- Für RKF lässt sich die Darstellung (20) des lokalen Fehlers durch Taylor-Entwicklung leicht nachweisen, z.B.
  - explizites Euler-Verfahren (→ Pkt. 5.2.3):
    $$u(t+\tau)-u_\tau(t+\tau) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(f_t+f_u f)(t,u)}_{=:\,c(t,u)}\,\tau^2 + O(\tau^3)$$
  - verbessertes Euler-Verfahren (→ Pkt. 5.2.3)
    $$u(t+\tau)-u_\tau(t+\tau) = \underbrace{\tfrac{1}{24}\left(f_{tt}+2f_{tu}f+f_{uu}f^2+4(f_u f_t+f_u^2 f)\right)}_{=:\,c(t,u)}\tau^3+O(\tau^4)$$

Im Folgenden wird nur von der Existenz eines von τ unabhängigen, in t und u hinreichend glatten Koeffizienten $c(t,u)$, <u>nicht</u> aber von seiner speziellen Gestalt Gebrauch gemacht!

- <u>Schätzung des lokalen Fehlers durch Extrapolation:</u>
  - Zuerst wird ein Schritt mit der Schrittweite τ durchgeführt. Man erhält eine Näherung u_τ im nächsten Gitterpunkt $t+h$ und wegen (20) gilt:
    $$(20)\quad u(t+\tau)-u_\tau(t+\tau) = c(t,u)\,\tau^{p+1}+O(\tau^{p+2})$$
  - Zwei Schritte mit halber Schrittweite $\tau/2$ führen ebenfalls zum Gitterpkt. $t+\tau$, erzeugen aber eine andere Näherung $u_{\tau/2}(t+\tau)$ im Pkt. $t+\tau$. Für den ersten Schritt gilt wegen (20)

$$u\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)-u_{\frac{\tau}{2}}\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right) = c(t,u)\left(\tfrac{\tau}{2}\right)^{p+1}+O(\tau^{p+2}).$$