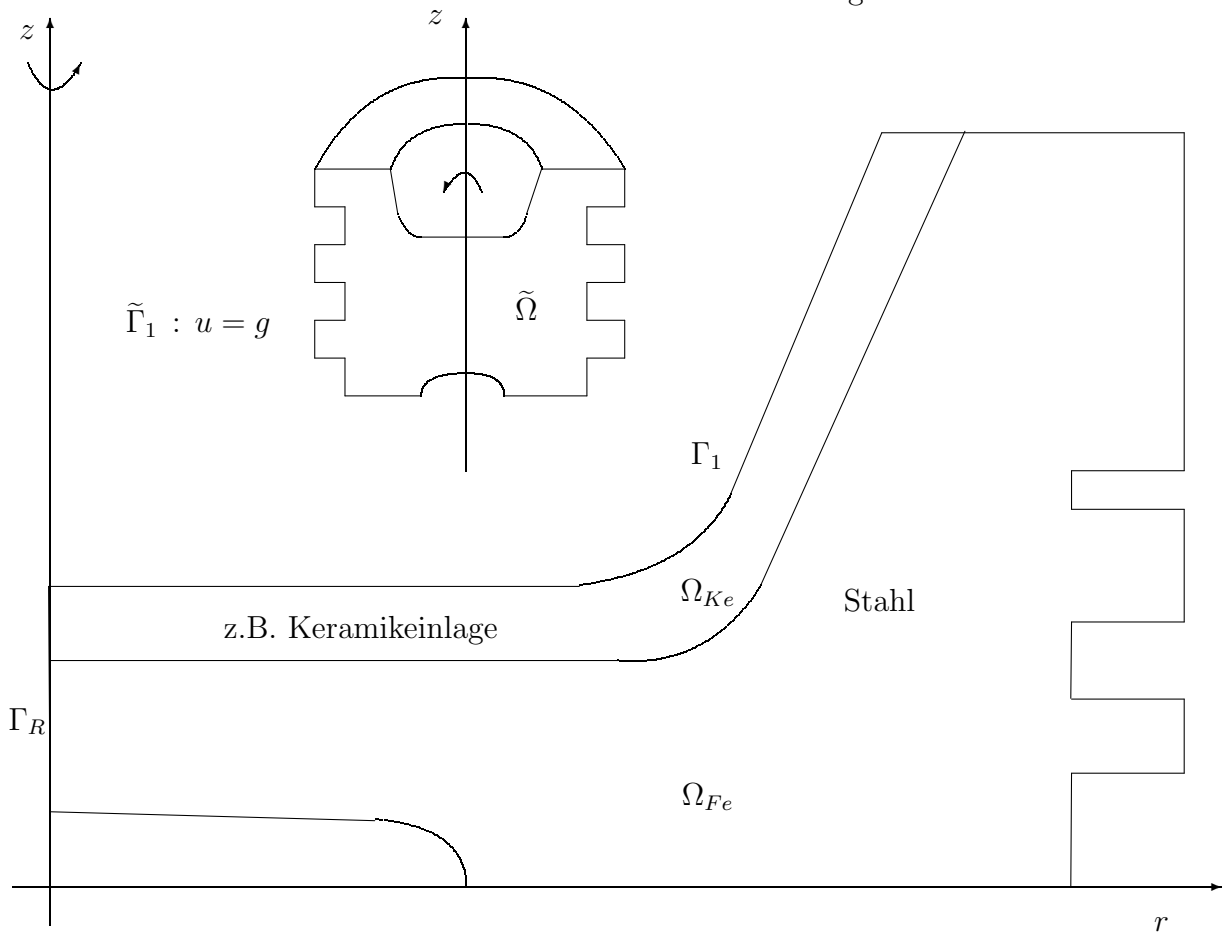
P II 6.11. 2003 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{45}}$ Uhr; Raum : T 711): 7 – 9

1.4 Weitere 1D und 2D Spezialfälle

1.4.1 Rotationssymmetrische Wärmeleitprobleme mit φ-unabhängigen Daten

○ Modellproblem "*Kolben*" : Betrachten das Wärmeleitprobleme für den Oberteil des Kolbens eines Verbrennungsmotors



unter den Voraussetzungen :

1) $\overline{\widetilde{\Omega}} = \overset{z}{\underset{\varphi}{\updownarrow}}\overline{\Omega} := \left\{ (r,z,\varphi) : (r,z) \in \overline{\Omega},\ 0 \le \varphi \le \pi \right\} = \overline{\Omega} \times [0, 2\pi)$

2) Daten $\{ \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 , f , g , \dots \}$ sind φ unabhängig,

wobei (x_1, x_2, x_3)-Kartesische Koordinaten,
(r, z, φ) -Zylinderkoordinaten sind.

Die gesuchte Temperaturverteilung $u(x_1, x_2, x_3) = u(r, z)$ ist somit φ-unabhängig!

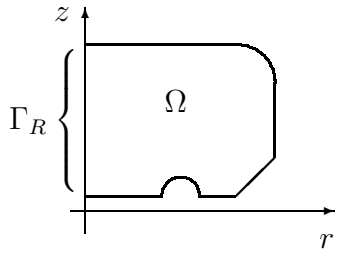
7 Man schreibe die Wärmeleitgleichung

$$
\left.
\begin{array}{l}
-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \;=\; f(x) \quad x \in \widetilde{\Omega} \\
\text{mit den Randbedingungen} \\
u \;=\; g_1 \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_1 \;=\; \Gamma_1 \times [0, 2\pi) \\
-\lambda\frac{\partial u}{\partial n} \;=\; g_2 \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_2 \;=\; \Gamma_2 \times [0, 2\pi) \\
-\lambda\frac{\partial u}{\partial n} \;=\; \alpha(u - g_3) \quad \text{auf} \quad \widetilde{\Gamma}_3 \;=\; \Gamma_3 \times [0, 2\pi)
\end{array}
\right\} \qquad (1.1)
$$

für den rotationssymmetrischen Fall $\overline{\widetilde{\Omega}} = \overline{\Omega} \times [0, 2\pi)$ mit φ-unabhängigen Eingangsdaten $\{\lambda, f, g_i, \alpha\}$ auf, d.h. durch den Übergang von den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zu den Zylinderkoordinaten (r, z, φ)

$$x_1 \;=\; r\cos\varphi\,, \quad x_2 \;=\; r\sin\varphi\,, \quad x_3 \;=\; z$$

kann der 3D RWA in $\widetilde{\Omega} \subset \mathbf{R}^3$ eine 2D RWA im Meridiangebiet Ω zugeordnet werden. Unterscheiden Sie die Fälle $\Gamma_R \neq \emptyset$ (Rbd. auf Γ_R !) und $\Gamma_R = \emptyset$ (Gebiet mit Loch).

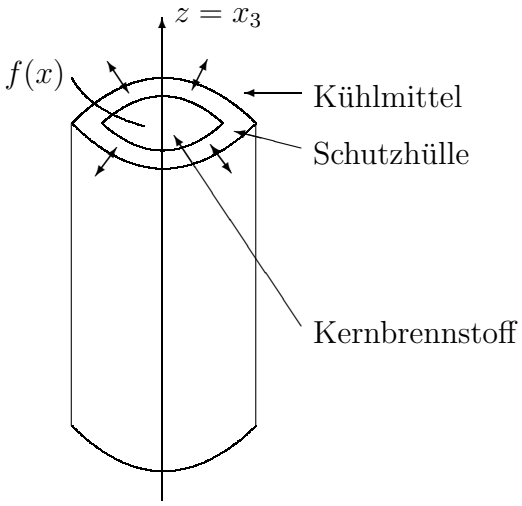


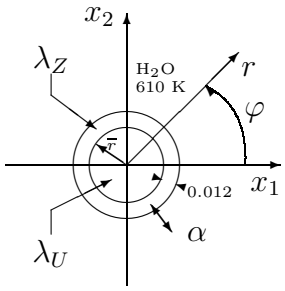
8 Man schreibe die differentielle Form der Wärmeleitgleichung für das Modellproblem "*Kolben*" im Meridiangebiet (2D) auf ! Beachten Sie das Vorhandensein eines Interfaces zwischen Stahl und Keramikeinlage (Interface-Bedingung) !

1.4.2 Rotationssymmetrische Wärmeleitprobleme mit φ- und z-unabhängigen Eingangsdaten

◯ Modellproblem "*KKW Temelin*":

In nuclear power reactors the fuel (= uranium dioxide) is in the form of cylindrical pellets contained in long metal (zirconium alloy) tubes. The nuclear reaction causes heat to be generated in the fuel. This heat is then conducted through the wall of the metal tube into a cooling fluid (= water). The heated water is used to produce steam that is supplied to turbines which turn electric generators.
Consider a model of a fuel rod in which the pellets have a radius $\overline{\mathbf{r}}$ of 0.095 m and in which the **wall thickness** is 0.012 m. Let the **conductivity of the fuel** be $3\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\right]$ and that of the **tube** $17\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\right]$. Assume that the heat generation in the fuel is given by $f(r) = 7.6\ 10^8\,(1-(r/\overline{r})^2)\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right]$. Let the **cooling water temperature** be 610 K and the **heat transfer coefficient** between the tube and the water be $3.5\ 10^5\ \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}\right]$.





$\lambda_U = 3$ W/mK
$\lambda_Z = 17$ W/mK
$\alpha = 3.5 \cdot 10^5$ W/m^{2}K
$\overline{r} = 0.095$ m

Es gelten die Voraussetzungen

1) $\overline{\widetilde{\Omega}} = \{\,(r,z,\varphi) : 0 \le r \le r_0\,,\ -l \le z \le +l\,,\ 0 \le \varphi < \Pi\,\}$ mit $l \gg r$.

2) Daten $\{\lambda, f, g, \alpha\}$ sind φ- und z-unabhängig.

Die gesuchte Temperaturverteilung kann somit sowohl φ- als auch z-unabhängig angenommen werden ($\rightsquigarrow u(x_1,x_2,x_3) = u(r)$) !

9 Man schreibe die differentielle Form der Wärmeleitgleichung für das Modellproblem "*KKW Temelin*" auf (beachte Interface zwischen Schutzhülle und Kernbrennstab) und löse die entsprechende 1D RWA analytisch !
Die analytische Lösung $u(r) = ?$ dient später als Referenzlösung in numerischen Tests (explizite Beurteilung des Diskretisierungsfehlers etc. !).