P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS I 30.10. 2003 (Zeit : $10^{\underline{15}} - 11^{\underline{45}}$ Raum : T 711): $\boxed{1}$ - $\boxed{6}$

1 Wärmeleit- und Wärmetransportprobleme

1.1 Analytische Hilfsmittel

$\boxed{1}$ Man zeige, daß

a)

$$\lim_{\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3 \to 0} \frac{1}{\triangle x_1 \triangle x_2 \triangle x_3} \int\limits_{x_1 - \frac{\triangle x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\triangle x_1}{2}} \int\limits_{x_2 - \frac{\triangle x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\triangle x_2}{2}} \int\limits_{x_3 - \frac{\triangle x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\triangle x_3}{2}} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_3\, d\xi_2\, d\xi_1 \quad = \quad f(x_1, x_2, x_3)$$

gilt, falls $f \in C(\Omega)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$,

b)

$$\lim_{\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3 \to 0} \frac{1}{\triangle x_1 \triangle x_2 \triangle x_3} \int\limits_{x_2 - \frac{\triangle x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\triangle x_2}{2}} \int\limits_{x_3 - \frac{\triangle x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\triangle x_3}{2}} \Big[\sigma(x_1 + \frac{\triangle x_1}{2}, \xi_2, \xi_3)$$

$$- \sigma(x_1 - \frac{\triangle x_1}{2}, \xi_2, \xi_3) \Big]\, d\xi_3\, d\xi_2 \quad = \quad \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_1}$$

gilt, falls $\sigma \in C^1(\Omega)$.

c) Wie kann man die Voraussetzungen an f in a) bzw. an σ in b) abschwächen ?

1.2 Analytische Lösung und Parameterstudien

$\boxed{2}$ Berechnen Sie analytisch das Temperaturfeld $u(\cdot)$ gemäss der Wärmeleitgleichung $(1.5)_{V0}$ aus der Vorlesung für die Daten:
$a = 0, b = 1, \eta \in (0,1)$ fix, $q = 0, f = 0, g_a = 0, g_b = 1$ und

$$\lambda(x) := \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & \text{const} > 0 \text{ für } x < \eta \\ \lambda_2 & = & \text{const} > 0 \text{ für } x > \eta \end{array} \right\}$$

mit $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$!
Führen Sie Parameterstudien mit dem Wärmeleitkoeffizienten durch:

a) $\lambda_1 \longrightarrow \infty$

b) $\lambda_2 \longrightarrow 0$

$\boxed{3}$ Wir betrachten wieder das Wärmeleitproblem aus $\boxed{2}$ aber jetzt mit freiem Wärmeübergang am rechten Randpunkt $x = b = 1$:

$$\lambda_2 u'(b) = \alpha(u(b) - 1)$$

mit einer positiven Wärmeübergangszahl α. Berechnen Sie wieder analytisch das Temperaturfeld $u(\cdot)$ und führen Sie jetzt Parameterstudien mit der Wärmeübergangszahl α durch:

a) $\alpha \longrightarrow \infty$

b) $\alpha \longrightarrow 0$

$\boxed{4}$ Bestimmen Sie die von einem (fixierten) Parameter $y \in (0,1)$ abhängige Lösung $u_y(\cdot)$ der Randwertaufgabe (Wärmeleitproblem mit Punktquelle)

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \delta(x,y),\ x \in (0,1) \qquad (f_y = 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass

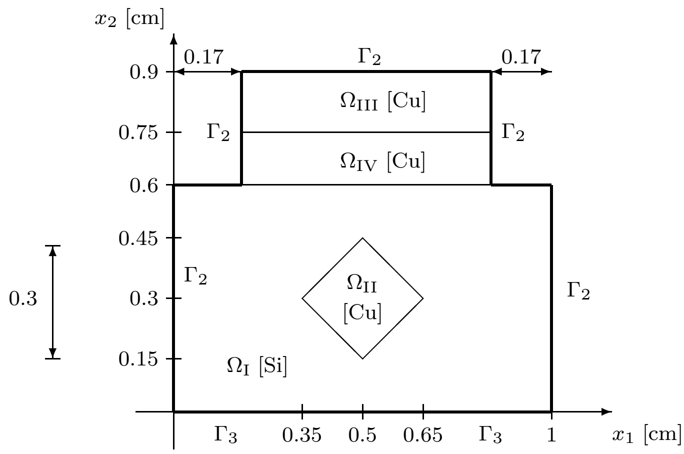
$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y) dy,\ x \in [0,1]$$

mit $G(x,y) := u_y(x)$ die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ x \in (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

1.3 Wärmeleitung in einer dünnen Platte

○ **Physikalisches Problem :** Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{III}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}}$, in einer dünnen Platte „CHIP“ der Art



mit einer Plattendicke von $d = 0.01$ cm und mit den Daten

– Wärmeleitkoeffizienten

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isotrop}}}{=} \lambda(x) := \begin{cases} \lambda_{\mathrm{Si}} = 0.01 \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}\,K}\right], & x \in \bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \\ \lambda_{\mathrm{Cu}} = 3.95 \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}\,K}\right], & x \in \bar{\Omega}_{\mathrm{II}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{III}} \cup \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}} \end{cases}$$

– $a \equiv 0$ (kein Wärmeaustausch in z-Richtung),

- Wärmequellen:

$$f(x) := \begin{cases} 0, \;\; x \in \Omega_{\mathrm{I}} \cup \Omega_{\mathrm{III}}, \\ 2^k \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}^3}\right], \;\; x \in \Omega_{\mathrm{II}}, \\ -0.4545454 \cdot 2^k \left[\dfrac{W}{\mathrm{cm}^3}\right], \;\; x \in \Omega_{\mathrm{IV}}, \end{cases}$$

  wobei k = letzte Ziffer der Matrikelnummer $\in \{0, 1, \ldots, 9\}$,

- Randbedingungen (RB) auf $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$:
  1. $\Gamma_1 = \emptyset$ (keine RB 1. Art),
  2. $\bar{\Gamma}_2 = \Gamma \setminus \Gamma_3$: $\dfrac{\partial u}{\partial N} = g_2 := 0$ auf Γ_2,
  3. $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) \,|\, 0 < x_1 < 1, \; x_2 = 0\}$: $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \alpha(g_3 - u)$ auf Γ_3

     mit $g_3 = 300\,K, \;\; \alpha = 0.2\,[W/(\mathrm{cm}^2\,K)]$.

$\boxed{5}$ Man leite die stationäre Wärmeleitgleichung zur Bestimmung der Temperaturverteilung $u(x)$ in der **integralen Form** (= Bilanzform) her !

$\boxed{6}$ Geben Sie die **klassische Formulierung** (d.h. PDgl. in Ω_{I}, Ω_{II}, Ω_{III} und Ω_{IV}; Interfacebedingungen auf $\bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{II}}$ und $\bar{\Omega}_{\mathrm{I}} \cap \bar{\Omega}_{\mathrm{IV}}$; Randbedingungen) und die **Variationsformulierung** in der Form

$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u, v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h.,} \quad & \mathbf{V}_g = ? \\ & \mathbf{V}_0 = ? \\ & a(u, v) = ? \\ & < F, v > = ? \end{aligned}$$

an !