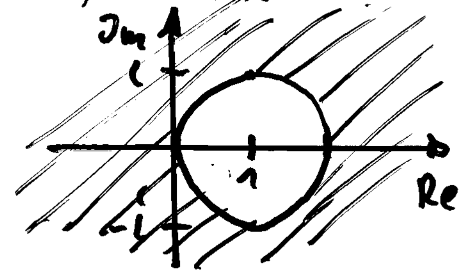
## A-Stabilität für RKV:

- Ideal: $\mathbb{C}^- := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0 \} \subset S$
  $\rightsquigarrow \forall \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \le 0$ hätte man Stabilität im obigen Sinne unabhängig von der Schrittweite!

- **Def. 5.7:** (A-Stabilität)
  Ein RKV heißt A-stabil, falls $\mathbb{C}^- \subset S := \{ z \in \mathbb{C} : |R(z)| \le 1 \}$.

- Beispiel: Impliziter Euler: $R(z) = 1/(1-z)$
  $\Rightarrow S = \{ z \in \mathbb{C} : |1-z|^{-1} \le 1 \}$
  $= \{ z \in \mathbb{C} : 1 \le |z-1| \}$




$\Rightarrow \mathbb{C}^- \subset S$,
d.h. impliziter Euler ist A-stabil!
d.h. impliziter Euler produziert beschränkte Näherungen, falls Testproblem (21) beschränkte Lsg. hat!
d.h. Fehler in AW werden nicht vergrößert, falls $\operatorname{Re} \lambda \le 0$!

- **Bem. 5.8:** Explizite RKF sind nicht A-stabil!

- Beispiele A-stabiler impliziter RK-Formeln:
  1. Impliziter Euler
  2. Implizite Mittelpunktsregel: $R(z) = \frac{2+z}{2-z}$ $\quad z = \tau\lambda$
     $f = \lambda u : u_{j+1} = u_j + \tau \lambda g$ mit $g = u_j + \frac{\tau}{2} \lambda g$
     $u_{j+1} = u_j + \tau\lambda (1 - \frac{1}{2}\tau\lambda)^{-1} u_j = (1 + \tau\lambda(1-\frac{1}{2}\tau\lambda)^{-1}) u_j$
     $\Rightarrow S := \{ z \in \mathbb{C} : |R(z)| \le 1 \} = \mathbb{C}^-$ (nnr)
  3. Implizite Trapezregel = Crank-Nicolson: $R(z) = \frac{2+z}{2-z}$
     $f = \lambda u : u_{j+1} = u_j + \frac{\tau\lambda}{2}(u_j + u_{j+1}) \rightsquigarrow u_{n+1} = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} u_n$, $z = \tau\lambda$
     $\Rightarrow S = \mathbb{C}^-$ $\Leftarrow S := \{ z \in \mathbb{C} : |\frac{2+z}{2-z}| \le 1 \}$
  4. Implizite $\ell$-stufige RKF vom Gauß-Typ.

KO
"
2l