Lemma 2.16: (Interpolationsfehlerabschätzung)

Unter den Voraussetzungen

$$(13)\quad \begin{cases} p = 1 \\ u'' \in L_2(\delta_e),\ e = \overline{1,n} \quad (n = NE) \end{cases}$$

gilt die Interpolationsfehlerabschätzung

$$(14)\quad \|u - \tilde{u}_h\|_{H^1(a,b)} \leq (1 + c_F^2)^{0.5}\, h \left(\sum_{i=1}^{n} \|u''\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \right)^{1/2}$$

$$= (1 + c_F^2)^{0.5}\, h\, \|u''\|_{L_2(a,b)}$$

falls $u'' \in L_2(a,b)$, d.h. $u \in H^2(a,b)$.

Beweis: $\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_{H^1(a,b)}$, $\|\cdot\|_0 := \|\cdot\|_{L_2(a,b)}$

$$\|u - \tilde{u}_h\|_1^2 = \|\overbrace{u - \tilde{u}_h}^{z \in V_0}\|_0^2 + |u - \tilde{u}_h|_1^2$$

$z = u - \tilde{u}_h \in V_0$, da $z(a) = u(a) - \tilde{u}_h(a) = 0$

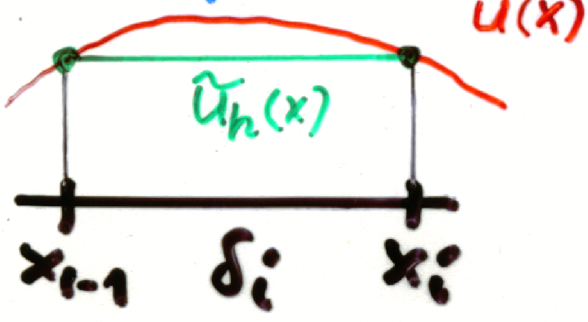
Friedrichsungl. (vgl. aber Ü 2.11) $\longrightarrow$ $\leq c_F^2 |u - \tilde{u}_h|_1^2$

$$|u - \tilde{u}_h|_1^2 := \int_a^b [(u - \tilde{u}_h)']^2\,dx := \|(u - \tilde{u}_h)'\|_0^2 \qquad H^1\text{-Halbnorm}$$

$$\leq (c_F^2 + 1)\, |u - \tilde{u}_h|_1^2$$

$$|u - \tilde{u}_h|_1^2 = |z|_1^2 = \int_a^b (z'(x))^2\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (z'(x))^2\,dx$$

Offenbar gilt für den Interpolationsfehler $z(x)$



$$z(x_j) = u(x_j) - \tilde{u}_h(x_j) = 0 \quad \forall j = \overline{0,n}$$