2.2.2 Verzerrungszustand

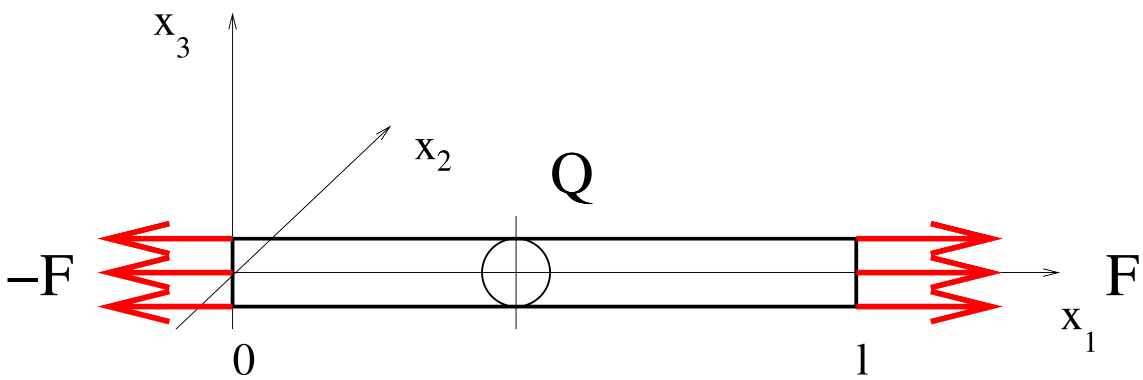
$\boxed{22}$ Man zeige, dass die Verzerrungen $\varepsilon_{ij}(v) = 0$, $i,j = 1,2,3$, einer Verschiebungsfunktion $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in [C^2(\Omega)]^3$ genau dann verschwinden, wenn $v \in \mathcal{R}$ eine Starrkörperverschiebung ist, wobei der Unterraum $\mathcal{R} := \{v(x) = a \times x + b : a, b \in R^3\}$ der Starrkörperverschiebungen durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

2.2.3 Bestimmung der elastischen Konstanten im isotropen Fall

$\boxed{23}$ Wir betrachten einen homogenen, isotropen Stab $\Omega = \{x \in R^3 : 0 < x_1 < l,\ (x_2, x_3) \in Q\}$ der Länge l mit konstanten Querschnitt Q ($l >> \text{diam}(Q)$) unter einachsiger (x_1-Richtung) Zug- bzw. Druckbelastung (siehe Skizze):



Man leite aus den Beziehungen der 3D Elastizitätstheorie (Kinetik, Kinematik, Hooksches Stoffgesetz, Randbedingungen) die entsprechenden Beziehungen für den Stab her ! Wie kann man aus dem Zugversuch mit dem Stab sowohl das Youngsche Elastizitätsmodul E als auch die Poissonsche Querkontraktionszahl ν (und damit alle anderen elastischen Konstanten) bestimmen ?

2.2.4 Spezialfälle von Spannungs- und Verzerrungszuständen

○ Präsentationsaufgaben:

$\boxed{24^\star}$ **Der ebene Verzerrungszustand (EVZ) im homogenen und isotropen Fall:** Der Körper $\mathcal{K} \in R^3$ habe eine ausgezeichnete Dimension, z.B. in x_3-Richtung, die wesentlich länger ist als die anderen beiden Richtungen, und konstanten Querschnitt $\Omega \subset R^2$:

$$\mathcal{K} = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 : (x_1, x_2) \in \Omega, -l < x_3 < +l\}$$

mit $l >> \text{diam}(\Omega)$. Die Volumenkräfte f und und Oberflächenkkräfte t wirken in der Ebene, die orthogonal zur x_3-Achse liegt, und sind unabhängig von x_3, d.h.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t(x) = \begin{pmatrix} t_1(x_1, x_2) \\ t_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \perp \vec{x}_3.$$

Der Staudamm einer Talsperre ist ein typisches Beispiel dafür.

Man leite aus den Beziehungen der 3D Elastizitätstheorie (Kinetik, Kinematik, Hooksches Stoffgesetz, Randbedingungen) die entsprechenden Beziehungen für den EVZ her !

$\boxed{25^\star}$ **Der ebene Spannungszustand (ESZ) im homogenen und isotropen Fall:** Wir betrachten jetzt das Deformationsproblem für eine **Scheibe**

$$\mathcal{K} = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 : (x_1, x_2) \in \Omega, -h < x_3 < +h\}$$

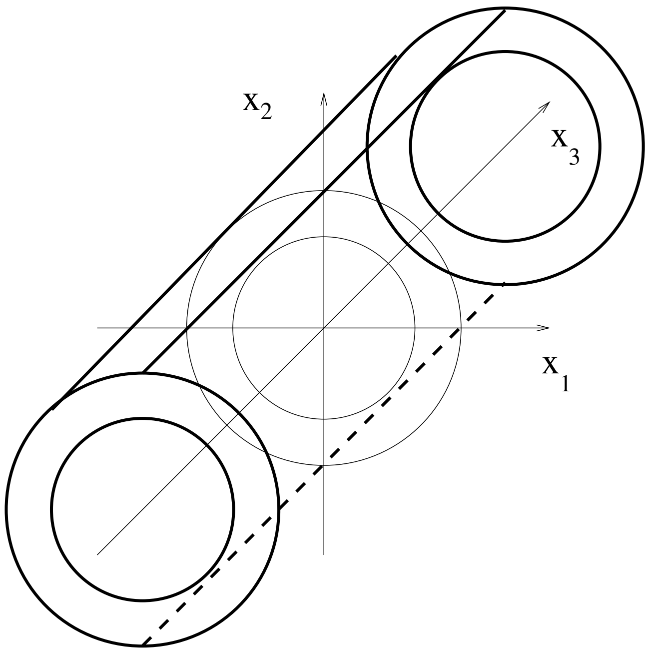
mit $h << \text{diam}(\Omega)$ unter der Wirkung des x_3-unabhängigen Kräfteregimes

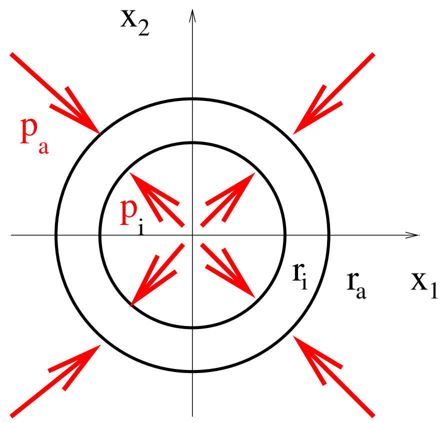
$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t(x) = \begin{pmatrix} t_1(x_1, x_2) \\ t_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, (x_1, x_2) \in \Gamma_t$$

und $t(x_1, x_2, +h) = t(x_1, x_2, -h) = 0, \ (x_1, x_2) \in \Omega$. Der C-Rahmen einer Spritzgussmaschine der Firma Engel (Schwertberg) ist ein typisches Beispiel dafür.

Man leite aus den Beziehungen der 3D Elastizitätstheorie (Kinetik, Kinematik, Hooksches Stoffgesetz, Randbedingungen) die entsprechenden Beziehungen für den ESZ her !

$\boxed{26^\star}$ **Dickwandiges Rohr unter Innen- und Aussendruck:** Wir betrachten jetzt das Deformationsproblem für eine langes, dickwandiges Rohr mit einem Innenradius r_i und einem Aussenradius r_a unter dem Innendruck p_i und dem Aussendruck p_a (siehe Skizze):





Man leite aus den Beziehungen der 3D Elastizitätstheorie (Kinetik, Kinematik, Hooksches Stoffgesetz, Randbedingungen) ein möglichst einfaches Modell zur Festigkeitsberechnung des Rohres her ! Bestimmen Sie die Lösung $(u_r(r) =?, \sigma_{rr} = ?, \sigma_{\phi\phi} =?, \sigma_{r\phi} =?)$ analytisch, falls das möglich ist !