

5.3. Steife Differentialgleichungen

■ Betrachten Beispiel 4.2 aus Ü4 (N-3)

$$(20) \begin{cases} u'(t) = -50(u(t) - \cos(t)), & t \in [0, T], T=1.5 \\ \text{AB: } u(0) = 0 \end{cases}$$

Das explizite und das implizite Euler-Verfahren verhalten sich völlig unterschiedlich:

- expliziter Euler: sinnvolle Resultate erst für $\tau \leq \tau_*$!
- impliziter Euler: Keine Probleme auch für größere τ !, obwohl beide Verfahren

- Konsistenzordnung 1 haben und
- stabil i.S. Pkt. 5.2.4 sind (Lip-stetig mit $L=50$).

Offenbar reicht der Stabilitätsbegriff nicht aus, um das Verhalten der Verfahren für größere Zeitschritte τ zur Lösung steifer AWP (1), d.h. große Lipschitz-Konstante L bzw.

große Kondition der Jacobi-Matrix

$$J := f_u(t, u(t)) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right]_{i,j=1,N}$$

zu erklären:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Pkt. 5.2.4: } (1 + L\tau) &\leq e^{L\tau} \quad (+ \mapsto -?) \\ &\Rightarrow e^{L\tau_0} e^{L\tau_1} \dots e^{L\tau_m} \leq e^{LT} \quad ! \end{aligned}$$