b) Aus $(4)_*$ erhalten wir

$$\underbrace{\int_\Omega \left[-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + au - f\right] dx}_{=0} + \int_{\Gamma_2}\left[\frac{\partial u}{\partial N} - g_2\right] v\, ds_x + \int_{\Gamma_3}\left[\frac{\partial u}{\partial N} - \alpha(g_3-u)\right] v\, ds_x = 0 \quad \forall v \in \overline{V}_0$$

d.h.

$$\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \left[\frac{\partial u}{\partial N} - \varphi\right] v\, ds_x = 0 \quad \forall v \in \overline{V}_0\big|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}$$

$$\varphi = \begin{cases} g_2 & \text{auf } \Gamma_2 \\ \alpha(g_3-u) & \text{auf } \Gamma_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} \left[\frac{\partial u}{\partial N} - \varphi\right] v\, ds_x = 0 \quad \forall v \in L_2(\Gamma_2\cup\Gamma_3)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} - \varphi = 0, \text{ d.h. } \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial N} &= g_2 \text{ auf } \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial N} &= \alpha(g_3-u) \text{ auf } \Gamma_3 \end{aligned}$$

c) Die RB 1. Art, d.h. $u = g_1$ auf Γ_1, sind erfüllt, da $u \in V_g$!

Folglich genügt u in Ω der PDgl. (a)) und erfüllt auf Γ die RB (b)+c)), d.h. u ist Lsg. von (1) ∎

3. Unter den Voraussetzungen

$$(5)\begin{cases} (V1)\ \overline{V}_0\text{-Elliptizität: } a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in \overline{V}_0 \text{ und} \\ (V2)\ \overline{V}_0\text{-Beschränktheit: } |a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u,v \in \overline{V}_0 \end{cases}$$

kann man wieder theoretische Resultate zeigen, wie

- $\exists!\, u \in \overline{V}_g : (4)$ (Lax-Milgram-Satz)
- Diskretisierungsfehlerabschätzung für FE-Lsg. (vgl. Satz 2.9 von Cea etc.)