

Lemma 2.16: (Interpolationsfehlerabschätzung)
Unter den Voraussetzungen

$$(13) \begin{cases} p=1 \\ u'' \in L_2(\delta_e), e = \overline{1, n} \quad (n=NE) \end{cases}$$

gilt die Interpolationsfehlerabschätzung

$$(14) \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(a,b)} \leq (1+c_F^2)^{0.5} h \left(\sum_{i=1}^n \|u''\|_{L_2(x_{i-1}, x_i)}^2 \right)^{1/2}$$

$$= (1+c_F^2)^{0.5} h \|u''\|_{L_2(a,b)}$$

↑
falls $u'' \in L_2(a,b)$, d.h. $u \in H^2(a,b)$.

Beweis: $\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_{H^1(a,b)}$, $\|\cdot\|_0 := \|\cdot\|_{L_2(a,b)}$

$$\|u - \tilde{u}_h\|_1^2 = \underbrace{\|u - \tilde{u}_h\|_0^2}_{z \in \mathcal{V}_0} + \underbrace{|u - \tilde{u}_h|_1^2}_{H^1\text{-Halb-norm}}$$

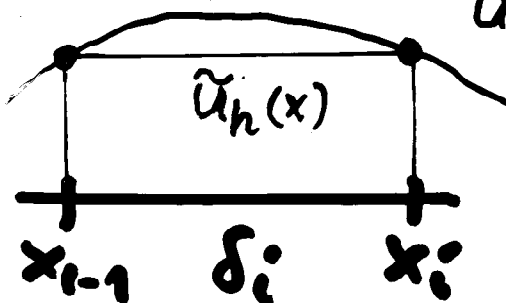
$z = u - \tilde{u}_h \in \mathcal{V}_0$, d.h.
 $z(a) = u(a) - \tilde{u}_h(a) = 0$
Friedrichsungl. $\rightarrow M$
(vgl. aber ü 2.11) $c_F^2 |u - \tilde{u}_h|_1^2$

$$:= \int_a^b [(u - \tilde{u}_h)']^2 dx = \| (u - \tilde{u}_h)' \|_0^2$$

$$\leq (c_F^2 + 1) |u - \tilde{u}_h|_1^2$$

$$|u - \tilde{u}_h|_1^2 = |z|_1^2 = \int_a^b (z'(x))^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z'(x))^2 dx$$

Offenbar gilt für den Interpolationsfehler $z(x)$
 $u(x)$



$$z(x_j) = u(x_j) - \tilde{u}_h(x_j) = 0$$

$$\forall j = \overline{0, n}$$