

4.2.2. CG für GS mit spd Matrizen

- Btr. nun GS (1) $Ax = b$ mit spd Matrix A , d.h. symmetrisch und positiv definit

$$(12) \quad A = A^T \quad \text{und} \quad (Ax, x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: x \neq 0.$$

Dann sind offenbar folgende Formulierungen äquivalent (vgl. auch Satz 3.1)

$$(1) \quad \text{Ges. } x \in \mathbb{R}^n:$$

- $Ax = b$
- $(Ax, y) = (b, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

$$(13) \quad \bullet \quad E(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} E(y)$$

mit dem Energiefunktional

$$E(y) = \frac{1}{2} (Ay, y) - (b, y).$$

wobei $(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^n}$ das Euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^n ist, d.h.

$$(x, y) = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- Richtung des steilsten Abstiegs im Pkt. $y \in \mathbb{R}^n$:

$$(14) \quad -\nabla E(y) := - \left[\frac{\partial E(y)}{\partial y_i} \right]_{i=1, \dots, n} = b - Ay =: d$$