5.5.6. 0-Stabilität

MSF (K-Schritt): $\sum_{i=j-K+1}^{j+1} \alpha_i u_i = \tau \sum_{i=j-K+1}^{j+1} \beta_i f_i$ $\quad j = K-1, \dots, m-1$

(24)

$$\alpha_K u_{j+K} + \alpha_{K-1} u_{j+K-1} + \dots + \alpha_0 u_j = \tau \sum_{i=0}^{K} \beta_i f_{j+i}$$

$j = 0, 1, \dots, m-K$

Polynome: $\rho(z) = \alpha_K z^K + \alpha_{K-1} z^{K-1} + \dots + \alpha_0$ (charakteristische)

$\sigma(z) = \beta_K z^K + \beta_{K-1} z^{K-1} + \dots + \beta_0$

- Def. 5.5: 0-Stabilität von MSV : $\rho(z) = 0$

  Das MSV (24) heißt 0-stabil, falls jede Nullstelle ξ des charakteristischen Polynoms $\rho(\cdot)$ die Bed.

  (25) $\begin{cases} |\xi| \le 1, & \text{falls } \xi \text{ - einfache Nullstelle} \\ |\xi| < 1, & \text{falls } \xi \text{ - mehrfache Nullstelle} \end{cases}$

  erfüllt.

5.5.7. Dahlquist-Barrieren

- 1. Dahlquist-Barriere (1956):

  Für die höchste, erreichbare KO eines 0-stabilen K-Schrittverfahrens gilt:

  $$KO \le \begin{cases} K+2, & \text{falls } K \text{ - ungerade}, \\ K+1, & \text{falls } K \text{ - gerade}, \\ K, & \text{falls } \beta_K / \alpha_K \le 0 \end{cases} \quad (\to \text{expl. MSF: } \beta_K = 0)$$

- 2. Dahlquist-Barriere:

  Ein A-stabiles ($\mathbb{C}^- \subset S := \{\mu \in \mathbb{C} :$ Nullst. ξ von $\rho(z) - \mu\sigma(z)$ erfüllen Bed. (25)$\}$), lineares MSV muß die Konsistenzordnung $KO \le 2$ haben.