- Zur Untersuchung des Stabilitätsverhalten eines RK-Verfahrens mit "großer" Schrittweite wird das Verhalten des Verfahrens für das Testproblem (21) mit $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachtet:

$$(21)\quad \boxed{\begin{array}{l} u'(t) = \lambda u(t) \\ u(0) = 1 \end{array}} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} \tilde{u}'(t) = \lambda \tilde{u}(t) \\ \tilde{u}(0) = 1+\delta \end{array}} \quad (22)$$

$\delta > 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$u(t) = e^{\lambda t} \qquad \tilde{u}(t) = (1+\delta)e^{\lambda t}$$

Fehler

$\lambda = \mathrm{Re}\lambda + i\,\mathrm{Im}\lambda$

$$z(t) = \tilde{u}(t) - u(t) = \delta e^{\lambda t} = \delta e^{\mathrm{Re}\lambda\, t} \cdot e^{i\,\mathrm{Im}\lambda\, t}$$

$i = \sqrt{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{|z(t)| = \delta e^{\mathrm{Re}\lambda\, t} \le \delta, \text{ falls } \mathrm{Re}\lambda \le 0}$$

OK, aber bekommt man so Aussagen über den allgemeinen Fall $u'(t) = f(t, u(t))$ ?

- **Motivation für das Testproblem (21):**
  - $\left.\begin{array}{l} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{array}\right\}$ (1) $\rightsquigarrow$ $u(t)$ exakte Lsg.
  - $\left.\begin{array}{l} \tilde{u}'(t) = f(t, \tilde{u}(t)) \\ \tilde{u}(0) = u_0 + \delta \end{array}\right\}$ $(\tilde{1})$ $\rightsquigarrow$ $\tilde{u}(t)$ gestörte Lsg.
  - Linearisieren gestörtes Problem $(\tilde{1})$ in der Nähe der exakten Lsg. $u(t)$:

$$\Rightarrow \tilde{u}'(t) = f\big(t, u(t) + (\tilde{u}(t) - u(t))\big)$$

$$= \underbrace{f(t, u(t))}_{= u'(t)} + f_u(t, u(t)) \underbrace{(\tilde{u}(t) - u(t))}_{z(t)} + o(\tilde{u}(t) - u(t))$$