Durchführbarkeit und Stabilität:

Satz 2.6:

Vor.: $|c_1| > 0$, $|c_n| >$

$|a_i| > 0$, $|b_i| > 0$ $\forall i = \overline{2, n-1}$, $|b_1| > 0$, $|a_n| > 0$

$$\left.\begin{array}{l} |c_i| \geq |a_i| + |b_i| \quad \forall i = \overline{2, n-1} \\ |c_1| \geq |b_1|, \quad |c_n| \geq |a_n| \end{array}\right\} (*)$$

wobei für wenigstens eine der Ungl. $(*)$

$|c_i| > |a_i| + |b_i|$, $|c_1| > |b_1|$, $|c_n| > |a_n|$

„>" gelten soll

Bh.: 1. $\Delta_i := c_i - a_i \alpha_i \neq 0$ $\forall i = \overline{1, n}$ (Durchführbarkeit)

2. $|\alpha_i| \leq 1$ $\forall i = \overline{2, n}$ (Stabilität)

Beweis: siehe Literatur bzw. (mms)* ■

Interpretation:

1. $\Delta_i \neq 0$ sichert Berechenbarkeit von α_{i+1} und β_{i+1}
2. $|\alpha_i| \leq 1$ sichert, daß Rundungsfehler, die in einem ...enschritt auftreten, beim Übergang zum ...ten Schritt **nicht** anwachsen:

$$\left.\begin{array}{l} u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} \\ \tilde{u}_i = \alpha_{i+1} (u_{i+1} + \delta_{i+1}) + \beta_{i+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_i := \tilde{u}_i - u_i = \alpha_{i+1} \delta_{i+1}$$

$$\boxed{|\delta_i| \leq \underbrace{|\alpha_{i+1}|}_{\leq 1} |\delta_{i+1}| \leq |\delta_{i+1}| \qquad i = \overline{n-1 \, (-1) \, 1}}$$

$\delta_1 = \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \delta_n$

Angen.: $\alpha_i = 1.1$

$\Rightarrow \delta_1 = (1.1)^{n-1} \delta_n$, $n = 1000$ $\curvearrowright$ $(1.1)^{n-1} \approx 10^{41}$

Übung 2.7:

Man zeige, daß die Vor. von Satz 2.6 durch die Systemmatrix K_n des GS $(\underline{2})_h$ erfüllt sind!