Satz 2.14.: (Lax und Milgram)

Vor.: Es gelten die Vor. (V0), (V1) und (V2).

Bh.: 1. $\exists!\, u \in \bar{V}_g : (4)$.

2. $\exists!\, u_h \in \bar{V}_{gh} : (4)_h \Leftrightarrow \exists!\, \underline{u}_h \in \mathbb{R}^N : (\underline{4})_h$

Beweis: siehe Literatur! ∎

Satz 2.15.: (Cea)

Vor.: Es gelten die Vor. (V1) und (V2).

Bh.: Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$(10) \quad \underbrace{\| \overset{(4)}{u} - \overset{(4)_h}{u_h} \|_1}_{\text{Diskretisierungsfehler}} \le \frac{\mu_2}{\mu_1} \underbrace{\min_{w_h \in \bar{V}_{gh}} \| u - w_h \|_1}_{\text{Approximationsfehler}}$$

Beweis:

$$(4) \quad u \in \bar{V}_g : a(u, v_h) = \langle F, v_h \rangle \; \forall v_h \in \bar{V}_{0h} \subset \bar{V}_0$$

$$-(4)_h \quad u_h \in \bar{V}_{gh} : a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \; \forall v_h \in \bar{V}_{0h}$$

$$(11) \qquad a(u - u_h, v_h) = 0 \; \forall v_h \in \bar{V}_{0h}$$

Galerkin-Orthogonalität!

Setzen $v_h = u - u_h - (u - w_h) = w_h - u_h \in \bar{V}_{0h} \; \forall w_h \in \bar{V}_{gh}$

$$a(u - u_h, u - u_h - (u - w_h)) = 0 \; \forall w_h \in \bar{V}_{gh}$$

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w_h) \; \forall w_h \in \bar{V}_{gh}$$

$$(V1) \longrightarrow \text{VI} \qquad\qquad \text{AI} \longleftarrow (V2)$$

$$\mu_1 \| u - u_h \|_1^2 \qquad\qquad \mu_2 \| u - u_h \|_1 \| u - w_h \|_1$$

$$\Longrightarrow \| u - u_h \|_1 \le \frac{\mu_2}{\mu_1} \| u - w_h \| \; \forall w_h \in \bar{V}_{gh}. \text{ q.e.d. } ∎$$