_{L_\infty(a,b)} = 1$

2. **L_2-Norm:** $\|v\|_{L_2(a,b)} \equiv \|v\|_0 := \sqrt{\int_a^b |v(x)|^2 dx}$: ($L_p(a,b)$, p)

$$\|u-u_h\|_0 = \sqrt{\int_a^b |u(x)-u_h(x)|^2 dx} \leq \;? \quad (h\to 0)$$

3. **H^1-Norm:** $\|v\|_{H^1(a,b)} \equiv \|v\|_1 := \sqrt{\int_a^b (v^2+(v')^2)dx}$:

$$\|u-u_h\|_1 = \sqrt{\int_a^b \left[|u(x)-u_h(x)|^2 + |u'(x)-u_h'(x)|^2\right]dx} \leq \;? \quad (h\to 0)$$

4. **Energienorm:** $|||v||| := \sqrt{a(v,v)}$, falls die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$
   - symmetrisch, d.h. $a(u,v) = a(v,u)\ \forall u,v\in\tilde{V}_0$,
   - positiv, d.h. $a(v,v) > 0\ \forall v\in\tilde{V}_0 : v\neq 0$

   ist:

$$|||u-u_h||| \equiv \|u-u_h\|_E := \sqrt{a(u-u_h, u-u_h)} \leq \;? \quad (h\to 0)$$