

3 Strömungsmechanik

3.1 Transport-Theorem

27 Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 1$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(F \cdot v)}{\partial x}(x, t) \right] dx \quad !$$

28 Die Vektorfunktion $\varphi : \Omega(t_0) \times (T_1, T_2) \longrightarrow R^d$ bildet die Lagrange-Koordinaten (X, t) auf die Euler-Koordinaten (x, t) ab, d.h. $x = \varphi(X, t)$. Man zeige für $d = 2$ (für $d = 3$ gibt es ein Extrakreuzel !) die Beziehung

$$\frac{\partial D}{\partial t}(X, t) = D(X, t) \operatorname{div}(v(x, t)),$$

wobei D die Determinante der Jacobi-Matrix der Abbildung φ ist, d.h.

$$D(X, t) = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(X, t) \right).$$

29* Beweisen Sie das Transport-Theorem (Satz 3.1) für den Fall $d = 2$ bzw. $d = 3$, d.h. die Formel

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(F \cdot v)(x, t) \right] dx \quad !$$

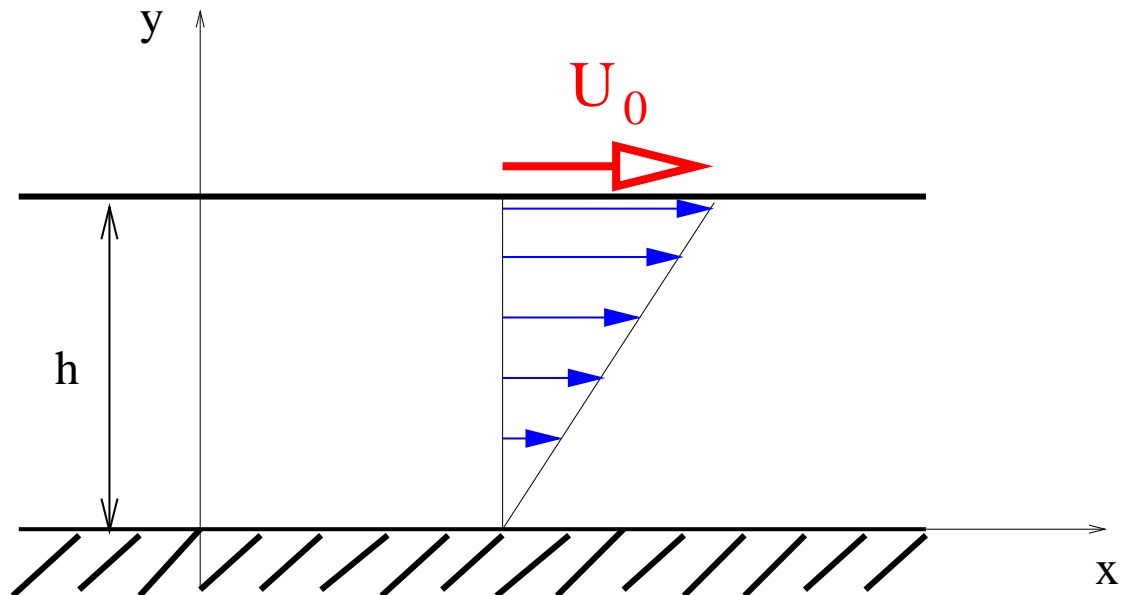
3.2 COVETTE - Strömung

○ Präsentationsaufgaben:

30* Man berechne das ebene (die Platten seien in Querrichtung genügend weit ausgedehnt) Strömungsfeld eines inkompressiblen Newtonschen Fluids zwischen zwei Platten, wobei sich eine Platte mit der konstanten Geschwindigkeit $U_0 > 0$ parallel zur anderen Platte bewegen möge (siehe Skizze). Die Strömung sei zeitlich und räumlich voll ausgebildet. Bei welcher H_a - Zahl

$$H_a = \frac{-\frac{dp}{dx}(2h)^2}{U_0 \mu}$$

tritt (bezüglich aus der Skizze ersichtlichen x -Richtung (x_1 -Richtung)) teilweise Rückströmung auf ?



Hinweise:

1. Gehen Sie von den 3D Navier-Stokes Gleichungen aus:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = f_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = f_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

2. Vereinfachen Sie dann diese Gleichungen unter Berücksichtigung der Annahmen:
 - (a) Die Strömung sei zeitlich voll ausgebildet.
 - (b) Die Strömung sei räumlich voll ausgebildet.
 - (c) Die Strömung sei eben.
 - (d) $f := (f_x, f_y, f_z)^T = 0$.
3. Wie sich zeigt, hängt das Strömungsbild vor allem vom Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$ ab. Skizzieren Sie sich einige Geschwindigkeitsprofile und erklären Sie diese anschaulich !