4.2. Iterative Verfahren

■ **Idee:**

- Geg. $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ – Startnäherung
- Erzeugen (wie ?) sukzessiv Folge von Näherungen
  $$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{!} x \in \mathbb{R}^n : Ax = b \quad (1)$$

■ **Fragen:**

- Konstruktionsprinzipien
- Konvergenzanalysis: $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x$! ?
- Konvergenzgeschwindigkeit (KG) und Fehlerabschätzungen:
  z.B. q-lineare KG, d.h. $\exists\, q \in (0,1)$ – Konvergenzrate:
  $$\|x - x^{(k)}\| \le q \|x - x^{(k-1)}\| \le \ldots \le q^k \|x - x^{(0)}\|$$
  r-lineare KG, d.h. $\exists\, q \in (0,1)$ und $c = const > 0$:
  $$\|x - x^{(k)}\| \le c\, q^k$$
- Praktisch: Konvergenztest, z.B. Defekttest: Man stoppt die Iteration, falls

(5) $$\|d^{(k)}\| \le \varepsilon \|d^0\| \overset{\text{z.B.}}{:=} \varepsilon \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i^{(0)})^2}}_{\text{Euklidische Norm}}$$

  mit dem Defekt $d^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ und vorgeg. rel. Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-t} \in (0,1)$.
- In welcher Norm $\|\cdot\|$ soll man den Fehler $z^{(k)} = x - x^{(k)}$ messen ?
  z.B. gilt für den Fehler $z^{(k)} = x - x^{(k)}$
  $$\|z^{(k)}\|^2 := \|z^{(k)}\|^2_{A^TA} := (A^TA z^{(k)}, z^{(k)}) = \|A(x - x^{(k)})\|^2 = \|d^{(k)}\|^2,$$
  wobei $\|\cdot\| := (\cdot,\cdot)^{0.5}$ – Euklidische Norm