DIE LEONARDO-BRÜCKE

Mathematische und praktische Aktivitäten rund um die Leonardo-Brücke

Hans Humenberger

universität wien

Fakultät für Mathematik

Leonardo da Vinci (1452 – 1519)

Maler,
Bildhauer,
Architekt,
Mechaniker,
Ingenieur,
Erfinder,
Naturphilosoph,
usw.

Genie!

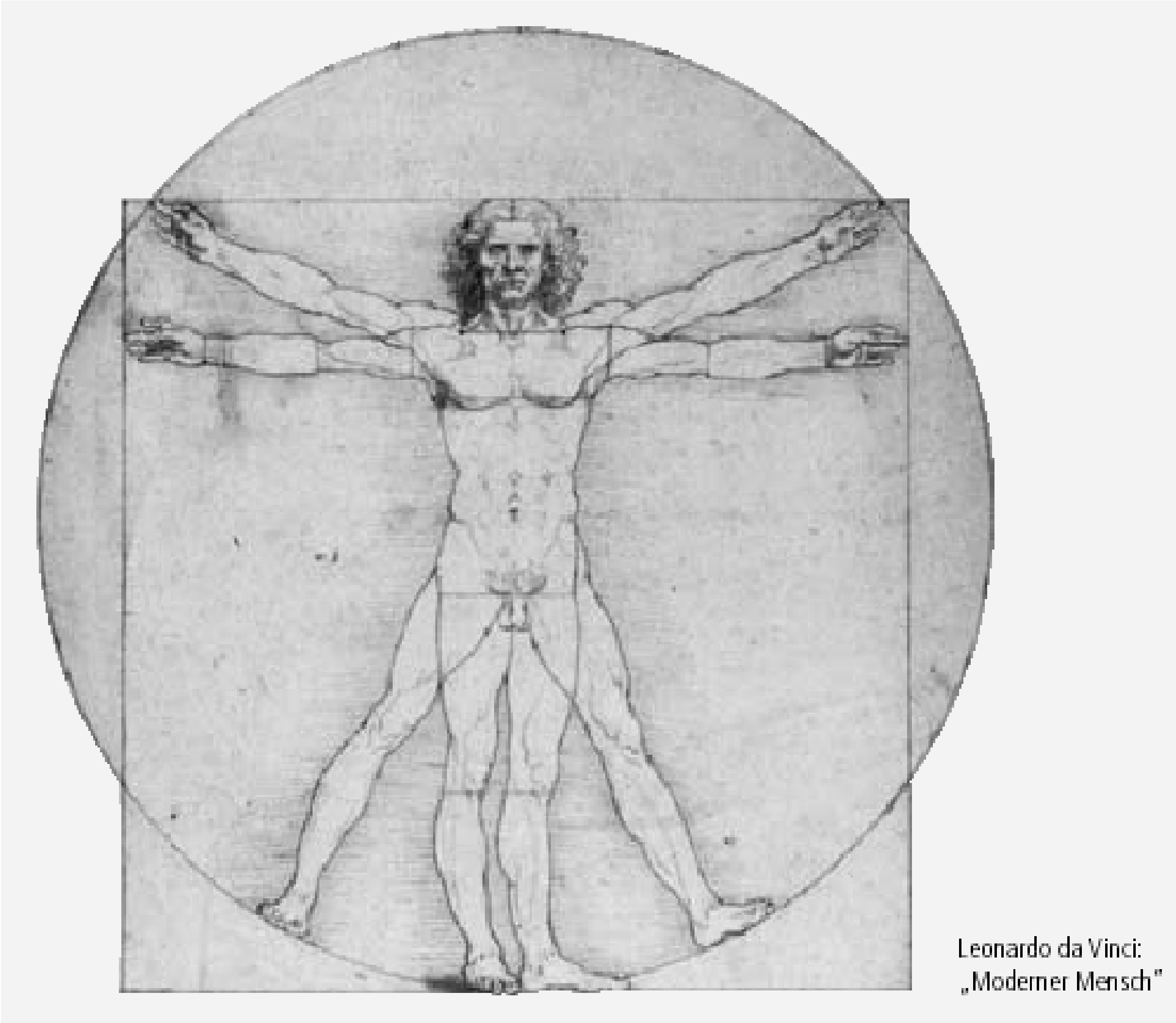
Mona-Lisa

Louvre (Paris)

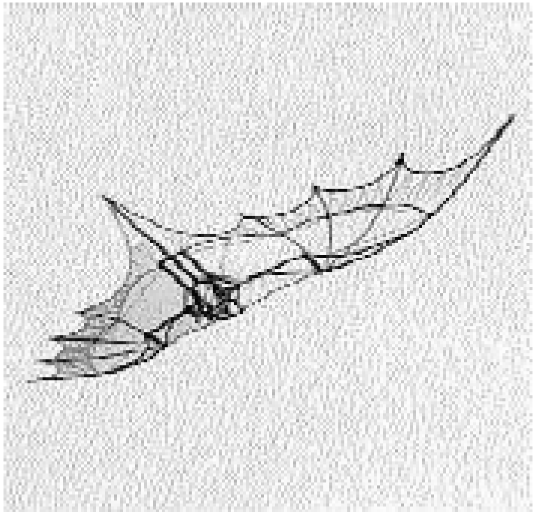
76,8 × 53 cm

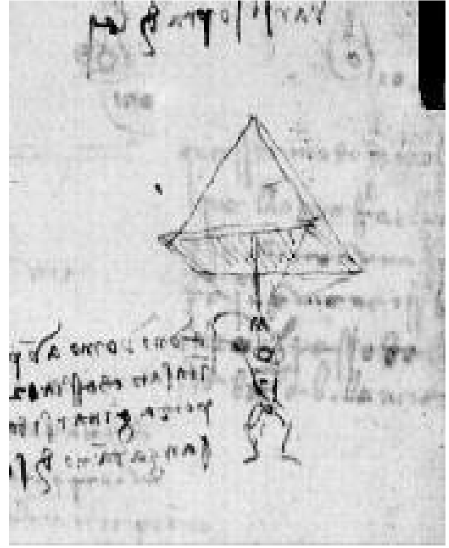
Ungefähre Entstehungszeit:

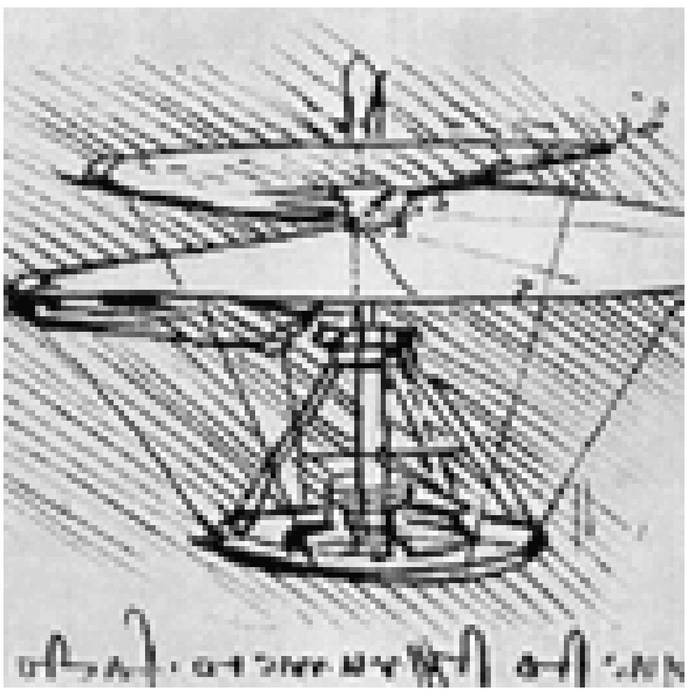
1502 – 1505

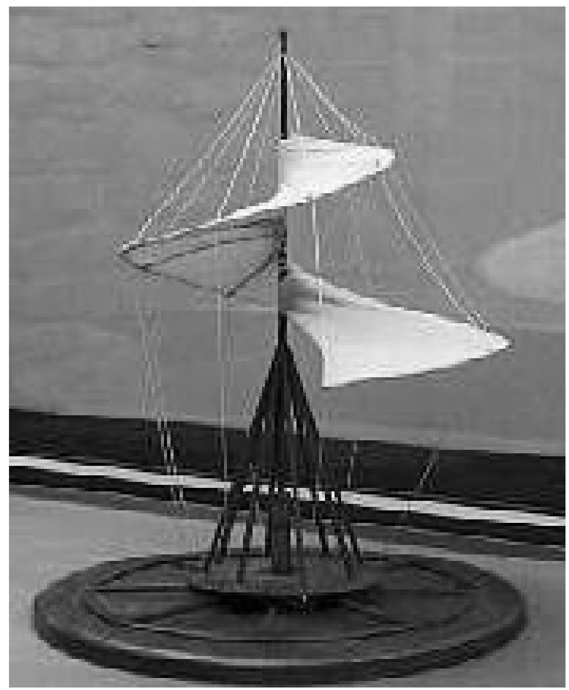


„Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung.“



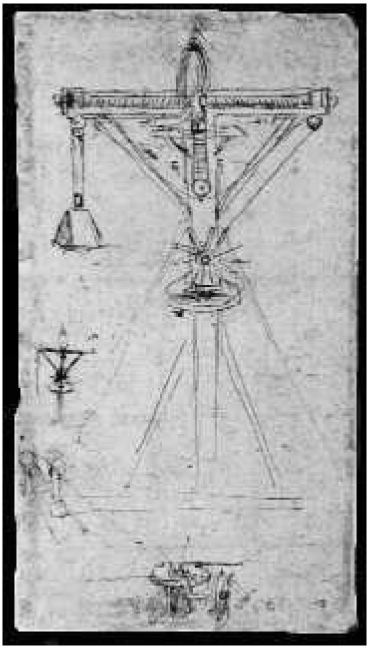


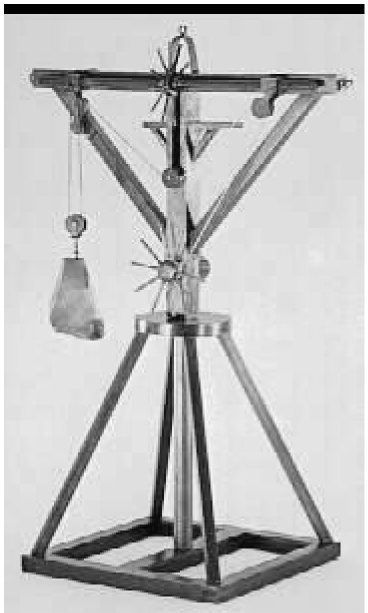


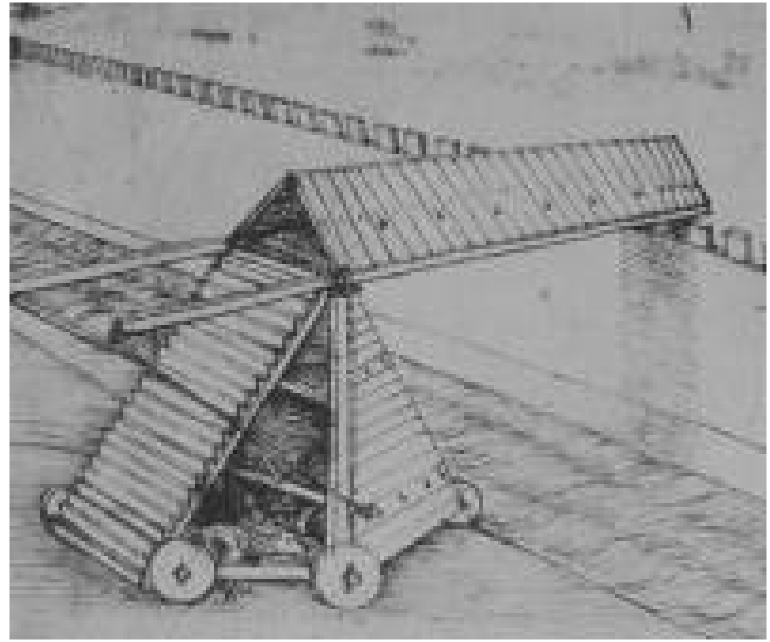


CODEX ATLANTICUS 1480 – 1518
(„Biblioteca Ambrosiana“ – Mailand)

Sammlung von 1119 (ursprünglich 1200) „Skizzen bzw. Blättern“ zu Erfindungen







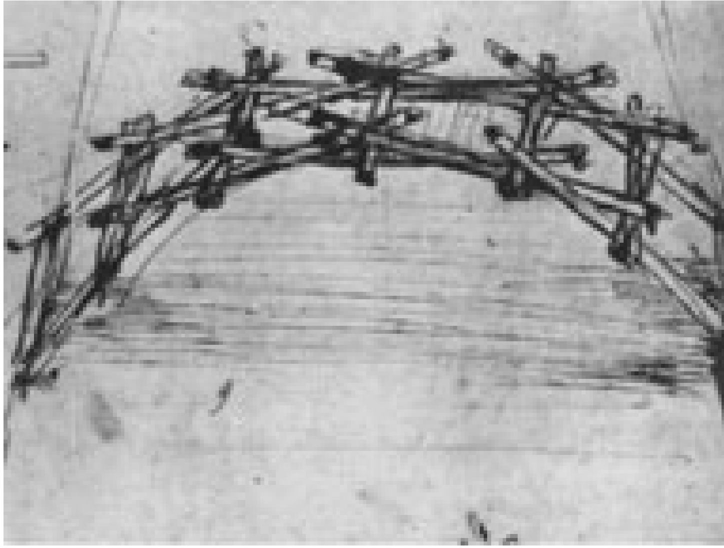
Faszinierende Modelle (Kräne, Flussbagger, etc.) im Leonardo-Museum in *Vinci* und in anderen Ausstellungen, z. B. Wien 2005

BRUCKEN

Brücke in *Castel del Rio,* ca. 1500, nahe Imola, 42 m Spannweite

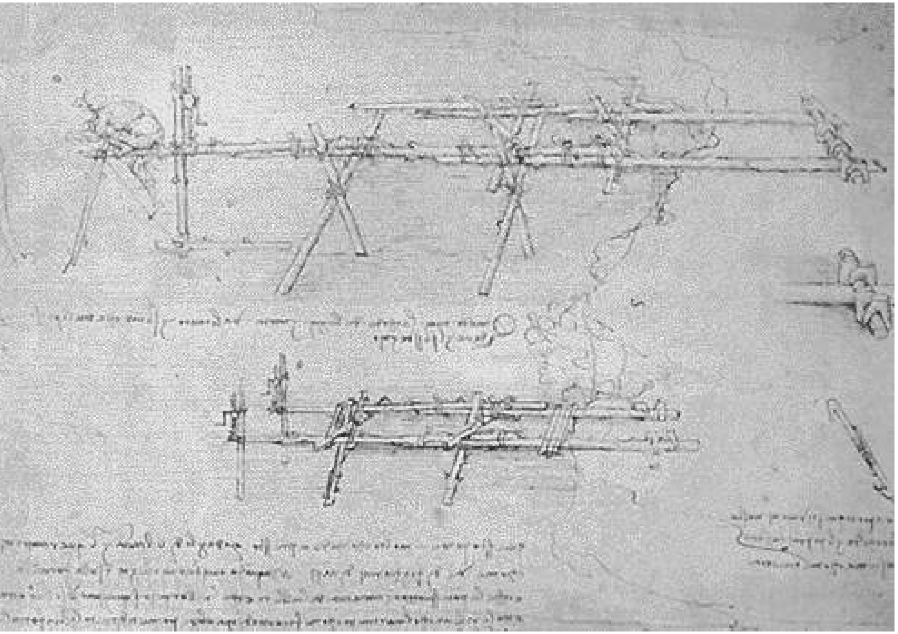
→ Planung einer Brücke mit 340 m Spannweite über das „Goldene Horn“ in Konstantinopel

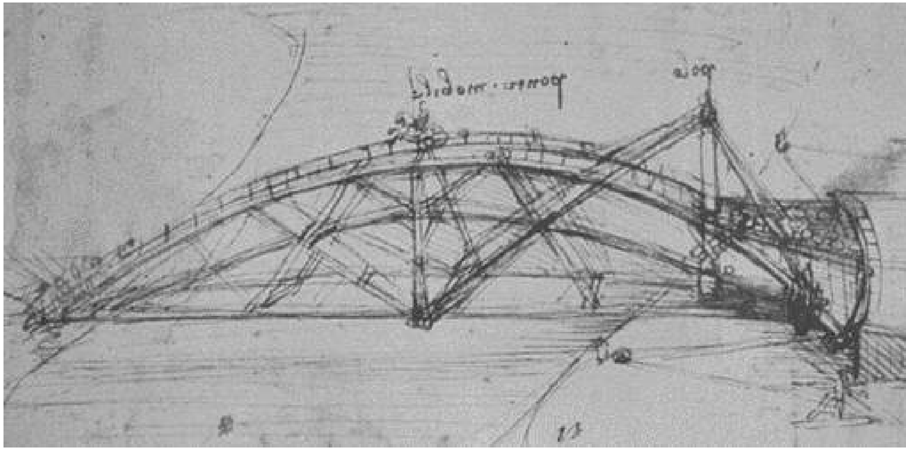
... Brücken, mit denen der Feind verfolgt und in die Flucht geschlagen werden kann, ...

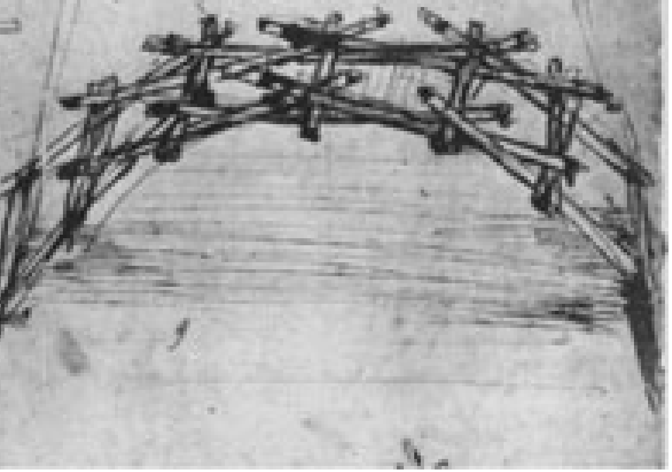


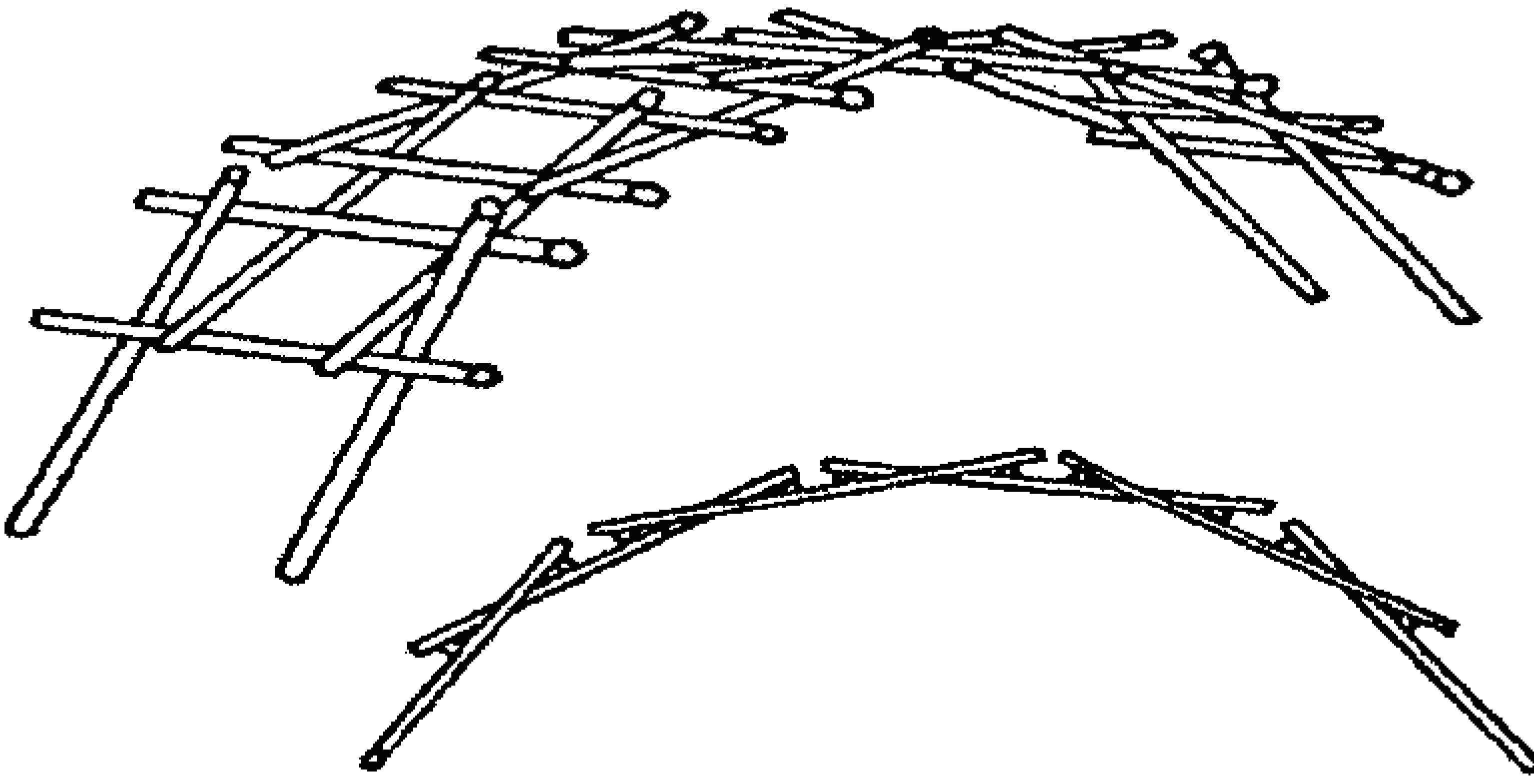
... Brücken, die Feuer und Kampfhandlungen standhalten und bequem gehoben und gesenkt werden können. ...

(Aus Leonardo da Vincis Bewerbungsschreiben an Ludovico da Sforza, Herzog von Mailand, 1483)







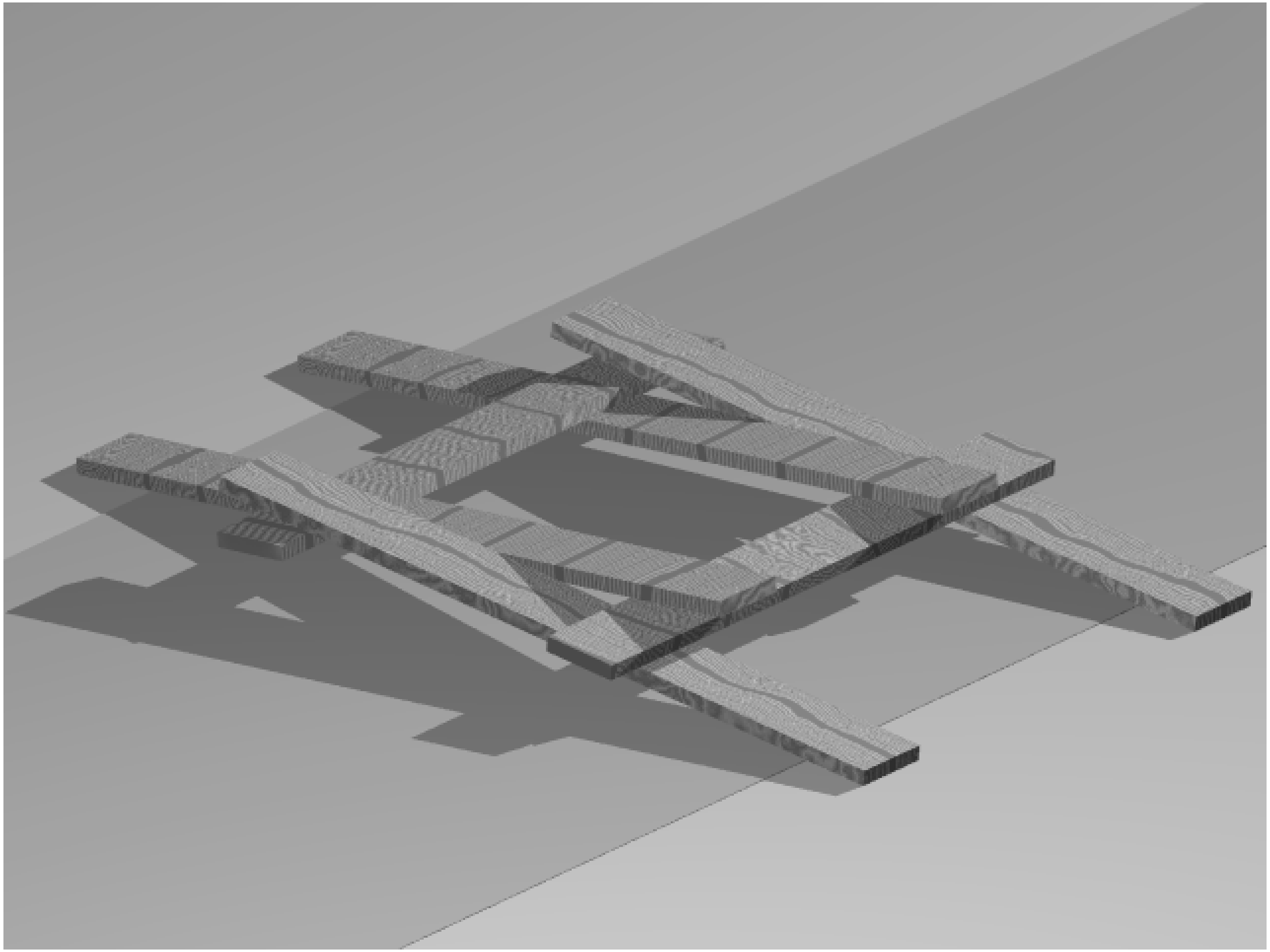


Bei Leonardo und hier:
Seile zur Befestigung

Kerben, Aussparungen
zur Halterung

Schulhof eines
Gymnasiums: Graz (Ö)

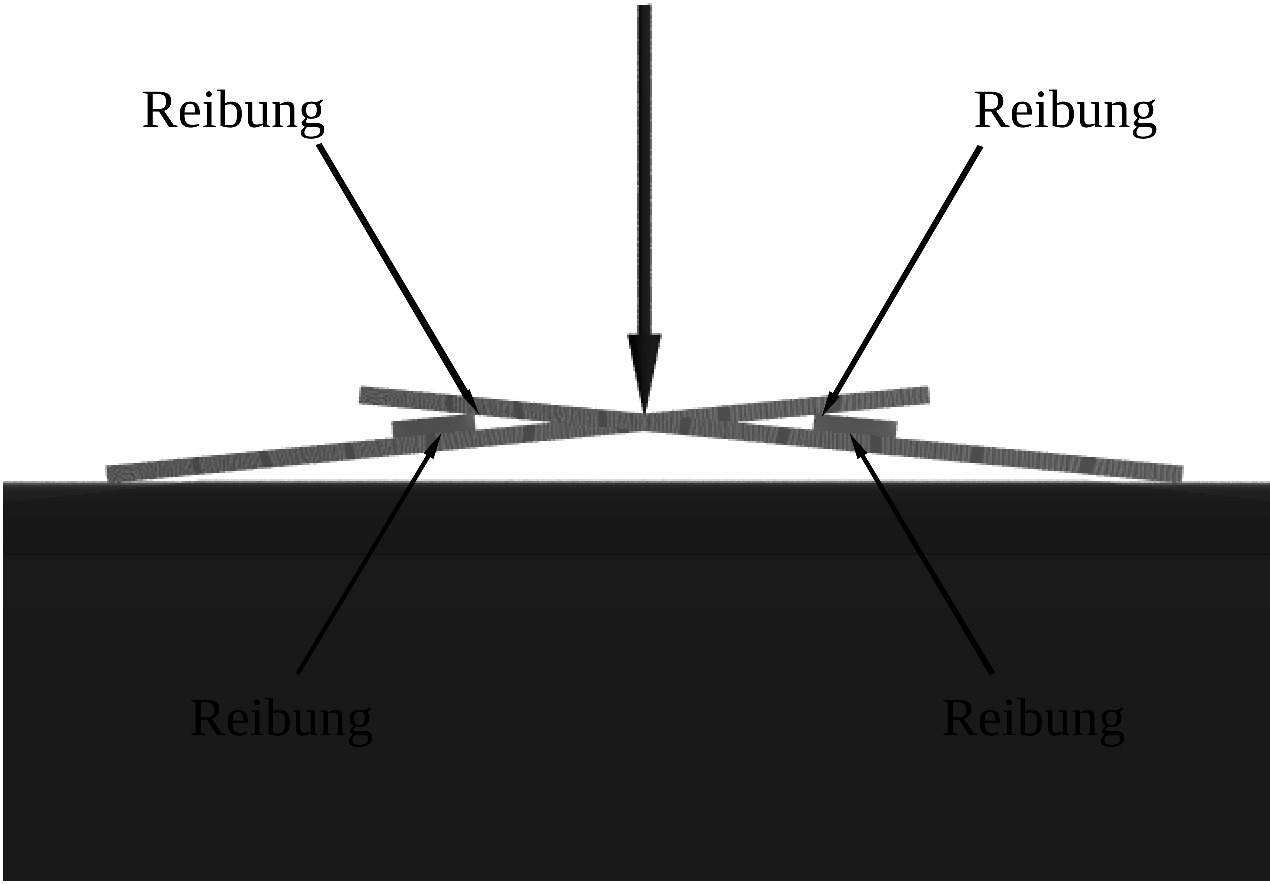
Beginn mit einer **kleinen** Brücke (Minimalversion besteht aus 2 „Brückengliedern“ bzw. 6 Brettern) . . .



Wegen der Reibung auch ganz ohne Befestigungen (Nägel, Schrauben, Seile, Kerben, Klemmen etc.):

Brettchen: rechteckiger Querschnitt

(statt: zylindrische Holzstämme)



. . . dann schrittweise Erweiterung

auf 3, 4, 5, 6 . . . „Brückenglieder“

Graz:

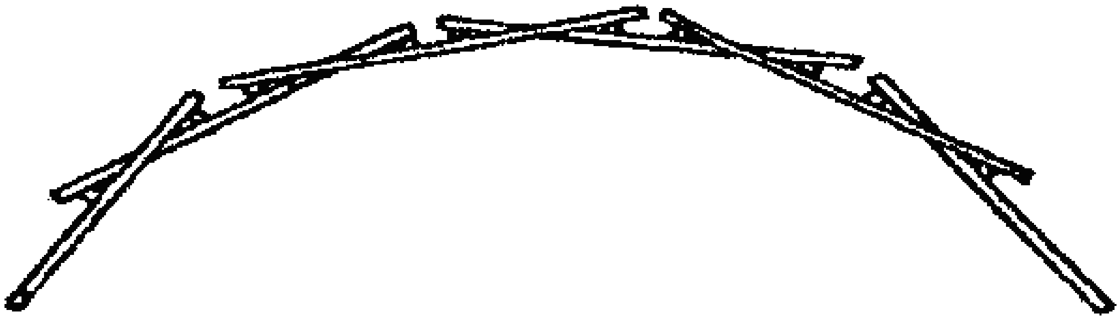
4 „Brückenglieder“

6 „Brückenglieder“

Viel elementare
Mathematik!

Erste interessante mathematische Fragestellung:

Wie viele Brettchen braucht man für eine Brücke mit 3, 4, 5, 6, . . . Brückengliedern?



Für jede weitere „Kreuzung“ (d. h. weiteres Brückenglied): 2 Quer- und 2 Längsbrettchen

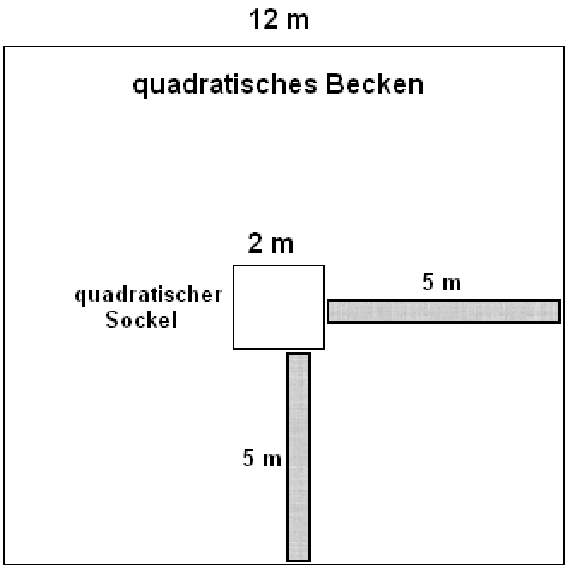
Je nach Altersstufe:

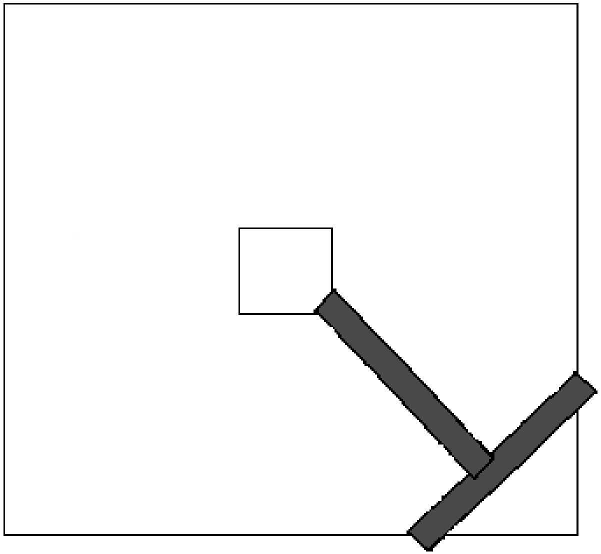
- Tabelle
- rekursive Beschreibung mit Worten oder Symbolen
- Explizite Formel: $4n-2$ Brettchen bei n Brückengliedern

Weitere Aufgaben mit Brettern

1) Sockel im Sprungbecken (Tiefe: 5 m)

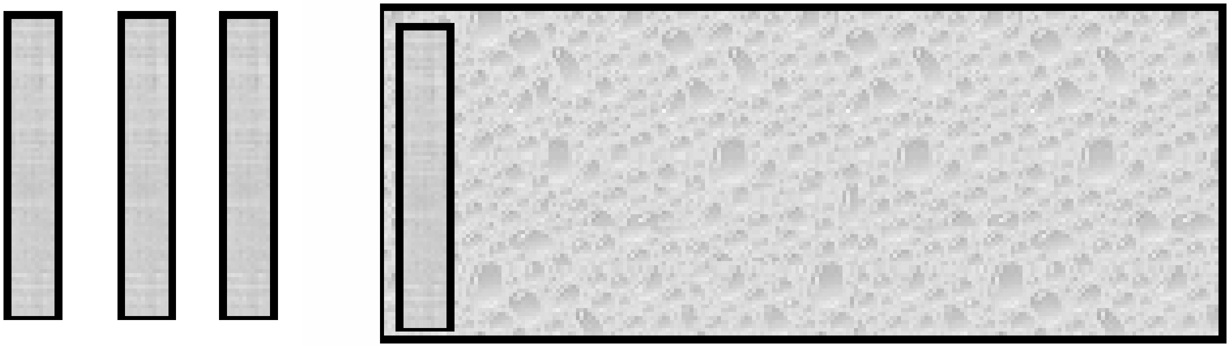
Auf dem Sockel für den Sprungturm liegt ein vergessener Hammer. Kann man mit zwei 5 m langen Pfosten auf den Sockel hinüberkommen? Wenn ja, wie? Bestätigung durch Rechnung!

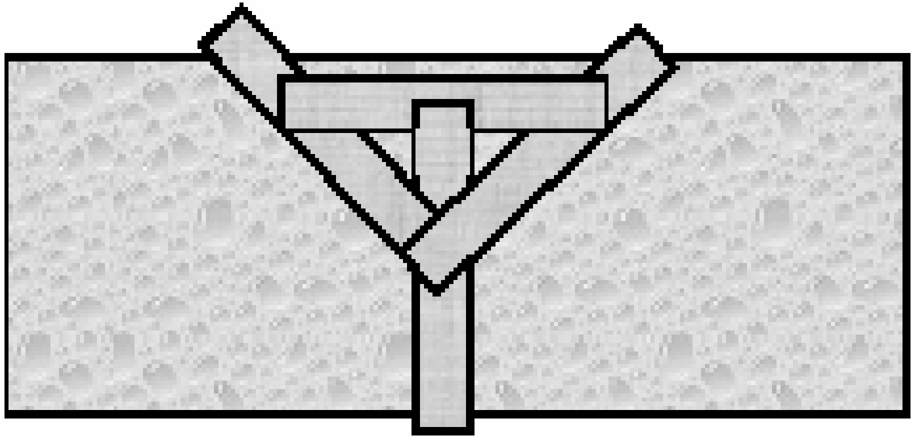




2) Grabenüberquerung mit 4 Brettern

Überbrückung eines Grabens; nur vier gleichlange Bretter zur Verfügung (gerade etwas kürzer als die Breite des Baches bzw. Grabens); was tun????

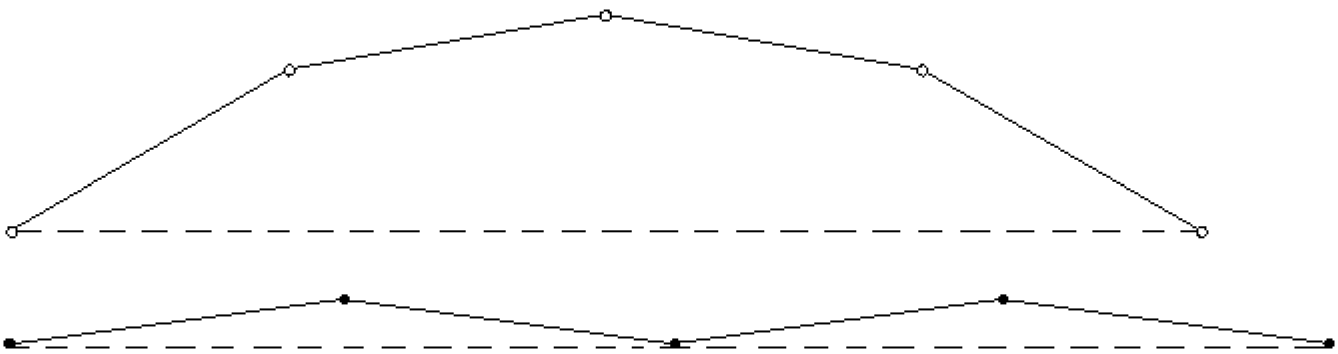




Mögliche Aktivitäten in der 1./2. Klasse

Praktisch zu beantwortende Frage – konkretes Bauen:

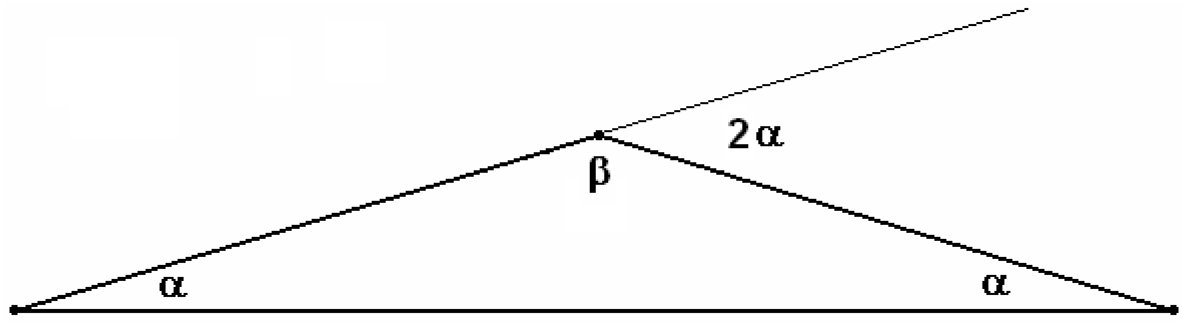
Brücke aus vielen Brettchen; aus demselben Baumaterial werden in derselben Weise zwei kleinere aneinander stoßende Brücken gebaut: wie weit kommt man dabei insgesamt (weniger, gleich, mehr)?



Idealisierte, d. h. bewusst vereinfachte Darstellung der Leonardo-Brücke:

Grundversion:

2 Brückenglieder



„Öffnungswinkel“: b

„Knickwinkel“: $180° - b = 2a$

a, b durch Bauweise steuerbar!

Dicke der Bretter

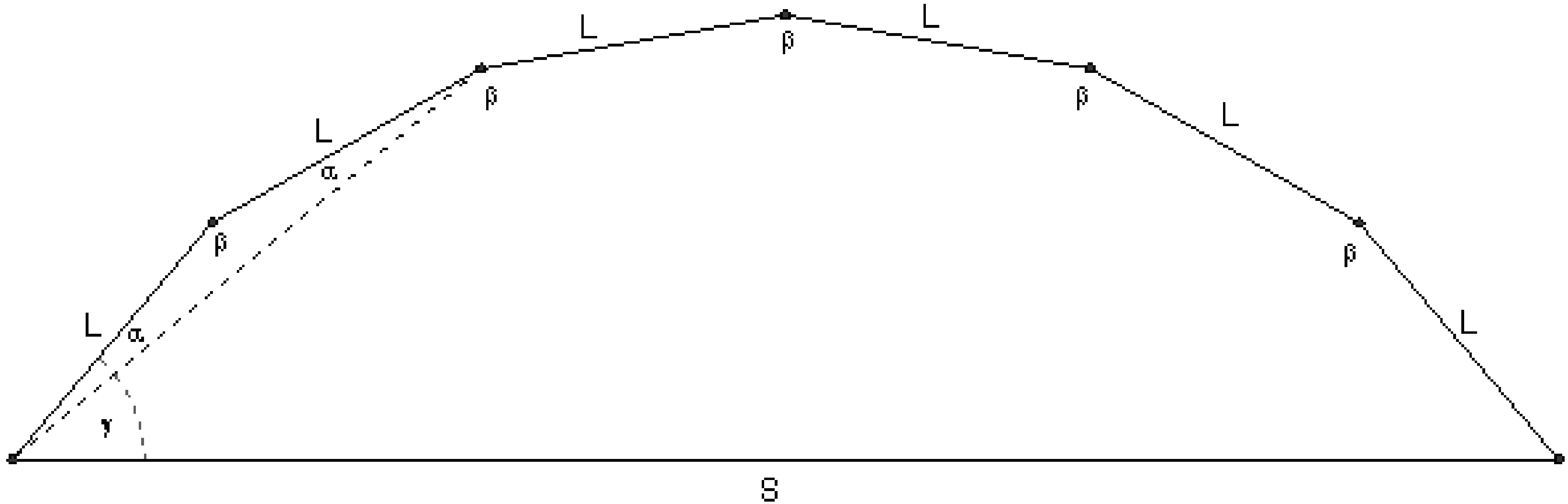
Geometrie der Kreuzung

bleiben außer Acht!

Damit möglich:

Frühe **zeichnerische** Auseinandersetzung mit dem Thema, mit und ohne DGS.

1./2. Klass

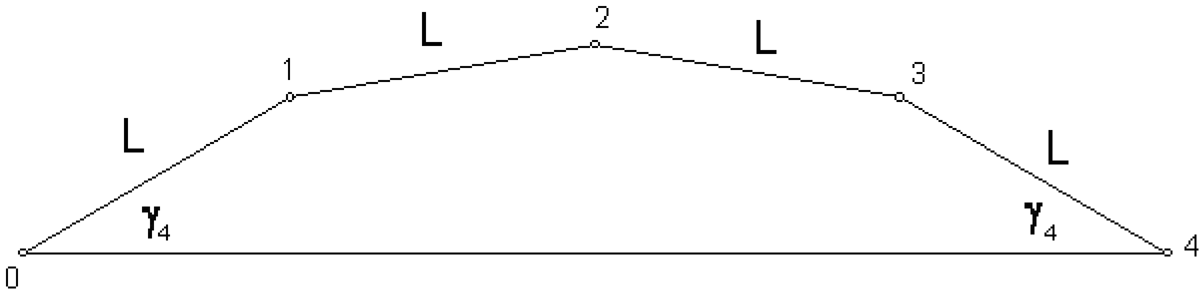


- Zeichne mit gegebenen Werten von *L* und b eine Leonardo-Brücke mit einer gegebenen Anzahl *n* von Gliedern: Anfangswinkel g ?
- *L* und b gegeben: Welche Anzahlen von Brückengliedern sind möglich bzw. sinnvoll? Was passiert bei „zu vielen“?
- *L* und b gegeben: Brücke mit größtmöglicher Spannweite?
- Zeichnen im vorgegebenen Maßstab:
  Spannweite und Höhe in der Wirklichkeit?
- etc.

<u>DGS</u>
<u>2./3.</u>
<u>Klass</u>

Mögliche Aktivitäten in der 3./4. Klasse

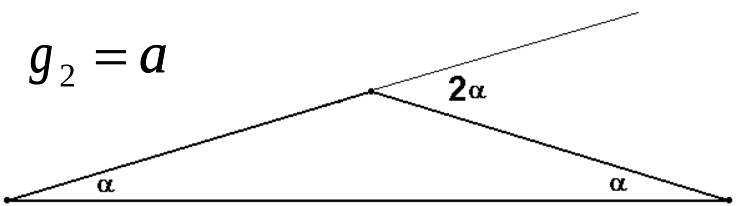
Der Anfangswinkel g_n bei n Brückengliedern:



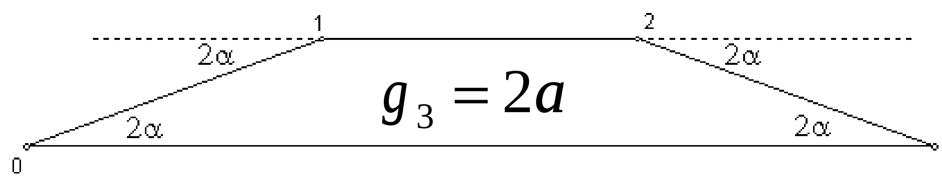
Auch durch Nachbauen klar: Anfangssteigung immer steiler, d. h. g_n immer größer, aber wie genau?

Klar:

$g_2 = a$

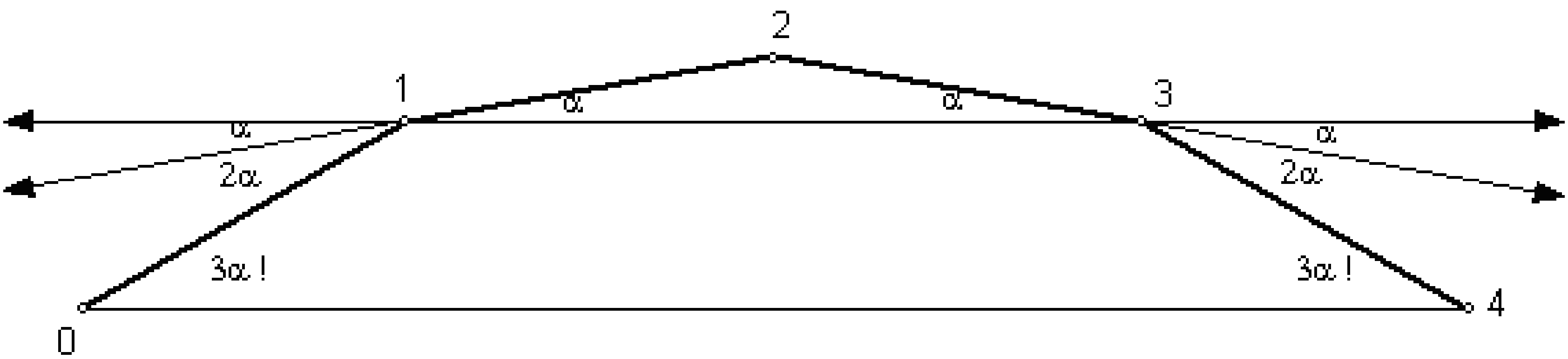


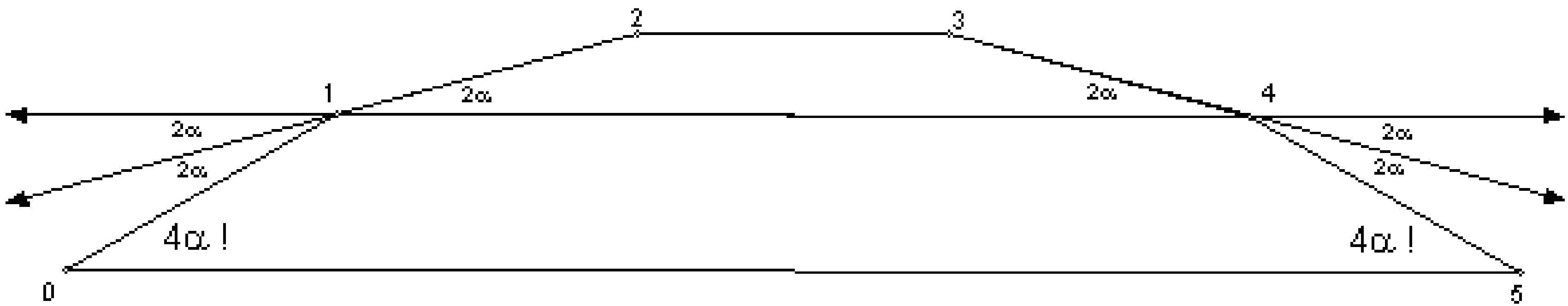
$g_3 = 2a$



Vermutung: $g_n = (n-1) \cdot a$

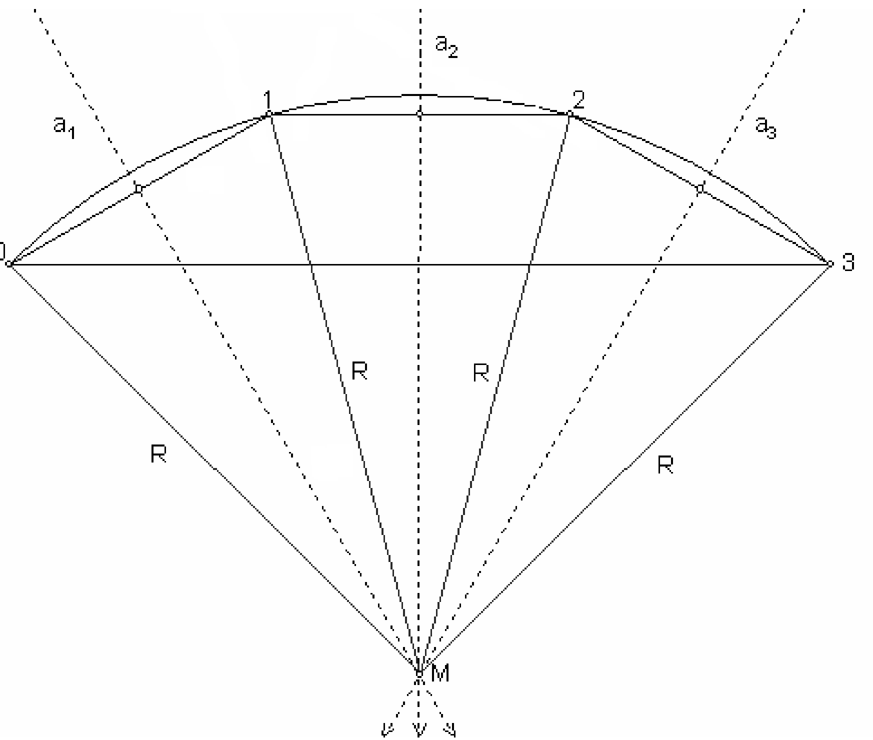
Begründung: bei jedem Doppelschritt kommt auf beiden Seiten der Knickwinkel $2a$ dazu:





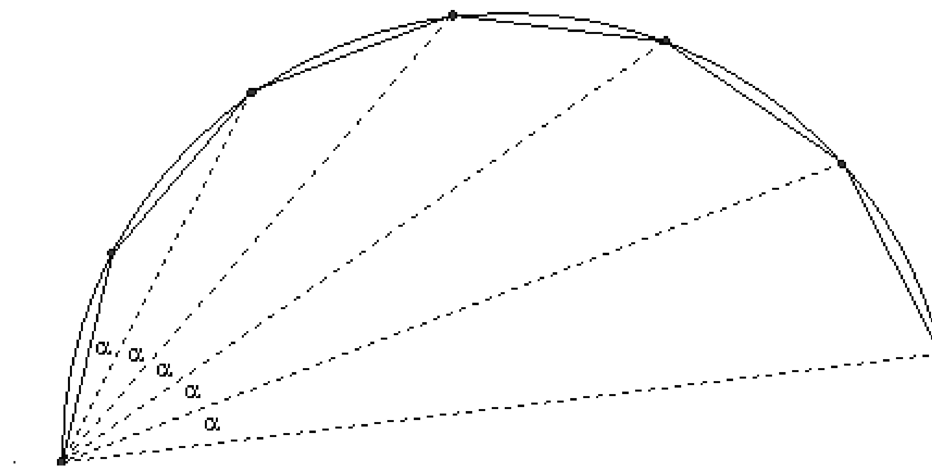
Eckpunkte einer vereinfachten Leonardo-Brücke

Liegen am Kreis(-bogen)?!



D. h.: Umkreis(012) = Umkreis(123)= Umkreis(234)= . . .

Damit und mit Peripheriewinkelsatz auch klar: $g_n = (n-1) \cdot a$

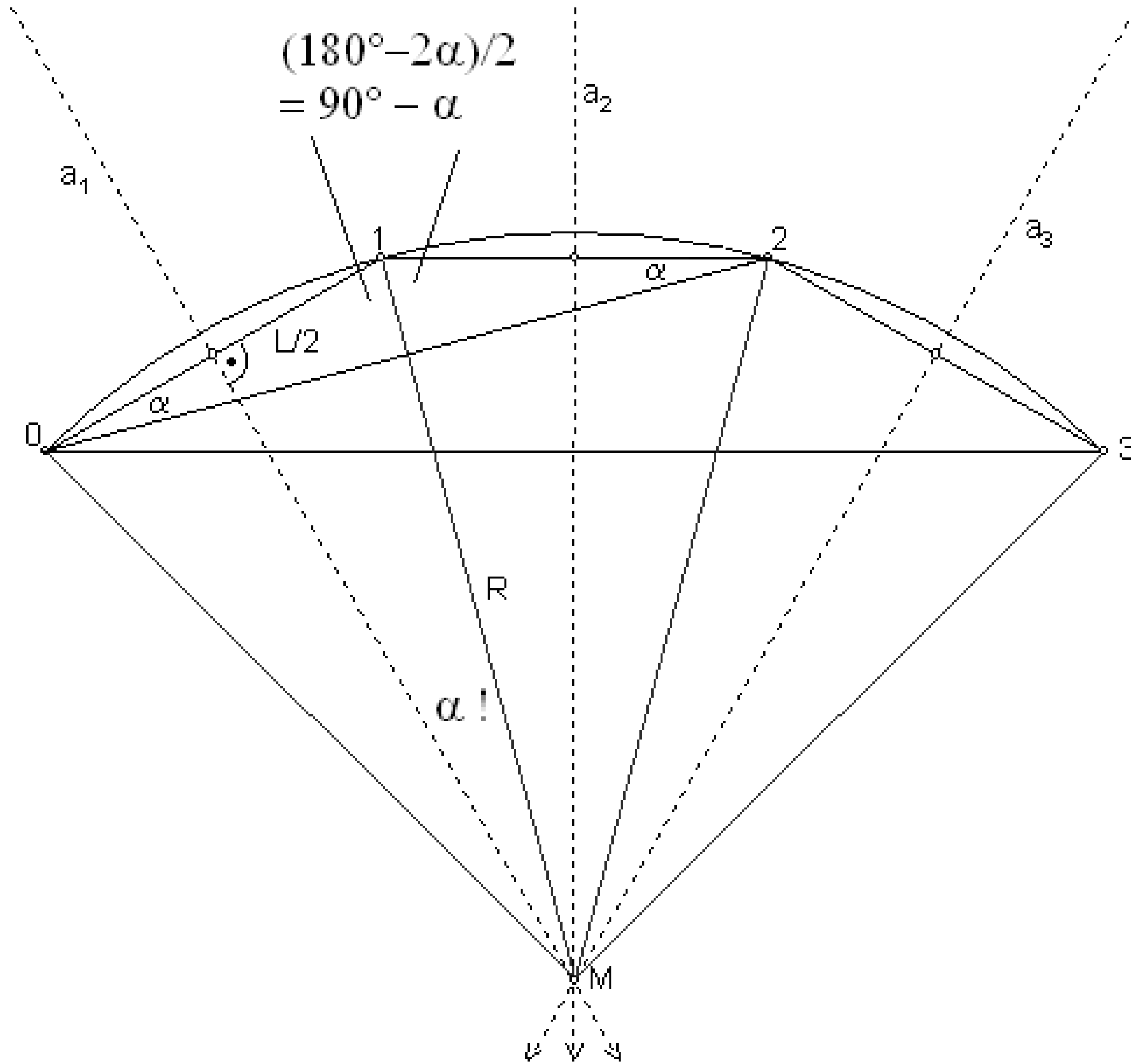


Mögliche Aktivitäten in der 5./6. Klasse

Trigonometrie,

Optimierung ohne

Differentialrechnung



Radius des

Umkreises?

$$R = \frac{L}{2\sin a}$$

Zentriwinkel jedes Brückengliedes:

$$2a$$

Nochmal: möglichst große Spannweite!

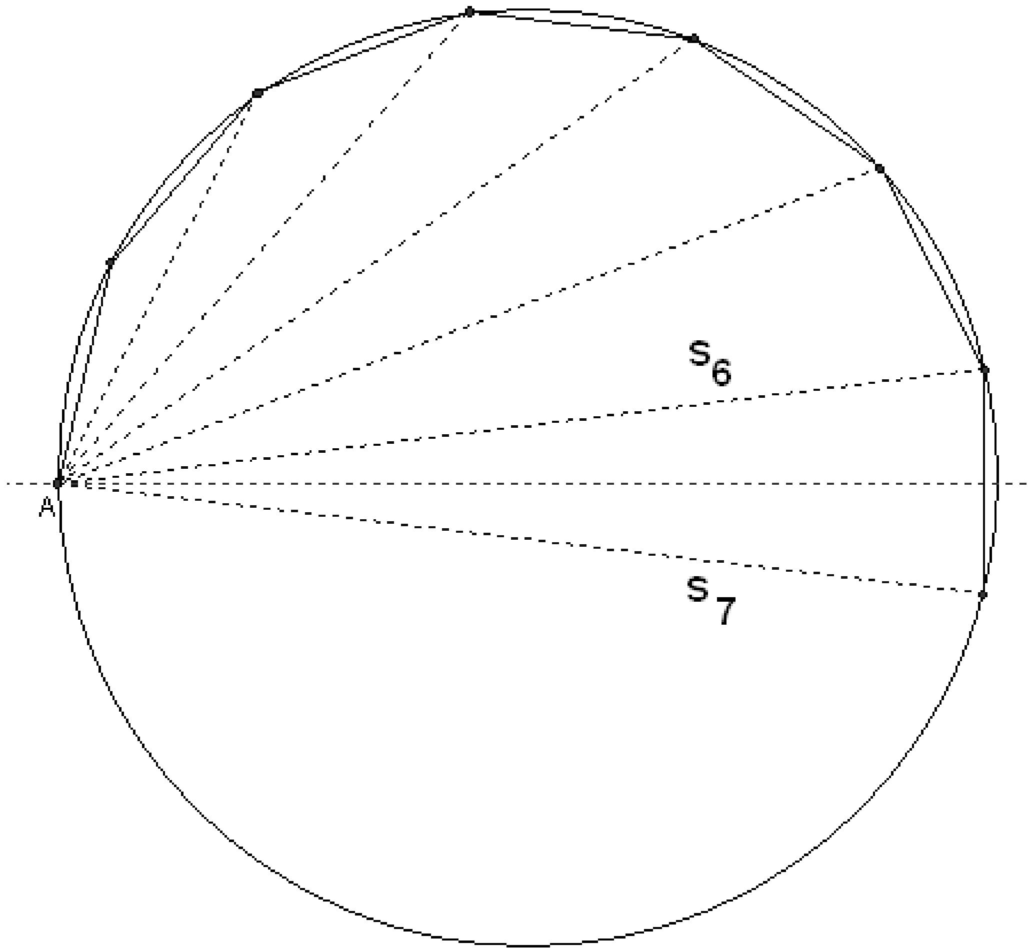
Wie viele Elemente (*n*) soll die Brücke bei festem a haben, so dass die Spannweite möglichst groß wird?

Nur *theoretisch* interessant (sehr steile Brücken für Praxis ungeeignet)!

Optimierungsproblem ohne Differentialrechnung

Durch die Kreislage klar:

- Spannweite wird größer, so lange man den *Halbkreis* nicht überschreitet
- Durchmesser ist eine obere Schranke!

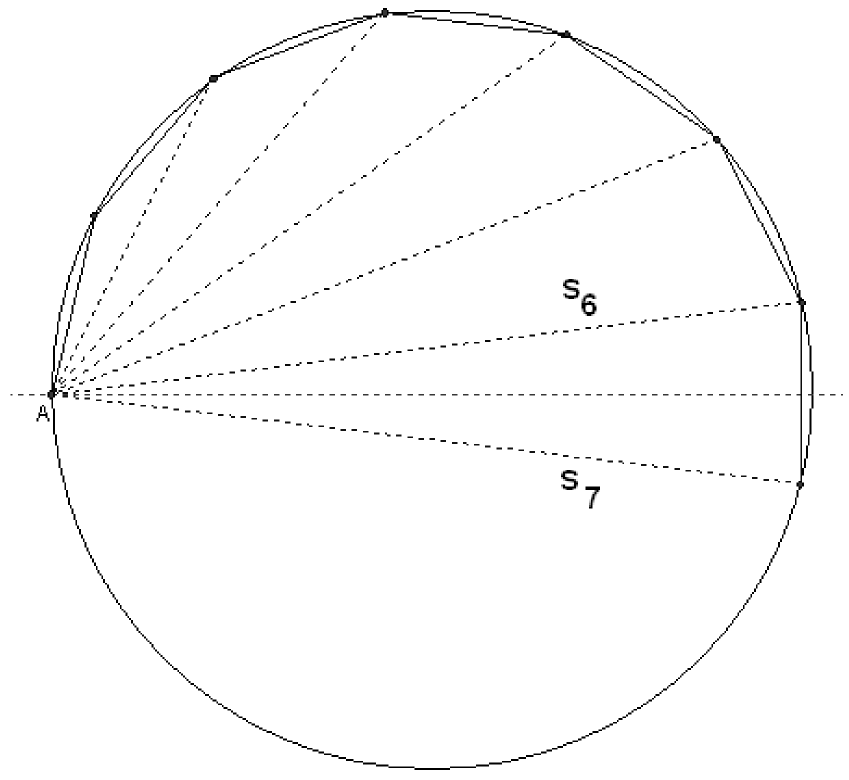


Bestimmung von n_{opt} :

Gesamtzentriwinkel der Brücke: $n \cdot 2a$

Für n_{opt} muss gelten: $n_{\text{opt}} \cdot 2a \approx 180°$ möglichst nahe!

Es gibt genau einen Wert n_{opt} mit: $180° - a \leq n_{\text{opt}} \cdot 2a < 180° + a$



Auflösung nach n_{opt} :

$$\frac{90°}{a} - \frac{1}{2} \leq n_{\text{opt}} < \frac{90°}{a} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{n_{\text{opt}} = \left\lceil \frac{90°}{a} - \frac{1}{2} \right\rceil}$$

Zu einfach?

Bei selbständiger Arbeit nicht!

Umgekehrt:

n **vorgegeben; für welche Werte von** a **ist dieses** ***n*** **optimal?**

$$180° - a \leq n \cdot 2a < 180° + a$$

Auflösung nach a :

$$\frac{180°}{2n+1} \leq a < \frac{180°}{2n-1}$$

Dadurch bessere Übersicht als:

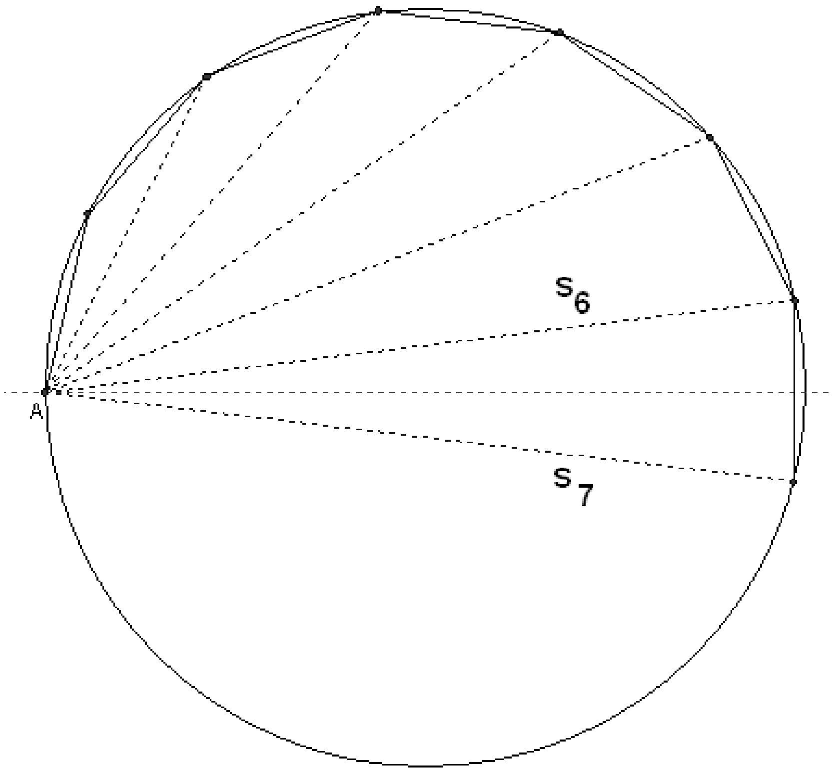
Einzelne n_{opt} -Werte zu einzelnen vorgegebenen a -Werten!

n_{opt}	a **-Bereich (Grad)**
2	[36,0 ; 60,0)
3	[25,7 ; 36,0)
4	[20,0 ; 25,7)
5	[16,4 ; 20,0)
6	[13,9 ; 16,4)
7	[12,0 ; 13,9)
8	[10,6 ; 12,0)
9	[9,5 ; 10,6)
10	[8,6 ; 9,5)
⋮	⋮

Bei den Grenzzahlen für a gilt:

n und $n+1$ gleich gut für die Spannweite:

$n \cdot 2a, \ (n+1) \cdot 2a$ symmetrisch um 180° !



n_{opt}	a **-Bereich (Grad)**
2	[36,0 ; 60,0)
3	[25,7 ; 36,0)
4	[**20,0** ; 25,7)
5	[16,4 ; **20,0**)
6	[13,9 ; 16,4)
7	[12,0 ; 13,9)
8	[10,6 ; 12,0)
9	[9,5 ; 10,6)
10	[8,6 ; 9,5)
⋮	⋮

Ganzzahlige Grenzzahlen?

$$\frac{180°}{2n+1} \leq a < \frac{180°}{2n-1}$$

ungerade nichttriviale Teiler von 180:

$2n+1:$	3,	5,	9,	15,	45
$n:$	1,	2,	4,	7,	22
$a:$	60°,	36°,	20°,	12°,	4°

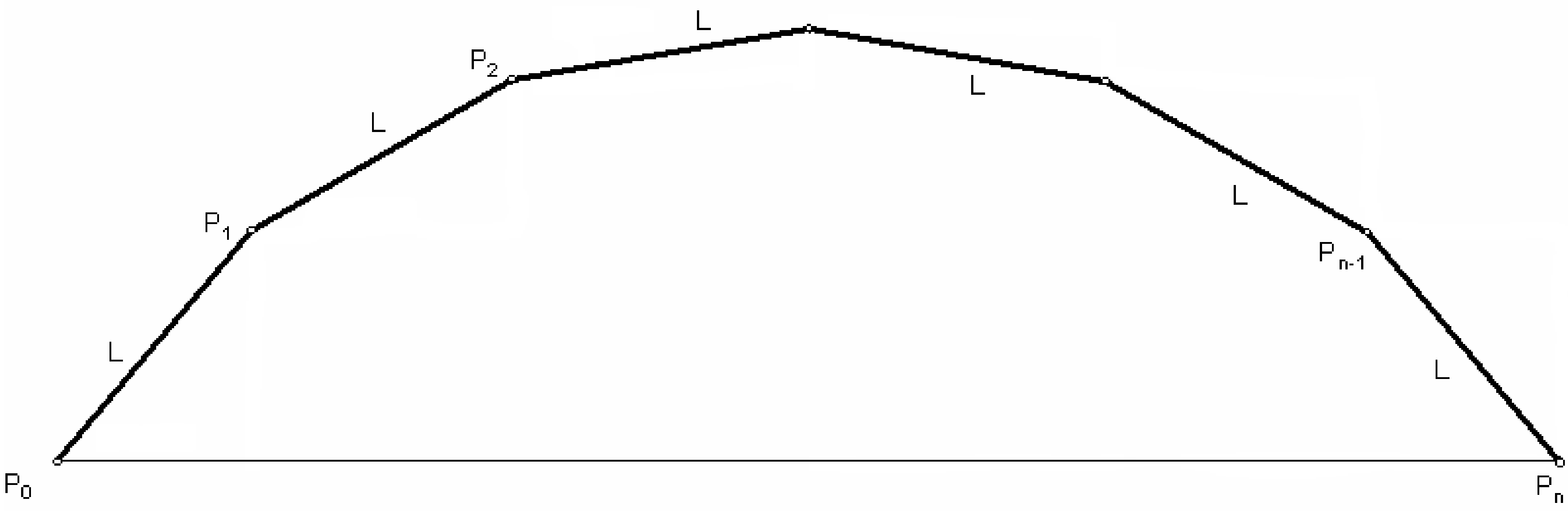
D. h. in der Tabelle ein weiterer ganzzahliger Grenzwinkel (4°) beim Übergang:

$$n = 22 \rightarrow 23$$

n_{opt}	a **-Bereich (Grad)**
2	[**36,0** ; **60,0**)
3	[25,7 ; **36,0**)
4	[**20,0** ; 25,7)
5	[16,4 ; **20,0**)
6	[13,9 ; 16,4)
7	[**12,0** ; 13,9)
8	[10,6 ; **12,0**)
9	[9,5 ; 10,6)
10	[8,6 ; 9,5)
⋮	⋮

Berechnen der Koordinaten der Leonardo-Punkte und Computerzeichnungen

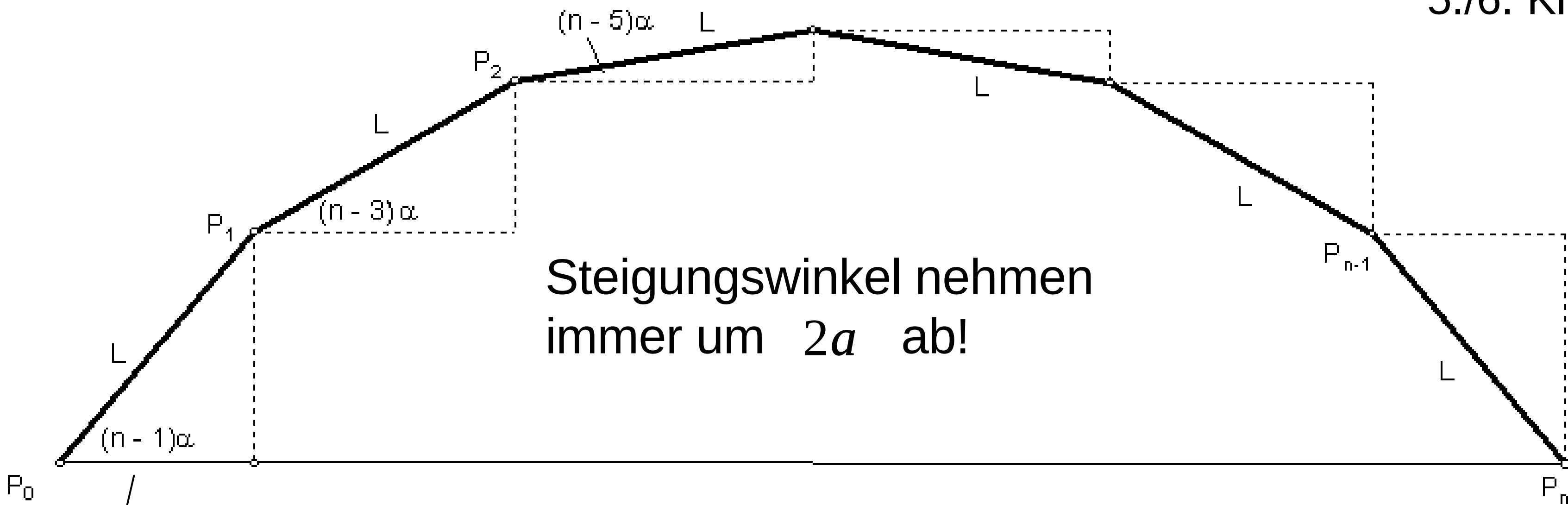
Koordinatenursprung: $P_0 = (0|0)$



Berechnen und Zeichnen z. B. mit EXCEL leicht möglich.

Spannweite der Brücke: x-Koordinate von P_n

Höhe der Brücke: y-Koordinate in der Mitte



Steigungswinkel nehmen immer um $2a$ ab!

Startneigungs-
winkel

Rekursiv:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + L\cos\left((n-1)\cdot a\right)$$

$$x_2 = x_1 + L\cos\left((n-3)\cdot a\right)$$

$$x_3 = x_2 + L\cos\left((n-5)\cdot a\right)$$

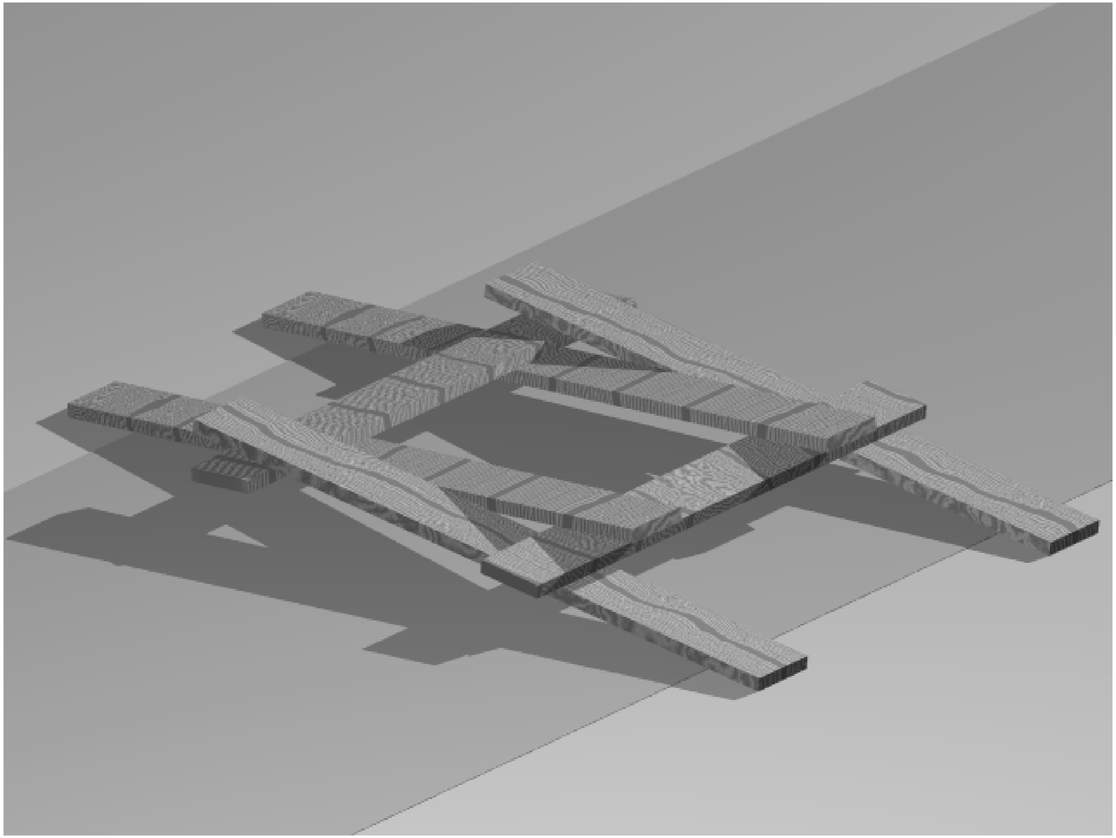
$$\vdots \qquad \vdots$$

Analog: ***y*-Koordinaten, nur sin statt cos**

<u>**EXCEL**</u>

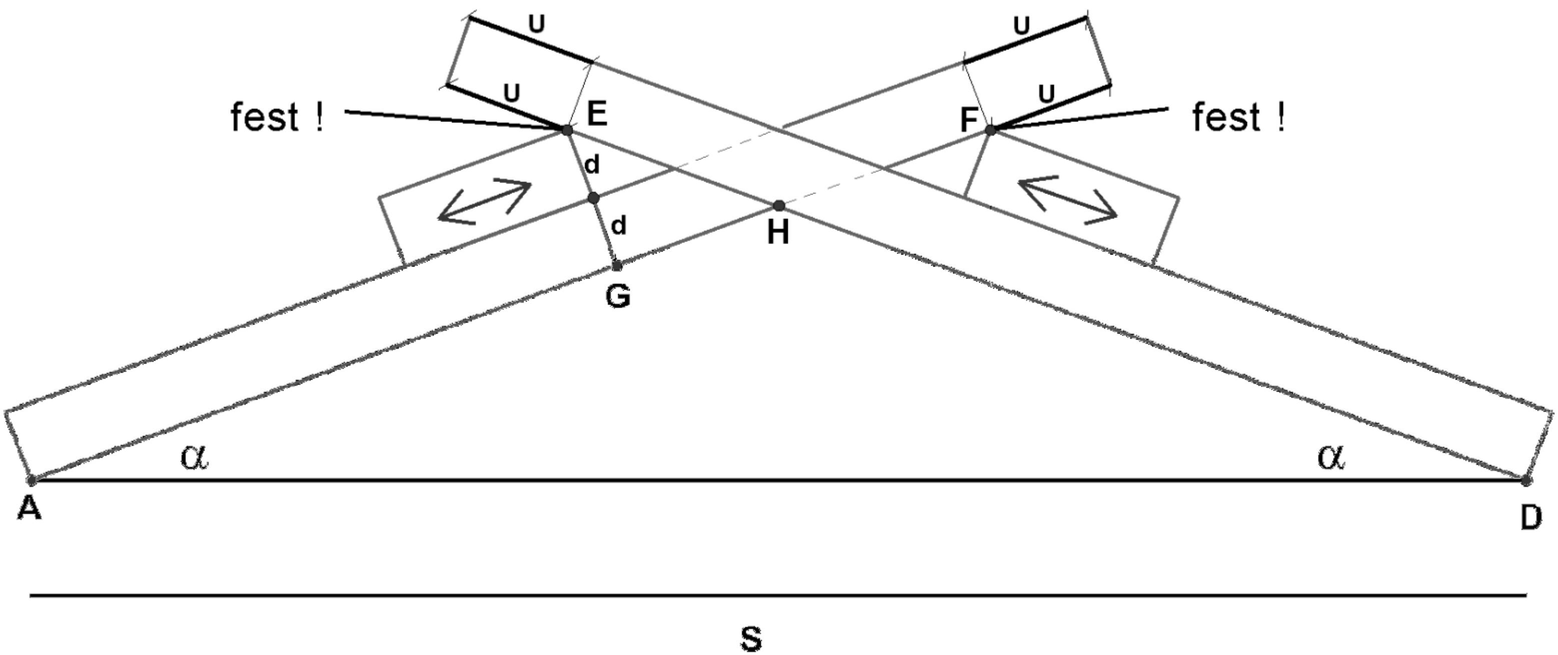
Mögliche Aktivitäten in der 7./8. Klasse

Nun „echte" (nicht vereinfachte) Leonardobrücke;
nur *Grundversion* mit 2 Brückengliedern:



Schematische Darstellung: feste Brettlänge L

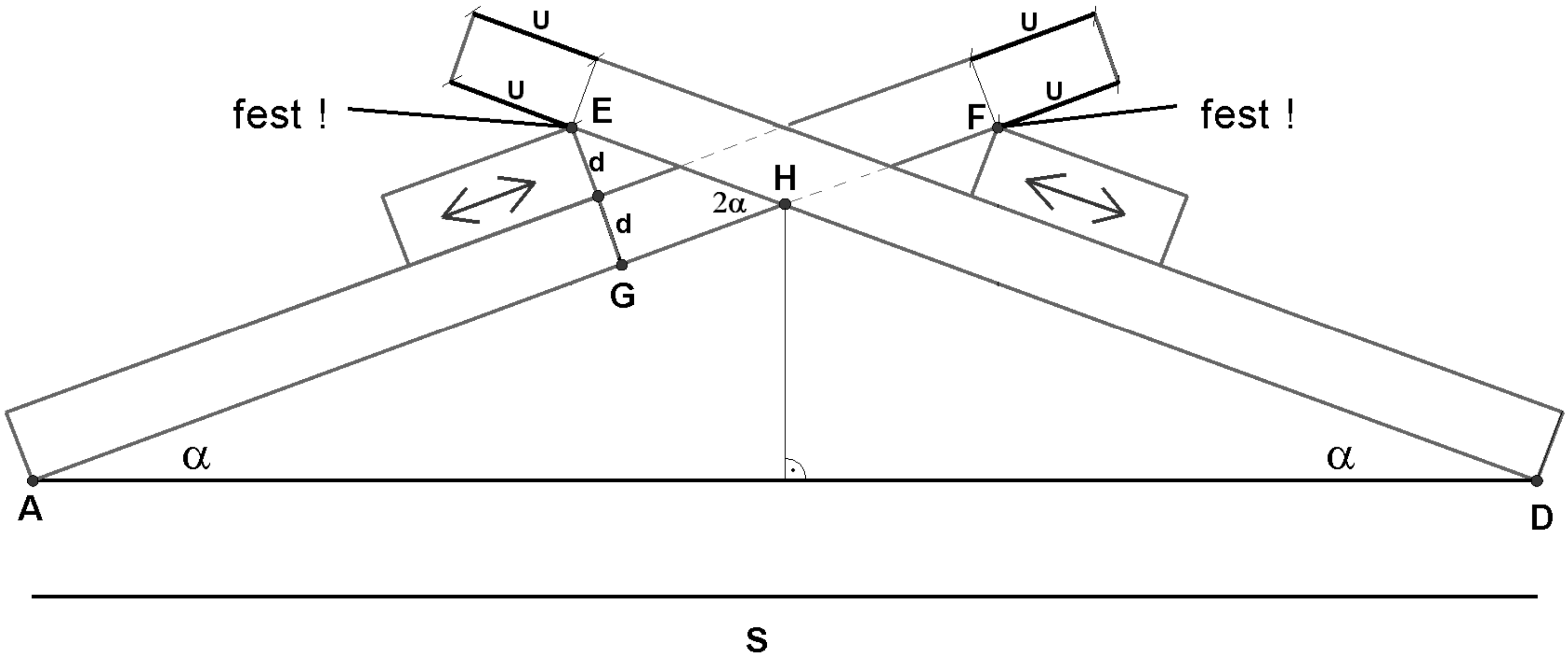
fester „Überstand" U, feste Dicke d



Wie hängt die Spannweite S vom Neigungswinkel α ab?

„Funktionales Denken": S als Funktion von α

Veränderungen sind am realen Modell nachzuvollziehen



$$\boxed{S} = 2\underbrace{|DH|}_{=|AH|}\cos a = 2\left(L - U - \overbrace{\frac{2d}{\underbrace{\sin(2a)}_{2\sin a\cos a}}}^{|EH|}\right)\cos a = \boxed{2\left((L-U)\cos a - \frac{d}{\sin a}\right)}$$

$$S(a) = 2\left((L-U)\cos a - \frac{d}{\sin a} \right) \qquad a_{\min} \le a \le a_{\max}$$

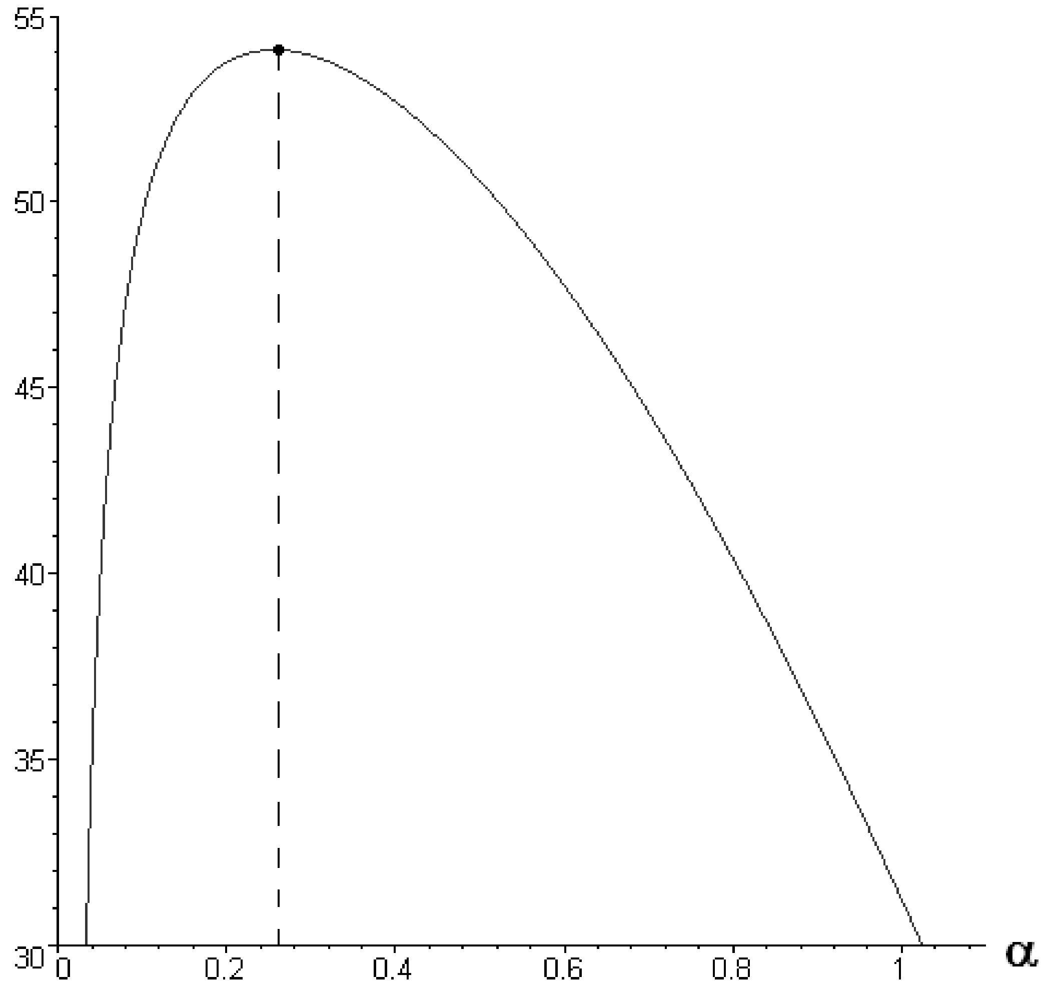
z. B.:

$$L = 40;\;\; U = 10;\;\; d = 0{,}5$$

Maximale Spannweite?

Näherungsweises Ablesen im Graphen:

$$a_{\mathrm{opt}} \approx 0{,}26 \mathrel{\hat{=}} 15°$$



Andere Methoden zum Finden der Maximumstelle:

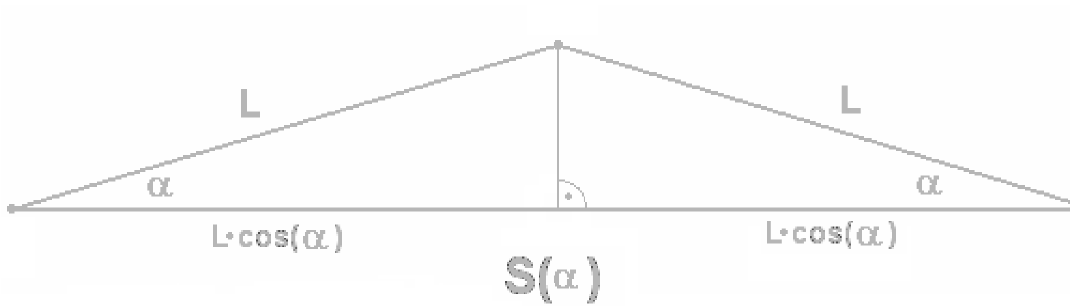
- Wertetabellen mit kleinen Argumentabständen: EXCEL, DERIVE (hier Rechnen auch im Gradmaß möglich!) oder auch GTR (auch schon in der 6. Klasse möglich)

- Differentialrechnung (ab 7. Klasse):

$$S'(\alpha) = 2\left(\frac{d\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - (L-U)\sin\alpha\right)$$

Nullstelle nicht geschlossen zu finden:
-) CAS als „blackbox“ benutzen (eingebaute Routinen)
-) konkretes Näherungsverfahren
(z. B. Newton-Verfahren mit CAS oder EXCEL)

Prinzipieller Unterschied zwischen „vereinfachter“ und „echter“ Version:



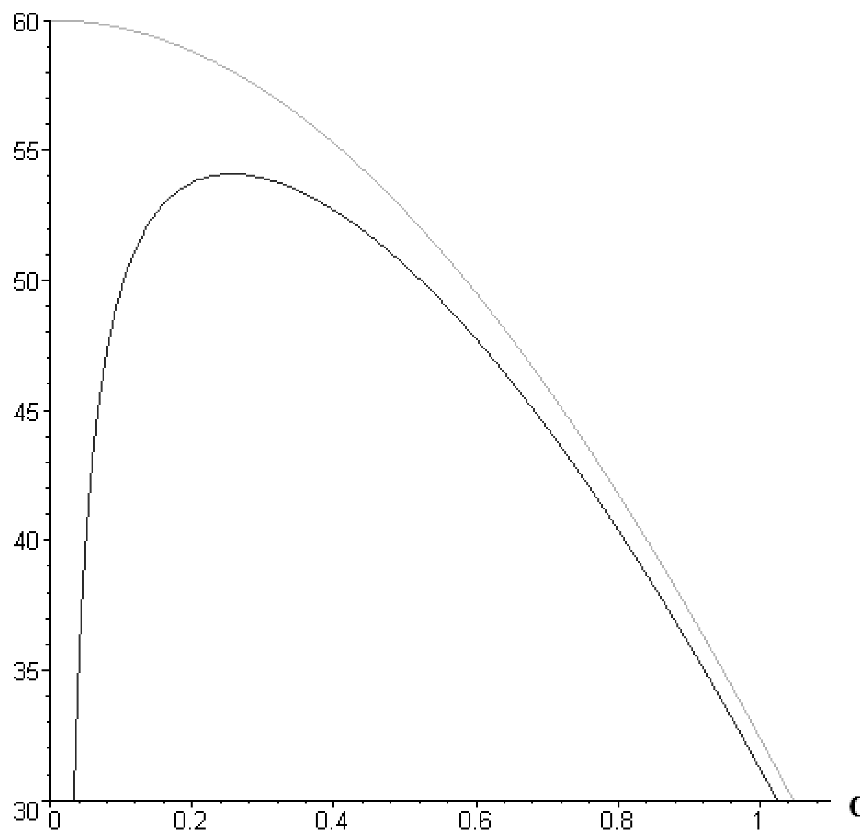
vereinfacht“:

$$S(\alpha) = 2L\cos\alpha$$

Randmaximum:

e kleiner $\alpha \in [0°;90°]$ **,**

esto größer S **– uneingeschränkt!**

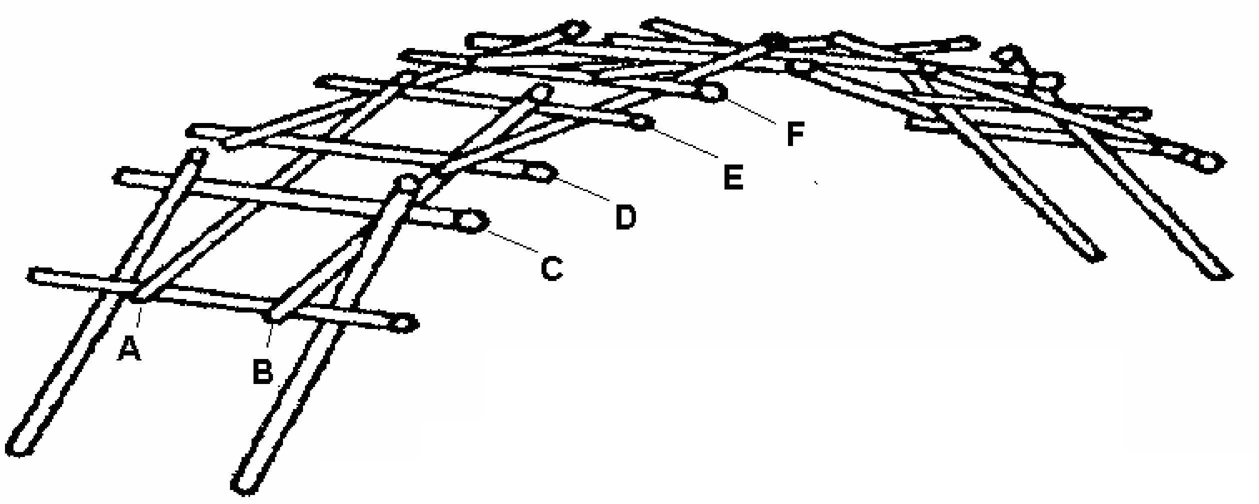


„echt“: $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$

$$S(\alpha) = 2\left((L-U)\cos\alpha - \frac{d}{\sin\alpha} \right)$$

inneres Maximum!

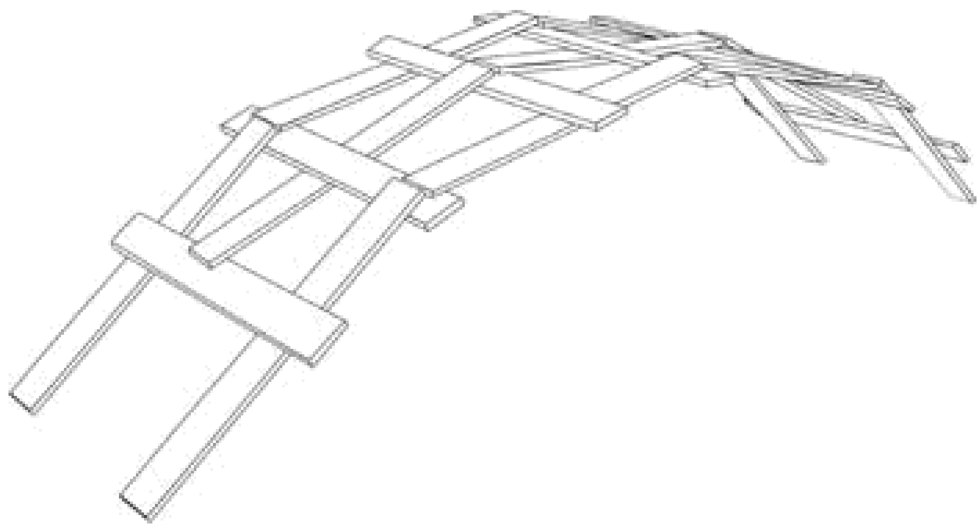
Eine weitere Bauversion:



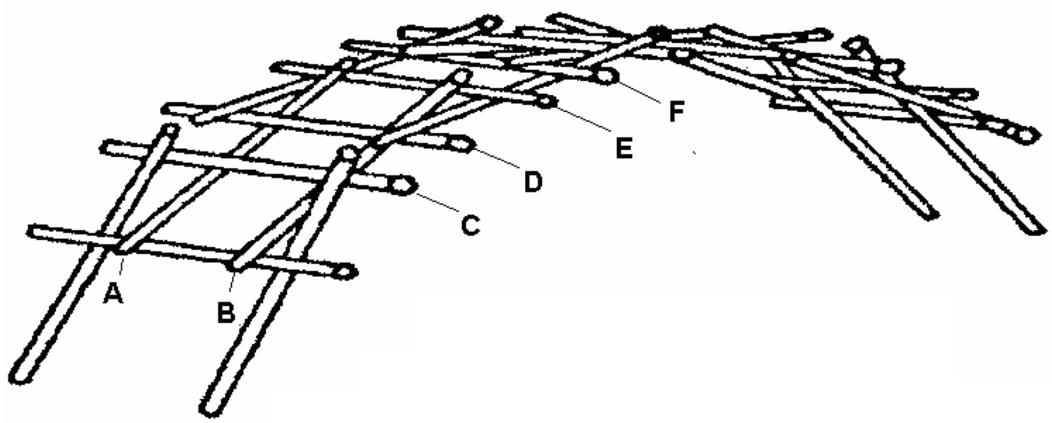
„Zusammenlegung“ von Stäben bzw. Brettchen:

Längsrichtung: A und B, etc.

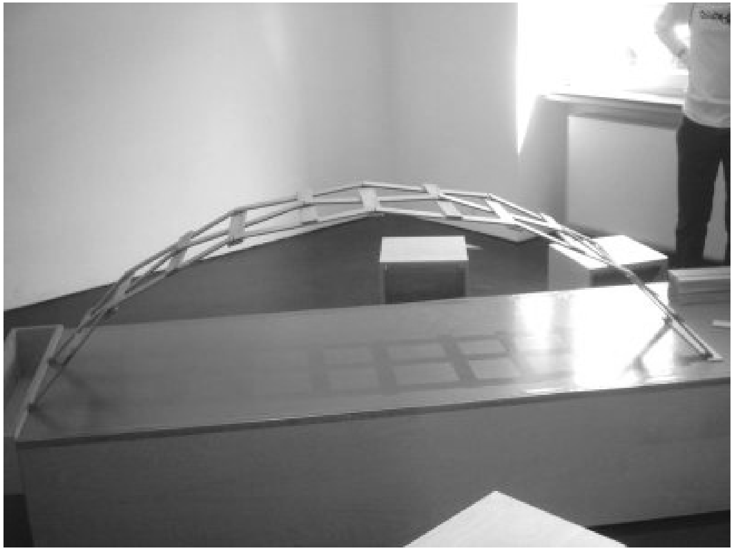
Querrichtung:
C und D, E und F, etc.



Vereinigung nur der Querbalken
C und D, E und F, etc.
z. B. in Freiburg i. B. :



Prinzipielle Unterschiede zur obigen Version:



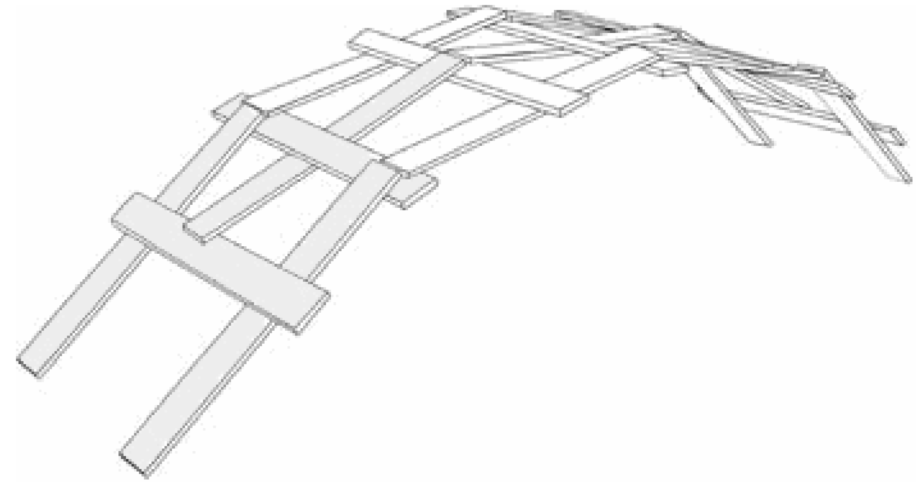
1. Knickwinkel und „Überstand“ nicht mehr steuerbar; durch Brettchenausmaße fest.

2. „Überstand“ sehr kurz, Brettlänge gut ausgenutzt!

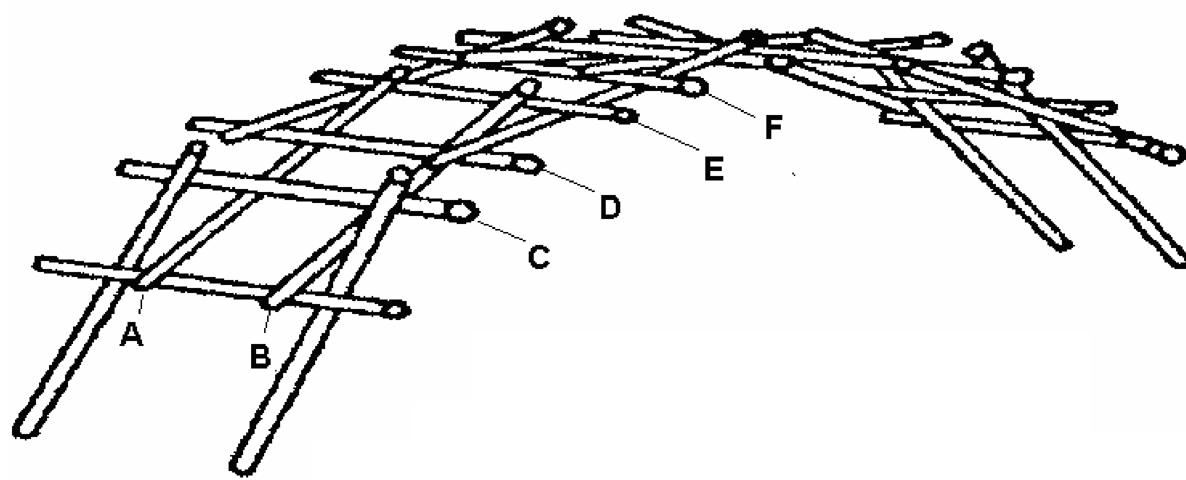
3. Knickwinkel $2a$ deutlich kleiner (hier ca. 15° statt 30°); Brücke weniger steil, nicht so schnell so hoch.

4. Brücke kann an einem Ende „auf einem Bein stehen“; man kann auch halbe Brückenglieder anbauen (Mathematikum Gießen):

Mögliche Überlegungen:



1. Minimalversion:
   1,5 Brückenglieder, 5 Brettchen
2. Bei n vollen Brückengliedern:
   $5n - 2$ Brettchen (oben: $4n - 2$)
3. Welche Form ist zu bevorzugen für gute Spannweiten-Effizienz: „Spannweite pro Brettchen"?



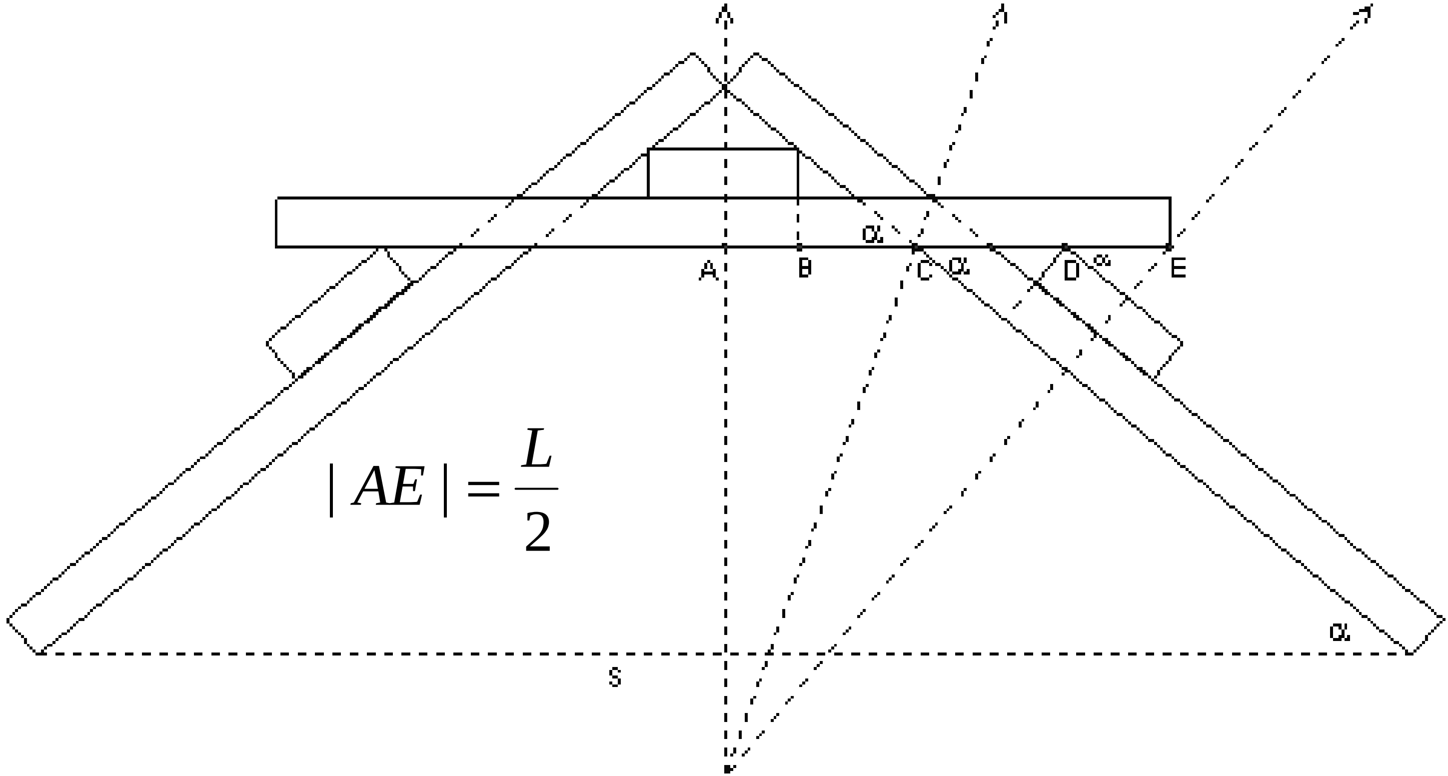
4. Unter anderen Gesichtspunkten (z. B. Sicherheit, Belastbarkeit)?
5. Berechnen des Knickwinkels bei Brettern mit:
   Länge L
   Breite b
   Dicke d

$AB| = \frac{b}{2}$

$BC| = \frac{2d}{\tan a}$

$CD| = \frac{2d}{\sin a}$

$DE| = \frac{b}{2\cos a}$



$$|AE| = \frac{L}{2}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{b}{2} + \frac{2d}{\tan a} + \frac{2d}{\sin a} + \frac{b}{2\cos a} \quad \rightarrow \quad \text{Näherungsl. für } a \text{ mit CAS}$$

Z. B.: $L = 40$, $b = 4$, $d = 0{,}5$: $a \approx 7{,}2°$

Nachmessen am Modell!

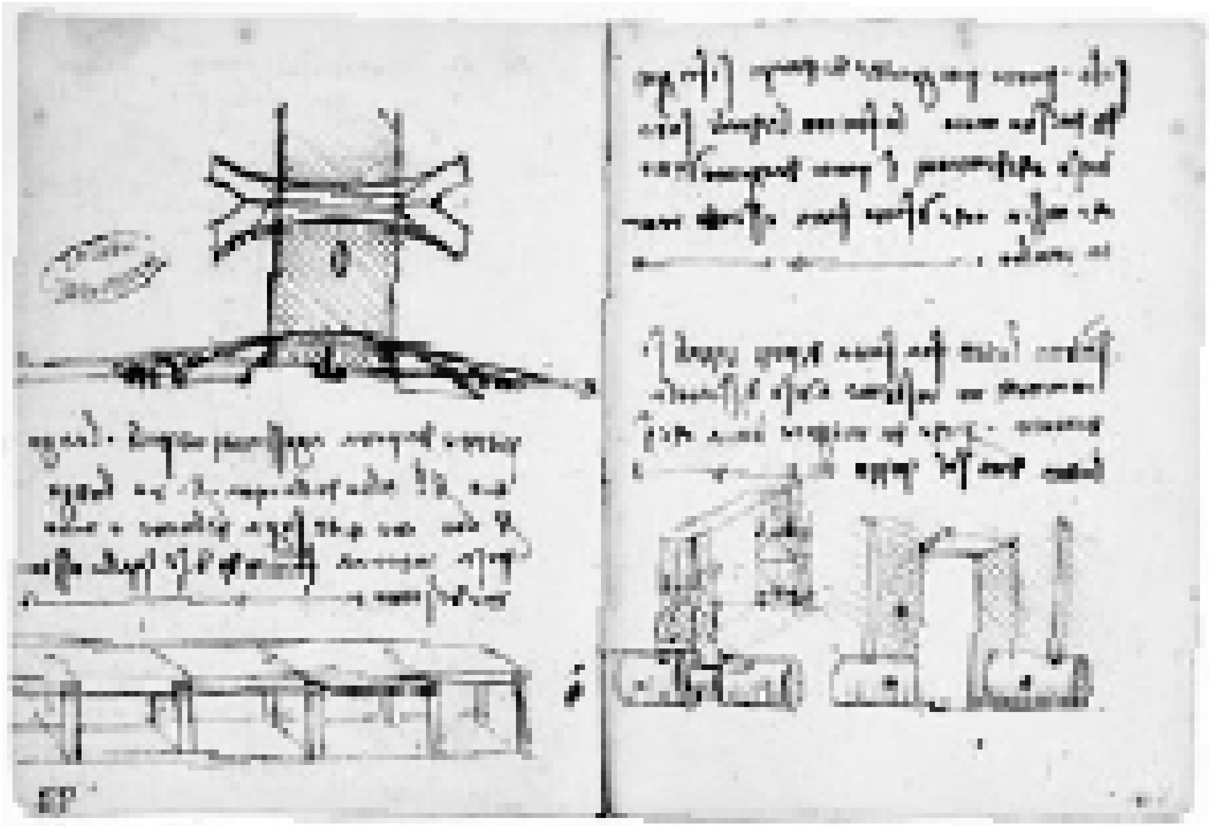
Knickwinkel: $2a \approx 14{,}5°$ $S = 2L\cos(a) \approx 79$

Didaktisches „Potential“ des Themas

NICHT: möglichst vollständige Bearbeitung aller hier angesprochenen Aspekte

- Anlass ist ein **konkretes, historisches** und **praktisches Phänomen** (von einem Genie) → Motivation
- Realitätsbezug
- Hoher Grad an Selbständigkeit möglich
- Möglichkeiten zum Basteln (Bauen), also Mathematik zum „Begreifen“ (Anfassen)
- Computereinsatz (DGS, EXCEL, CAS)
- Hohe Variabilität: Stufe, Umfang, Inhalte

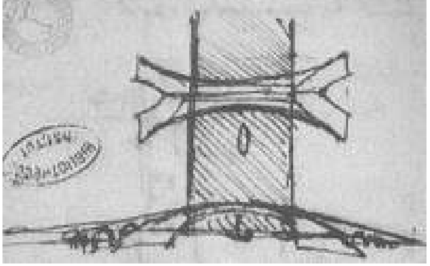
→ **Stärkung** von **Semantik** (vs. Syntax)
Prozess (vs. Kalkül)



1

Skizzenbuch Leonardo da Vincis mit Grundriss und Ansicht der Brücke oben links. Geschrieben hat er in Spiegelschrift

Oktober 2001 (Ås, Norwegen; Nähe Oslo): 60 m lange Brücke aus Holz für Fußgänger und Radfahrer (Originalpläne: 340 m aus Stein, „Goldenes Horn“)



Danke für Ihre Aufmerksamkeit !