

● Satz 2.12:

Vor.: $|c_1| > 0, |c_n| > 0;$
 $|a_i| > 0, |b_i| > 0 \forall i = \overline{2, n-1}; |b_1| > 0, |a_n| > 0;$
 $\left. \begin{aligned} |c_i| &\geq |a_i| + |b_i| \forall i = \overline{2, n-1} \\ |c_1| &\geq |b_1|, |c_n| \geq |a_n| \end{aligned} \right\} (*)$
 wobei für wenigstens eine der Ungleichungen (*)
 " $>$ " gelten soll.

→ Bh.: 1. $\Delta_i := c_i - a_i \alpha_i \neq 0 \forall i = \overline{2, n}$ (Durchführbar.)
 2. $|\alpha_i| \leq 1 \forall i = \overline{2, n}$ (Stabilität)

Beweis: mms* (Induktion) bzw. siehe Literatur! ■

● Interpretation:

1. $\Delta_i \neq 0$ sichert die Berechenbarkeit von α_{i+1} und β_{i+1} !
2. $|\alpha_i| \leq 1$ sichert ab, dass Rundungsfehler, die in einem Rechenschritt auftreten, beim Übergang zum nächsten Schritt nicht anwachsen:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= -\alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} \\ \tilde{u}_i &= -\alpha_{i+1} (u_{i+1} + \delta_{i+1}) + \beta_{i+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta_i = \tilde{u}_i - u_i = -\alpha_{i+1} \delta_{i+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\delta_i| \leq |\alpha_{i+1}| |\delta_{i+1}| \leq |\delta_{i+1}|, i = \overline{(n-1), 1}}$$

Angen.: $\alpha_i \approx 1.1 : \delta_1 = (-1)^{n-1} \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \delta_n \approx (-1)^{n-1} (1.1)^{n-1} \delta_n$
 $n = 1000 : (1.1)^{n-1} \approx 10^{42} !!!$

- ## ● Übung 2.13: Man zeige, dass die Vor. von Satz 2.12 durch die FE-Matrix

$$K_h = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 + \alpha_{bh} \end{bmatrix} \text{ des GS } (\underline{4})_h \text{ erfüllt werden!}$$