

• Wichtige Ungleichungen:

a) Cauchy - Ungleichung:

$$(3)a) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V = L_2(\Omega), H^1(\Omega), \dots$$

b) Friedrichs - Ungleichung:

$$(3)b) \quad \int_{\Omega} (u(x))^2 dx \leq c_F^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in V_0$$

wobei  $V_0 := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma}\}$   
mit einem "echten" Randstück  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ :

$$|\tilde{\Gamma}| := \int_{\tilde{\Gamma}} ds_x > 0$$

Bem.:  $V_0 = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega\} =: H_0^1(\Omega)$

c) Poincaré - Ungleichung:

$$(3)c) \quad \int_{\Omega} u^2 dx \leq c_P^2 \left\{ \underbrace{\left( \int_{\Omega} u(x) dx \right)^2}_{\text{Mittelungsintegral}} + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right\} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

zur Erkennung von  $u = \text{const.}$

d) Randeinbettung:  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma : |\tilde{\Gamma}| > 0$

$$(3)d) \quad \int_{\tilde{\Gamma}} u^2 ds_x \leq c_E^2 \int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{L_2(\tilde{\Gamma})} \leq c_E \|u\|_{H^1(\Omega)}$$