Schätzung mittels eingebetteter RKF:

Grundidee:

Neben der das ESV bestimmende RKF der Ordnung p wird eine weitere $\widehat{RKF}$ mindestens der Ordnung $p+1$ Konstr.

Die erste RKF liefert einen lokalen Fehler

$$u(t+\tau) - u_\tau(t+\tau) = O(\tau^{p+1}),$$

für die zweite Formel $\widehat{RKF}$ gilt:

$$u(t+\tau) - \hat{u}_\tau(t+\tau) = O(\tau^{p+2})$$

und somit folgt

$$u(t+\tau) - u_\tau(t+\tau) = \hat{u}_\tau(t+\tau) - u_\tau(t+\tau) + O(\tau^{p+2}).$$

Daher ergibt sich folgende Schätzung für den lok. Fehler:

$$e \approx \frac{|\hat{u}_\tau(t+\tau) - u_\tau(t+\tau)|}{d} \quad \text{mit } d = \begin{cases} 1 & \text{abs.} \\ |\hat{u}_\tau(t+\tau)| & \text{rel.} \\ \max\{|\hat{u}_\tau(t+\tau)|, 1\} & \end{cases}$$

Eingebettete RKF:

Um den Aufwand zur Berechnung von $\hat{u}_\tau(t+\tau)$ möglichst gering zu halten, wählt man die <u>gleichen</u> Werte für c und A in beiden Tableaus: RKF und $\widehat{RKF}$:

$$\begin{array}{l|lllll}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \\
c_\ell & a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \cdots & a_{\ell,\ell-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{\ell-1} & b_\ell \\
\hline
 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & & \hat{b}_{\ell-1} & \hat{b}_\ell
\end{array}$$

eingebettete explizite RKF

KO = p ... $O(\tau^{p+1})$

KO = $p+1$ ... $O(\tau^{p+2})$

Die beiden Näherungen sind dann gegeben durch:

$$u_\tau(t+\tau) = u + \tau \sum_{i=1}^{\ell} b_i f(t+c_i\tau, g_i) \quad \text{und}$$

$$\hat{u}_\tau(t+\tau) = u + \tau \sum_{i=1}^{\ell} \hat{b}_i f(t+c_i\tau, g_i)$$