<u>Resultat:</u> $$\boxed{\int_{x_{i-1}}^{x_i} [z'(x)]^2 dx \le h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx}$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_1^2 \le (1+c_F^2)\, |u-\tilde{u}_h|_1^2 = (1+c_F^2)\, |z|_1^2$$
$$= (1+c_F^2) \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z'(x))^2 dx \le$$
$$\le (1+c_F^2) \sum_{i=1}^{n} h^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx$$
$$= (1+c_F^2)\, h^2 \sum_{i=1}^{n} \|u''(x)\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)}$$

d.h. (14) gilt. q.e.d.

Eingesetzt in (10) ergibt sich

(15) $$\|u-u_h\|_{H^1(a,b)} \le \frac{\mu_2}{\mu_1}(1+c_F^2)^{0.5} h \left(\sum_{i=1}^{n} \|u''\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)}\right)^{1/2}.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

<u>Satz 2.17:</u> ($H^1$-Konvergenz)

<u>Vor.:</u> 1) (V1) und (V2)

2) $p = 1$ (Lineare Elemente)

3) Lsg. $u \in V_g$ : (2) : $\exists\, u'' \in L_2(x_{i-1},x_i)\ \forall i = \overline{1,n}$.

<u>Bh.:</u> Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

(15) $$\|u-u_h\|_{H^1(a,b)} \le \frac{\mu_2}{\mu_1}(1+c_F^2)^{1/2} h \left(\sum_{i=1}^{n} \|u''\|^2_{L_2(\delta_i)}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{\mu_2}{\mu_1}\sqrt{1+c_F^2}\, h\, \|u''\|_{L_2(a,b)}$$

$u \in V_g \cap H^2(a,b)$.