$\boxed{\textbf{P III}}$ 20.11. 2003 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : T 711): $\boxed{10}$ – $\boxed{17}$

1.5 Instationäre Wärmeleitprobleme

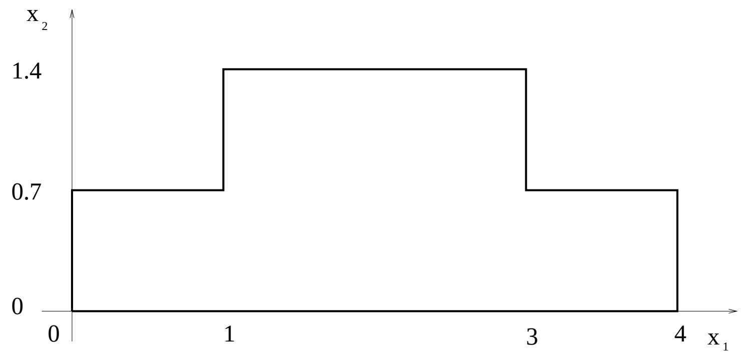
○ Für einen mantelisolierten Kupferstab $\left(\rho = 8960\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},\ c = 384\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\cdot K}},\ \lambda = 394\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}}\right)$ der Länge $L = 1$ m, der wärmequellenfrei ($f = 0$) ist, an beiden Rändern mit der gleichen Temperatur $T_a(t) = T_b(t) = g(t) := 60°\mathrm{C}$ gekühlt wird und für $t_A = 0$ die Aussentemperaturverteilung $T_A(x) = 60° + 40° \sin(\pi x/L)$ besitzt, soll der Temperaturverlauf im Stabmittelpunkt und die Temperatur nach einer Stunde $t_E = 1\,\mathrm{h}$ ermittelt werden. Beachten Sie die Masseinheiten !

$\boxed{10}$ Modellieren Sie das oben beschriebene instationäre Wärmeleitproblem in integraler Form (Bilanzform) !

$\boxed{11}$ Leiten Sie die differentielle Form (klassische Formulierung) her ! Sind die dafür notwendigen Voraussetzungen erfüllt ?

$\boxed{12^\star}$ Lösen Sie die ARWA aus $\boxed{11}$ analytisch und bestimmen Sie, zu welchen Zeitpunkt $t = t_* > 0$ die Temperatur T im gesamten Stab erstmals kleiner oder höchstens gleich $70°$ C ist !

○ Gegeben ist ein Betonträger mit dem skizzierten Querschnitt, der an der Unterseite und an den vertikalen Seitenflächen wärmeisoliert ist. Auf den Oberseiten ist eine wellenförmige Abdeckung angebracht. Der Träger wird von der Sonne beschienen. Gesucht ist die Temperaturverteilung im Laufe eines Tages, wenn man zu Sonnenaufgang eine homogene Temperatur von 5^o C voraussetzt. Wir sind am Temperaturfeld in der Mitte des Trägers interessiert !



- Maße des Trägers: Länge: 20.00 m, Höher: 1.40 m, Breite: 4.00 m;
- Materialkonstanten: $\rho = 2450\frac{kg}{m^3}$, $c = 900\frac{J}{kg*K}$, $\lambda = 2.457\frac{W}{K*m}$;
- Sonneneinstrahlung:
  - ∗ Zeit zwischen Sonnenaufgang und -untergang: 12 h,
  - ∗ Intensität der Sonneneinstrahlung: $\sin(2\pi t/24)$,
  - ∗ Räumliche Variation infolge der wellenförmigen Abdeckung: $0.5(1 + \cos(5\pi x))$;
  - ∗ Maximale Sonneneinstrahlung am Mittag: $1000\frac{W}{m^2}$.

$\boxed{13}$ Modellieren Sie den tatsächlichen Wärmeeintrag $[W/m^2]$ durch die Sonneneinstrahlung durch eine Neumann-Randbedingung auf den horizontalen Oberflächenteilen (Oberseite) des Betonträgers !

$\boxed{14}$ Modellieren Sie das obene beschriebene instationäre Wärmeleitproblem durch eine ARWA in klassischer Formulierung in einem möglichst kleinen Rechengebiet Ω (Hinweis: Dimensionsreduktion und Ausnutzung von Symmetrien) !

1.6 Wärmeleit-Wärmetransportprobleme

$\boxed{15}$ Die Bestimmung der Temperaturverteilung $u(y)$ in einem homogenen ($c, \rho, \lambda = const.$), mantelisolierten, wärmequellenfreien, dünnen Draht der Länge l, der mit der Geschwindigkeit v bewegt wird, am linken Rand auf 0^o C und rechten Rand auf 1^o C gehalten wird, führt nach Skalierung $x = y/l$ auf das Randwertproblem (siehe Vorlesung)

$$-u''(x) + pu'(x) = 0,\ \forall x \in (0,1),\ u(0) = 0,\ u(1) = 1. \tag{1.1}$$

Bestimmen Sie $p = p(c, \rho, \lambda, v, l) = ?$, lösen Sie dann das Randwertproblem (1.1) analytisch und diskutieren Sie das Verhalten der Lösung für $v \longrightarrow \infty$!

1.7 Das TWD - Projekt (Präsentationsaufgabe)

○ Transparente Wärmedämmung (TWD) stellt eine Möglichkeit dar, das auf eine Gebäudefassade auftreffende Sonnenlicht umzuwandeln und in Wärme für Heizzwecke nutzbar zu machen. Die mathematische Modellierung dieses Problems ist Gegenstand der ersten Bakkalaureatsarbeit von Herrn Grafenhofer.

Unter bestimmten Annahmen (die nährungsweise zu bestimmten Tagesperioden in den Wintermonaten erfüllt sind) kann das folgende stationäres 1D Wärmeleitproblem als mathematisches Modell zur Bestimmung der Temperaturverteilung $u(.)$ aufgeschrieben werden (es dient später zur Verifizierung der numerische Methoden zur Simulation und Optimierung):

$x = 0$ (RB 1. Art): $u(0) = u_I$,
$x \in (0, d_z)$ (Ziegel): $-\lambda_z u''(x) = 0$,
$x = d_z$ (Interface Ziegel - Wabe):
$$u(d_z - 0) = u(d_z + 0) \text{ und } -\lambda_z u'(d_z - 0) = -\lambda_w u(d_z + 0)$$
$x \in (d_z, d_z + d_w)$ (Wabe): $-\lambda_w u''(x) = f(x)$,
$x = d_z + d_w$ (Interface Wabe - Luft):
$$u(d_z + d_w - 0) = u(d_z + d_w + 0) \text{ und } -\lambda_w u'(d_z + d_w - 0) = -\lambda_l u(d_z + d_w + 0)$$
$x \in (d_z + d_w, d_z + d_w + d_l)$ (Luft): $-\lambda_l u''(x) = 0$,
$x = d_z + d_w + d_l$ (RB 1. Art): $u(d_z + d_w + d_l) = u_A$,

$\boxed{16^\star}$ Bestimmen Sie die Temperaturverteilung $u(x)$, $x \in [0, d_z + d_w + d_l]$, durch die analytische Lösung der RWA !

$\boxed{17^\star}$ Bestimmen Sie den Wärmeeintrag $\lambda_z u'(0+) = ?$ in das Haus und diskutieren Sie das erhaltene Resultat !