

Skript

# **Finite–Elemente–Methode**

**Eine Einführung für Ingenieurstudenten**

Michael Jung

Technische Universität Chemnitz–Zwickau

Ulrich Langer

Johannes–Kepler Universität Linz

**Autorenadresse:**

Dr. rer. nat. Michael Jung  
Technische Universität Chemnitz–Zwickau  
Fakultät für Mathematik  
D – 09107 Chemnitz

Prof. Dr. rer. nat. habil. Ulrich Langer  
(O. Univ.–Professor)  
Johannes–Kepler Universität Linz  
Technisch–Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Mathematik  
Ordinariat „Numerische Mathematik“  
Altenberger Straße 69  
A – 4040 Linz / Österreich

## Vorwort

Das vorliegende Skript entstand auf der Grundlage einer Vorlesung zum Thema „Numerik partieller Differentialgleichungen“, welche die Autoren in den letzten Jahren für Ingenieurstudenten gehalten haben.

Das Skript ist als eine Einführung in die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen gedacht. Ein derartiges Skript kann natürlich nicht eine umfassende Darlegung aller bekannten Diskretisierungsmethoden beinhalten. Wir haben uns auf die Beschreibung der Finite-Elemente-Methode (FEM) konzentriert, da diese die wohl am häufigsten genutzte Methode in Ingenieur Anwendungen ist. Unser Ziel besteht darin, anhand von Beispielen den gesamten Prozeß vom Aufstellen des mathematischen Modells einer physikalischen Erscheinung bis zur Computerrealisierung zu erläutern.

Im ersten Kapitel beschreiben wir verschiedene physikalische Sachverhalte, welche durch partielle Differentialgleichungen modelliert werden können. Mit der Auswahl von Problemen aus der Thermodynamik, der Elektrostatik und der Festkörpermechanik soll dem Leser verdeutlicht werden, daß in vielen Anwendungsgebieten partielle Differentialgleichungen bei der Modellierung entstehen.

Während im ersten Kapitel verschiedene physikalische Erscheinungen und ihre mathematische Formulierung nur zusammenfassend dargelegt sind, wird im zweiten Kapitel der Weg von der physikalischen Erscheinung zum mathematischen Modell anhand der stationären und der instationären Wärmeleitung ausführlich beschrieben. Die hergeleiteten Differentialgleichungen dienen in den folgenden Kapiteln als Modellbeispiele bei der Beschreibung der Finite-Elemente-Methode.

Um einen ersten Einstieg in die Idee von Diskretisierungsverfahren zu erhalten, wird im Kapitel 3 die Finite-Elemente-Methode für eindimensionale Probleme erläutert. Dabei beschreiben wir ausgehend von der Wärmeleitgleichung in differentieller Form alle Schritte, die bei einer Finite-Elemente-Diskretisierung erforderlich sind, d.h. den Übergang zur verallgemeinerten Formulierung, die Diskretisierung des Gebietes, die Wahl der Ansatzfunktionen, den Aufbau des Finite-Elemente-Gleichungssystems, die Lösung dieser Gleichungssysteme und Fehlerabschätzungen.

Das Kapitel 4 ist der Finite-Elemente-Methode für Randwertprobleme in mehrdimensionalen Gebieten gewidmet. Zunächst beschreiben wir allgemein das Ritz- und das Galerkin-Verfahren als mögliche Diskretisierungsverfahren. Anschließend wird die Finite-Elemente-Methode als spezielles Ritz-Galerkin-Verfahren erläutert. Wir beschränken uns im wesentlichen auf Diskretisierungen mit linearen Dreieckselementen. Dabei werden aber die Teilschritte der Finite-Elemente-Diskretisierung so dargelegt, daß sie leicht auf Diskretisierungen mit anderen Elementtypen übertragen werden können.

Da jede Finite-Elemente-Diskretisierung letztendlich auf ein im allgemeinen großdimensioniertes lineares Gleichungssystem führt, haben wir einen Schwerpunkt auf die

Diskussion verschiedener Auflösungsverfahren gelegt. Mit dem Kapitel 5 geben wir einen Überblick über verschiedene Möglichkeiten zur Lösung großdimensionierter Gleichungssysteme. Wir beschreiben die Algorithmen klassischer direkter Verfahren, klassischer iterativer Verfahren sowie moderner iterativer Verfahren und zeigen ihre Vorteile und Nachteile auf.

Abschließend werden im sechsten Kapitel Diskretisierungsmethoden für parabolische Differentialgleichungen kurz erläutert.

Wir möchten uns bei unseren Kollegen Herrn Dr. B. Heise, Herrn Dr. W. Queck, Frau Dr. B. Weber, Herrn Dipl.-Math. T. Steidten und Herrn Dipl.-Math. A. Vogel für die Unterstützung bei der Aufbereitung von Beispielen und für zahlreiche Hinweise bezüglich der Gestaltung des Skripts bedanken.

Chemnitz, Januar 1995

## Liste verwendeter Bezeichnungen

$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall
$(a, b)$	offenes Intervall
$\Omega$	$m$ -dimensionales Gebiet ( $m = 1, 2, 3$ )
$\Gamma = \partial\Omega$	Rand des Gebietes $\Omega$
$\bar{\Omega}$	abgeschlossenes Gebiet $\Omega$ ( $\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$ )
$\Gamma_1$	Randstück mit Randbedingungen 1. Art
$\Gamma_2$	Randstück mit Randbedingungen 2. Art
$\Gamma_3$	Randstück mit Randbedingungen 3. Art
$\bar{\Gamma}_i$	abgeschlossenes Randstück $\Gamma_i$ , $i = 1, 2, 3$
$\mathcal{T}_h$	Triangularisierung des Gebietes $\Omega$
$\delta^{(r)}$	ein Element (Dreieck) der Triangularisierung
$\Delta$	Referenzdreieck
$\bar{N}_h$	Anzahl der Knoten in der Vernetzung $\mathcal{T}_h$
$N_h$	Anzahl der Knoten, die in $\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ liegen
$\bar{\omega}_h$	Indexmenge, welche die Nummern aller Knoten enthält
$\omega_h$	Indexmenge, welche die Nummern der Knoten in $\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ enthält
$\gamma_h$	Indexmenge, welche die Nummern der Knoten auf $\Gamma_1$ enthält
$\mathbb{R}^n$	Raum der Vektoren mit $n$ Komponenten
$C[a, b]$	Menge der im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen
$C(a, b)$	Menge der im Intervall $(a, b)$ stetigen Funktionen
$C^k[a, b]$	Menge der im Intervall $[a, b]$ $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C^k(a, b)$	Menge der im Intervall $(a, b)$ $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C(\bar{\Omega})$	Menge der in $\bar{\Omega}$ stetigen Funktionen
$C(\Omega)$	Menge der in $\Omega$ stetigen Funktionen
$C^k(\bar{\Omega})$	Menge der in $\bar{\Omega}$ $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C^k(\Omega)$	Menge der in $\Omega$ $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$L_2(a, b)$	Menge der über dem Intervall $(a, b)$ quadratisch integrierbaren Funktionen
$L_2(\Omega)$	Menge der über $\Omega$ quadratisch integrierbaren Funktionen
$H^1(a, b)$	Menge der $L_2$ -Funktionen, deren erste verallgemeinerte Ableitung existiert und ebenfalls Element des Raumes $L_2(a, b)$ ist
$H^1(\Omega)$	Menge der $L_2$ -Funktionen, deren erste verallgemeinerte Ableitungen existieren und ebenfalls Element des Raumes $L_2(\Omega)$ sind

$V$	Menge der Grundfunktionen
$V_g$	Menge der Funktionen aus $V$ , welche die Randbedingungen 1. Art erfüllen
$V_0$	Menge der Funktionen aus $V$ , welche auf dem Randstück $\Gamma_1$ gleich Null sind
$V_h$	Menge der Finite-Elemente-(FE-)Ansatzfunktionen
$V_{g1h}$	Menge der Funktionen aus $V_h$ , welche die Randbedingungen 1. Art (näherungsweise) erfüllen
$V_{0h}$	Menge der Funktionen aus $V_h$ , welche auf dem Randstück $\Gamma_1$ gleich Null sind
$a(., .)$	Bilinearform
$\langle F, . \rangle$	Linearform (rechte Seite)
$v$	ein Element eines Funktionenraumes
$\underline{v}$	ein Element des $\mathbb{R}^n$
$u$	exakte Lösung eines Randwertproblems
$u_h$	FE-Näherungslösung
$\frac{\partial v}{\partial x_i}$	(verallgemeinerte) Ableitung der Funktion $v$ nach $x_i$
$\frac{\partial v}{\partial N}$	Konormalenableitung von $v$
$\Delta v$	Laplace-Operator angewendet auf eine Funktion $v$
$\text{grad } v$	Gradient von $v$
$\text{div } \vec{v}$	Divergenz einer Vektorfunktion $\vec{v}$
$\text{rot } \vec{v}$	Rotor einer Vektorfunktion $\vec{v}$
$K_h$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{f}_h$	Lastvektor
$\underline{u}_h$	Lösung des FE-Gleichungssystems

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>Liste verwendeter Bezeichnungen</b>	<b>5</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>9</b>
1.1 Vom technischen Prozeß bis zur Computersimulation . . . . .	11
1.2 Zur Geschichte der FEM . . . . .	12
1.3 Beispiele . . . . .	15
1.3.1 Berechnung von Temperaturfeldern . . . . .	15
1.3.2 Berechnung elektrischer Felder . . . . .	19
1.3.3 Berechnung elektromagnetischer Felder . . . . .	21
1.3.4 Berechnung mechanischer Felder . . . . .	24
1.3.5 Berechnung gekoppelter Felder . . . . .	29
<b>2 Modellierung am Beispiel von Temperaturfeldern</b>	<b>33</b>
2.1 Stationäre Wärmeleitprobleme . . . . .	33
2.1.1 Das stationäre 1D-Wärmeleitproblem . . . . .	33
2.1.2 Das stationäre 2D-Wärmeleitproblem . . . . .	38
2.1.3 Das stationäre 3D-Wärmeleitproblem und einige Spezialfälle . . . . .	42
2.2 Instationäre Wärmeleitprobleme . . . . .	46
2.2.1 Das instationäre 1D-Wärmeleitproblem . . . . .	46
2.2.2 Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall und auf Wärmeleit-Wärmetransportprobleme . . . . .	49
<b>3 Grundprinzipien der Finite-Elemente-Methode: Ein 1D-Beispiel</b>	<b>51</b>
3.1 Die Funktionenräume $L_2(a, b)$ und $H^1(a, b)$ . . . . .	51
3.2 Variationsformulierung von Randwertaufgaben . . . . .	53
3.3 Die FEM zur näherungsweisen Lösung des Variationsproblems . . . . .	55
3.4 Der elementweise Aufbau der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors . . . . .	61
3.5 1D-LAGRANGE-Elemente höherer Ordnung . . . . .	67
3.6 Auflösung des Finite-Elemente-Gleichungssystems . . . . .	71
3.7 Diskretisierungsfehlerabschätzungen . . . . .	74
3.8 Zwei Anwendungsbeispiele . . . . .	83
3.9 Das Programm FEM1D . . . . .	94

<b>4</b>	<b>FEM für mehrdimensionale Randwertprobleme 2. Ordnung</b>	<b>99</b>
4.1	Modellprobleme . . . . .	99
4.2	Herleitung der Variationsformulierung . . . . .	101
4.3	Galerkin–Ritz–FEM . . . . .	104
4.3.1	Galerkin–Verfahren . . . . .	104
4.3.2	Ritz–Verfahren . . . . .	106
4.3.3	FEM = Ritz–Galerkin–Verfahren mit speziellen Ansatzfunktionen . . . . .	107
4.4	FEM mit linearen Dreieckselementen . . . . .	111
4.4.1	Gebietsdiskretisierung (Triangularisierung) . . . . .	111
4.4.2	Definition der Ansatz- und Testfunktionen . . . . .	118
4.4.3	Aufbau des FE–Gleichungssystems . . . . .	121
4.4.4	Ein Konvergenzresultat . . . . .	135
4.4.5	Ein Beispiel . . . . .	136
4.4.6	Das Programm FEM2D . . . . .	142
<b>5</b>	<b>Auflösung von Finite–Elemente–Gleichungssystemen</b>	<b>147</b>
5.1	Direkte Verfahren . . . . .	148
5.2	Iterative Verfahren . . . . .	154
5.2.1	Das Jacobi– und das Gauß–Seidel–Verfahren . . . . .	155
5.2.2	Die Methode der konjugierten Gradienten ohne Vorkonditionierung . . . . .	156
5.2.3	Die Methode der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung . . . . .	158
5.2.4	Mehrgitterverfahren . . . . .	161
5.2.5	Schlußbemerkungen . . . . .	166
5.3	Ein Vergleich der Auflösungsverfahren . . . . .	168
<b>6</b>	<b>Galerkin–FEM für parabolische Anfangs–Randwertaufgaben</b>	<b>177</b>
6.1	Die stetige, die semidiskrete und die volldiskrete Aufgabe . . . . .	177
6.2	Konvergenz und Stabilität . . . . .	180
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>183</b>

# Kapitel 1

## Einführung

Viele technische und physikalische Prozesse, wie z.B. die Wärmeleitung in festen Körpern, die Deformation von Bauteilen unter vorgegebenen Belastungen sowie elektrische und magnetische Felder können durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Die Lösung dieser Differentialgleichungen, d.h. die Bestimmung der unbekanntenen Größen Temperatur, Verschiebungen, elektrisches und magnetisches Potential, kann nur in wenigen Fällen auf analytischem Wege erfolgen, so daß die Anwendung numerischer Verfahren notwendig ist. Der Einsatz von Computern erfordert den Übergang vom kontinuierlichen Problem (Differentialgleichung) zu einem endlichdimensionalen Ersatzproblem. Dieser Übergang wird als Diskretisierungsprozeß bezeichnet. Diskretisierungsmethoden für partielle Differentialgleichungen sind die

- FEM – Finite-Elemente-Methode (Finite Element Method) [27, 92],
- FDM – Differenzenverfahren (Finite Difference Method) [30, 70],
- BEM – Randelemente-Methode (Boundary Element Method) [6, 35].

Die Finite-Elemente-Methode hat sich in den letzten 40 Jahren zum wohl meist verwendeten Diskretisierungsverfahren entwickelt. Ein Vorteil dieser Methode besteht darin, daß sie bei der Diskretisierung von Problemen in beliebigen beschränkten zwei- und dreidimensionalen Gebieten erfolgreich angewendet werden kann. Wichtige Einsatzgebiete der FEM sind z.B. Berechnungen in der Automobilindustrie, im Flugzeug- und Schiffsbau sowie bei der Konstruktion elektrischer Energiewandler. Die Randelemente-Methode ist besonders geeignet zur Lösung von Feldproblemen in unbeschränkten Gebieten wie z.B. zur Berechnung der Fernwirkung von elektrischen und magnetischen Feldern.

Im weiteren wollen wir uns mit der Lösung stationärer und instationärer Probleme 2. Ordnung beschäftigen. Ein erstes Beispiel für ein stationäres Problem ist die folgende Randwertaufgabe (RWA):

Gesucht ist die Funktion  $u(x_1, x_2, x_3)$ , für die

$$-\Delta u(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$$

gilt und die Randbedingung

$$u(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma = \partial\Omega$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

den LAPLACE-Operator und  $\Gamma = \partial\Omega$  den Rand von  $\Omega$ . Die Funktionen  $f(x_1, x_2, x_3)$  sowie  $g(x_1, x_2, x_3)$  sind vorgegeben.

Mit einer derartigen Randwertaufgabe kann z.B. die Temperaturverteilung in einem Körper  $\Omega$  bei gegebener Wärmequelle  $f$  und vorgegebener Randtemperatur  $g$  beschrieben werden.

Allgemein bedeutet die Lösung einer *Randwertaufgabe 2. Ordnung* die Ermittlung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung in einem bestimmten Gebiet, wobei die gesuchte Lösung am Rand des Gebietes noch gewissen Bedingungen, den *Randbedingungen*, unterliegt. In einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung hängt die gesuchte Funktion  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von mehreren Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ab, und die höchste Ordnung der auftretenden partiellen Ableitungen ist 2.

Als ein Beispiel für ein instationäres Problem formulieren wir hier die folgende Anfangs-Randwertaufgabe (ARWA):

Gesucht ist die Funktion  $u(x_1, x_2, x_3, t)$ , für die

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{in} \quad \Omega \times (t_0, T)$$

gilt und die Randbedingung

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = g(x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{auf} \quad \Gamma \times [t_0, T]$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u(x_1, x_2, x_3, t_0) = g_0(x_1, x_2, x_3) \quad \text{in} \quad \Omega$$

erfüllt sind, mit vorgegebenen Funktionen  $f(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $g(x_1, x_2, x_3, t)$  und  $g_0(x_1, x_2, x_3)$ .

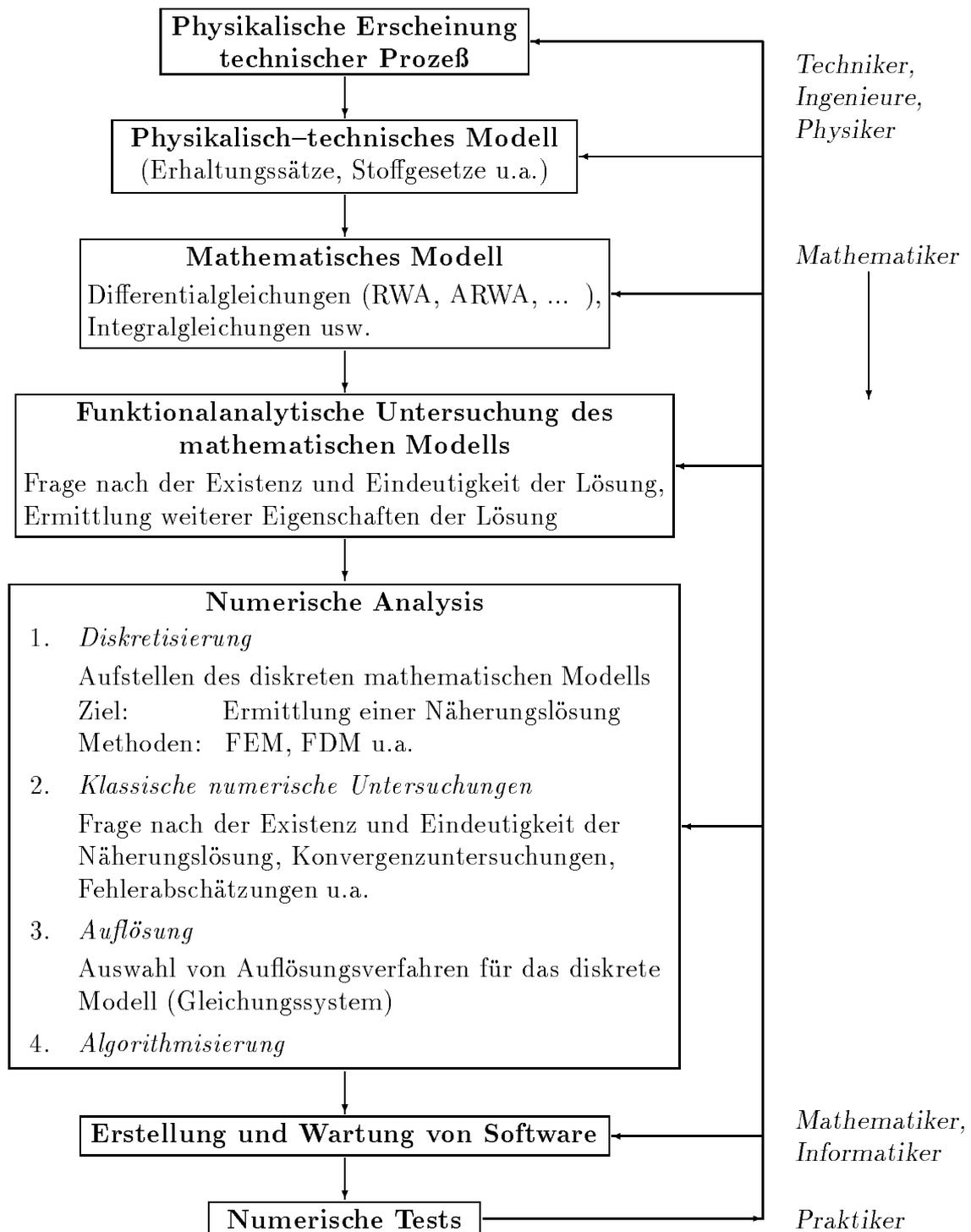
Mittels dieser Anfangs-Randwertaufgabe kann das zeitlich veränderliche Temperaturfeld im Gebiet  $\Omega$  während der Zeitspanne  $(t_0, T)$  beschrieben werden. Dabei bezeichnen die Funktionen  $f(x_1, x_2, x_3, t)$  eine zeitlich veränderliche Wärmequelle,  $g(x_1, x_2, x_3, t)$  die vorgegebene Randtemperatur und  $g_0(x_1, x_2, x_3)$  das Temperaturfeld zum Zeitpunkt  $t = t_0$ .

Die Lösung einer *Anfangs-Randwertaufgabe 2. Ordnung* bedeutet allgemein die Bestimmung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung in einem bestimmten Gebiet  $\Omega$  im Verlaufe eines Zeitintervalls  $\mathbb{T} = [t_0, T]$ , wobei die gesuchte Lösung am Rand des Gebietes noch gewissen Bedingungen, den *Randbedingungen*, sowie zum Zeitpunkt  $t = t_0$  der *Anfangsbedingung* genügt.

Weitere Beispiele für Randwertaufgaben und Anfangs-Randwertaufgaben beschreiben wir im Abschnitt 1.3.

## 1.1 Vom technischen Prozeß bis zur Computersimulation

Eine erfolgreiche Lösung komplexer Problemstellungen aus der Praxis erfordert eine enge Zusammenarbeit zwischen Technikern, Ingenieuren, Physikern, Mathematikern und Informatikern. Das folgende Schema charakterisiert alle Schritte, die notwendig sind, um ausgehend von einer physikalischen Erscheinung oder einem technischen Prozeß ein adäquates mathematisches Modell aufzustellen. Letzteres bildet die Grundlage für eine Computersimulation.



## 1.2 Zur Geschichte der FEM

### • Vorgeschichte

In der Arbeit [73] beschreibt SCHELLBACH die Lösung eines Minimalflächenproblems. Bei einem solchen Problem wird die kleinste Fläche gesucht, deren äußerer Rand eine im Raum gegebene geschlossene Kurve ist. Der von SCHELLBACH beschriebene Lösungsweg beinhaltet Teilschritte, wie sie für die Finite-Elemente-Methode charakteristisch sind. Seine Vorgehensweise kann als FEM mit linearen Dreieckselementen auf einem regelmäßigen Gitter interpretiert werden (siehe auch Abschnitt 4.3.3).

Weiterhin zählen die Arbeiten von RITZ und GALERKIN zur Vorgeschichte der Finite-Elemente-Methode. Die FEM ist nämlich ein spezielles Ritz- bzw. Galerkin-Verfahren (siehe auch die Abschnitte 4.2 und 4.3).

#### 1. W. RITZ (1908, siehe auch [68])

Es ist ein Funktional  $J(u)$  zu minimieren, wobei  $u$  alle zulässigen Funktionen durchläuft, z.B.:

Gesucht ist die Funktion  $u^*(x)$  aus der Menge aller über dem Intervall  $[0, 1]$  stetig differenzierbaren Funktionen  $u(x)$  mit  $u(0) = u(1) = 0$ , die das Funktional

$$J(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - \sin \pi x u(x)] dx \quad (1.1)$$

minimiert.

Eine Näherungslösung für  $u^*$  wird beim Ritzschen Verfahren auf die folgende Weise bestimmt: Man wählt ein System linear unabhängiger Funktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , und setzt den Ausdruck

$$u^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x) \quad (1.2)$$

mit beliebigen reellen Zahlen  $u_i$  in das Funktional  $J(u)$  ein. Damit hängt das Funktional nur von diesen reellen Zahlen ab. Das Minimum des Funktionals über allen Funktionen, die sich gemäß der Beziehung (1.2) darstellen lassen, kann somit aus den Gleichungen

$$\frac{\partial J(u^{(n)})}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial J(u^{(n)})}{\partial u_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J(u^{(n)})}{\partial u_n} = 0$$

ermittelt werden. Die Güte der Näherung  $u^{(n)}$  für die Funktion  $u^*$  hängt von  $n$  ab. Zur Bestimmung einer Näherung für das Minimum des Funktionals (1.1) kann man beispielsweise

$$\varphi_i(x) = (1 - x)x^i \quad (1.3)$$

wählen.

#### 2. GALERKIN (1915)

Betrachtet wird eine Randwertaufgabe, z.B.: Gesucht ist die zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u(x)$ , für die

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1) \quad \text{und} \quad u(0) = u(1) = 0$$

gilt. Zur Bestimmung einer Näherungslösung wird wieder ein Ansatz der Gestalt (1.2) gewählt. Es wird die Funktion  $u^{(n)}$  gesucht, welche die Beziehungen

$$\int_0^1 [-(u^{(n)})''(x) - f(x)] \varphi_i(x) dx = 0$$

bzw. die nach partieller Integration erhaltenen äquivalenten Beziehungen

$$\int_0^1 [u'(x)\varphi_i'(x) - f(x)\varphi_i(x)] dx = 0$$

für alle  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , erfüllt.

### • Geschichte

1. R. COURANT (1943, siehe auch [14]): „*Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*“

Erstmals wurden im Ritzschen Verfahren Ansatzfunktionen mit lokalem Träger (sogenannte *Hütchen-Funktionen*, siehe Abschnitt 4.3.3) verwendet und FEM-Rechnungen durchgeführt, d.h. es wurden im Unterschied zu den Ansatzfunktionen (1.3), die im gesamten Gebiet (Intervall  $(a, b)$ ) von Null verschieden sind, solche Ansatzfunktionen gewählt, die nur in einem „kleinen“ Teilgebiet nicht identisch Null sind.

Die Arbeit von COURANT fand zunächst keine besondere Beachtung.

2. Neuentdeckung der FEM durch Mechaniker in den 50er Jahren:

Im Jahr 1956 beschrieb TURNER eine Methode, die charakteristische Grundgedanken der FEM beinhaltet. Die Grundidee bestand darin, einen festen Körper (Kontinuum) in endlich viele finite Elemente zu unterteilen und die Verschiebungen bei einer vorgegebenen Belastung in den Knoten der finiten Elemente zu berechnen, d.h. letztendlich die Berechnung der Verschiebungen auf die Lösung eines Gleichungssystems zurückzuführen (siehe auch [81] und ARGYRIS (1955 [3])).

3. In den 60er Jahren erfolgte die theoretische Absicherung der FEM durch Mathematiker.

Die ersten mathematisch fundierten Untersuchungen stammen von K. O. FRIEDRICHS (1962, [21]), L. A. OGANESJAN (1966, [62]), V. G. KORNEEV (1967, [45]), M. ZLÁMAL (1968, [98]) u.a.

4. Im Jahr 1967 wurde die erste Ingenieur-Monographie (Mechanik) zur FEM publiziert [90]

O. C. ZIENKIEWICZ

„*The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*“.

Diese Monographie initiierte eine rasche Verbreitung der FEM in ingenieurtechnischen Anwendungen.

5. Die erste Monographie zur mathematischen Fundierung der FEM erschien im Jahr 1973 [77]

G. STRANG und G. J. FIX

„*An Analysis of the Finite Element Method*“.

- **Gegenwart**

Die Finite-Elemente-Methode ist die standardde Diskretisierungsmethode für Feldprobleme. Sie wird in allen Ingenieurwissenschaften angewendet und ist das Kernstück von CAD-Systemen. Es existiert eine Vielzahl von FEM-Programmsystemen zur Lösung von Problemen der Festkörpermechanik, der Strömungsmechanik, der Elektrotechnik u.a.

- **Zukunft**

Auf der Basis von FEM-Modellen und unter Nutzung modernster Rechentechnik (Parallelrechner, Vektorrechner) wird die Simulation komplexer Prozesse möglich (z.B. inverse Aufgabenstellungen)

- **Literatur**

Ingenieur-FEM-Literatur:

- DANKERT (1977, [16])  
„Numerische Methoden der Mechanik“
- H. GOERING, H.-G. ROOS, L. TOBISKA (1985, [27])  
„Finite-Element-Methode“
- N. KIKUCHI (1986, [44])  
„Finite Element Methods in Mechanics“

Mathematische FEM-Literatur:

- G. STRANG und G. J. FIX (1973, [77])  
„An Analysis of the Finite Element Method“
- V. G. KORNEEV (1977, [46])  
„Schemy metoda konečnych elementov vysokich porjadkov točnosti“
- PH. CIARLET (1978, [13])  
„The finite element method for elliptic problems“

Die soeben erwähnten Bücher zur Methode der finiten Elemente sind nur ein kleiner Teil der sehr umfangreichen FEM-Literatur. Weitere wichtige Literaturquellen sind z.B. die Bücher von AXELSSON/BARKER [4], BRAESS [9], BREITSCHUH/JURISCH [11], BRENNER/SCOTT [12], FISCHER [20], GALLAGHER [22], GIRAULT/RAVIART [24], GRIFFITHS [29], GROSSMANN/ROOS [30], HACKBUSCH [34], HINTON/OWEN [41], KRÍŽEK/NEITANMÄKKI [48], MERCIER [50], MITCHELL/WAIT [51], HLAVÁČEK/NEČAS [52], NORRIE/DE VRIES [53], ODEN [54], ODEN/REDDY [61], ODEN/BECKER/CAREY [55, 56, 57, 58, 60, 59], OGANESJAN/RUCHOVEC [63], SCHWARZ [74, 75], ŠHAJDUROV [82], WHITEMAN [85], ŽENÍŠEK [84], ZIENKIEWICZ [91, 92, 93], ZIENKIEWICZ/MORGAN [95], ZIENKIEWICZ/TAYLOR [96] u.a.

Die Anzahl der Zeitschriften Artikel und Proceedings ist fast unüberschaubar. Eine wichtige Fachzeitschrift ist das „International Journal for Numerical Methods in Engineering“.

## 1.3 Beispiele

### 1.3.1 Berechnung von Temperaturfeldern

Die Temperaturverteilung in einem Körper (Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ) im Zeitintervall  $\mathbb{T} = (t_a, t_e)$  kann durch die Lösung eines Anfangs–Randwertproblems bestimmt werden. Die Temperatur  $u(x, t)$  genügt der Differentialgleichung

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) = f \quad (1.4)$$

für alle  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  aus dem Gebiet  $\Omega$  und für alle  $t$  aus dem Zeitintervall  $\mathbb{T}$ . Dabei bezeichnen  $c(x, t)$  die spezifische Wärmekapazität,  $\rho(x, t)$  die Dichte,  $\lambda(x, t)$  die Wärmeleitfähigkeit und  $f(x, t)$  die Intensität der Wärmequelle. Nutzen wir die Differentialoperatoren  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{grad}$  mit

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T) \quad (1.5)$$

sowie

$$\operatorname{grad} v = \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_3} \right)^T, \quad (1.6)$$

dann können wir die Gleichung (1.4) in der kompakteren Form

$$c(x, t)\rho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (\lambda(x, t) \operatorname{grad} u(x, t)) = f(x, t) \quad (1.7)$$

aufschreiben.

Die Temperatur zum Zeitpunkt  $t = t_a$  wird durch die Vorgabe einer Anfangstemperaturverteilung  $g_0(x)$ , der Anfangsbedingung

$$u(x, t_a) = g_0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

im mathematischen Modell berücksichtigt.

Der Einfluß der Umgebung auf die Temperaturverteilung im Körper wird durch die Vorgabe sogenannter Randbedingungen modelliert. Wir unterscheiden die drei folgenden Möglichkeiten:

1. Vorgabe der Temperatur  $u(x, t)$  auf dem Rand  $\Gamma$  des Gebietes  $\Omega$ , d.h.

$$u(x, t) = g_1(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma \text{ und für alle } t \in [t_a, t_e],$$

mit einer vorgegebenen Temperaturverteilung  $g_1(x, t)$ .

2. Vorgabe eines Wärmestromes, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial N} = g_2(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma \text{ und für alle } t \in [t_a, t_e],$$

wobei  $\frac{\partial u}{\partial N}$  die Konormalenableitung

$$\lambda(x, t) \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} n_3 \right)$$

bezeichnet. Der Vektor  $\vec{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))^T$  ist der Vektor der äußeren Einheitsnormalen im Punkt  $x$  auf dem Rand  $\Gamma$ . Die Funktion  $g_2(x, t)$  beschreibt einen Wärmestrom. Mit  $g_2(x, t) \equiv 0$  kann man eine Wärmeisolation modellieren.

3. Beschreibung des Wärmeaustausches mit der Umgebung, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(x, t)u(x, t) = \alpha(x, t)u_A(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma \text{ und für alle } t \in [t_a, t_e].$$

Dabei bezeichnen  $\alpha(x, t)$  den Wärmeaustauschkoeffizienten und  $u_A(x, t)$  die Umgebungstemperatur.

Natürlich ist es auch möglich, bei der Formulierung des Wärmeleitproblems eine Kombination der obenbeschriebenen Randbedingungen zu nutzen, d.h. daß auf einem Randstück  $\Gamma_1$  eine Temperaturverteilung und auf einem Randstück  $\Gamma_2$  ein Wärmestrom vorgegeben werden sowie auf einem Randstück  $\Gamma_3$  der Wärmeaustausch mit der Umgebung modelliert wird ( $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$ ,  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ).

Im Kapitel 2 werden wir ausgehend vom physikalischen Modell die Differentialgleichung (1.4) herleiten (siehe auch [17, 37]).

Im weiteren stellen wir zwei konkrete Beispiele für Wärmeleitprobleme vor. Zuerst betrachten wir das folgende stationäre Problem:

Gesucht ist die Temperaturverteilung in einem Kühlkörper. Ein Schnitt durch den Körper parallel zur  $(x_1, x_2)$ -Ebene ist in der Abbildung 1.1 dargestellt.

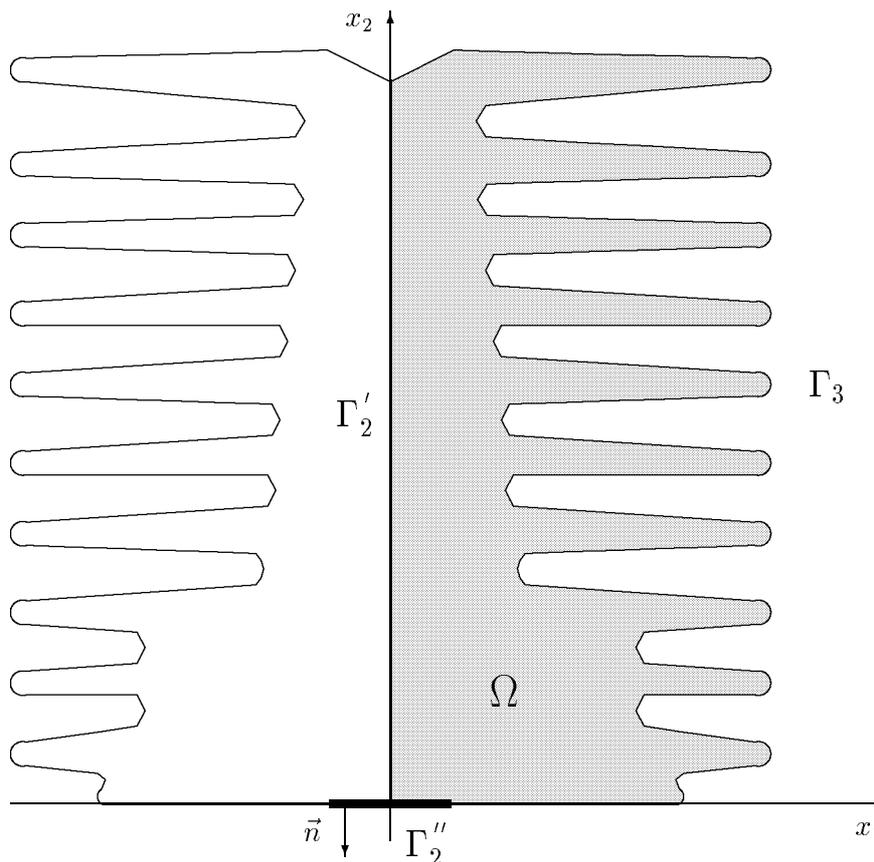


Abbildung 1.1: Schnitt durch den Kühlkörper parallel zur  $(x_1, x_2)$ -Ebene

Am Boden (Rand  $\Gamma_2''$ ) fließt der Wärmestrom  $q(x)$  in den Kühlkörper hinein, und über seine große Oberfläche wird die Wärme an die Umgebung abgegeben. Auf Grund des konstanten Querschnitts in  $x_3$ -Richtung und unter der Voraussetzung, daß die Umgebungstemperatur, die Wärmeübergangszahl, die Wärmeleitzahl sowie der Wärmestrom

von der  $x_3$ -Richtung unabhängig sind, kann man das Wärmeleitproblem als ein ebenes Problem in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene betrachten. Da der Querschnitt und die Eingangsdaten wie Umgebungstemperatur, Wärmeübergangszahl, Wärmeleitzahl und Wärmestrom auch symmetrisch bezüglich der  $x_2$ -Achse sind, können wir schließlich unsere Berechnungen auf die Bestimmung des Temperaturfeldes in dem in der Abbildung 1.1 grau markierten Gebiet reduzieren. Es ist somit die folgende Randwertaufgabe zu lösen:

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x_1, x_2)$ , für das

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} := \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma'_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = q(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma''_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(x)u(x) = \alpha(x)u_A(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_3$$

gilt. Dabei sei  $\lambda(x) = 232.6 \text{ W(mK)}^{-1}$ ,  $\alpha(x) = 58.15 \text{ W(m}^2\text{K)}^{-1}$ ,  $u_A(x) = 273.15 \text{ K}$  und  $q(x) = 659400 \text{ Wm}^{-2}$ .

Die Randbedingung auf dem Rand  $\Gamma'_2$  ist eine „künstlich“ eingeführte Randbedingung. Sie ergibt sich aus der zugrunde liegenden Symmetrie bezüglich der  $x_2$ -Achse.

Die Abbildung 1.2 zeigt Niveaulinien des Temperaturfeldes, d.h. Linien mit gleicher Temperatur.

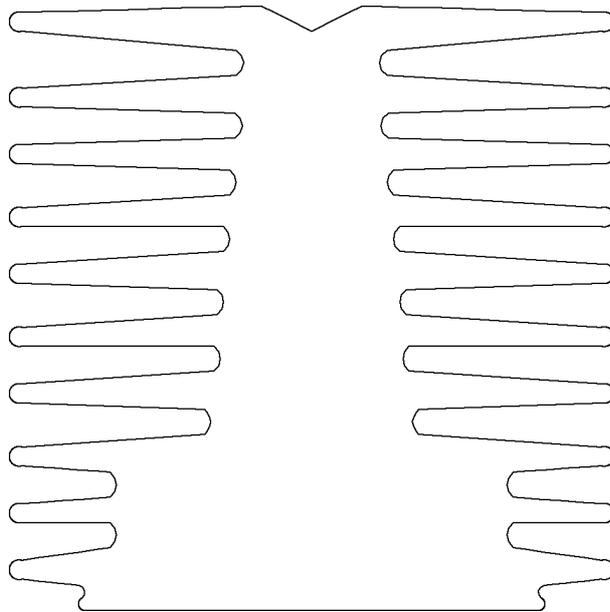
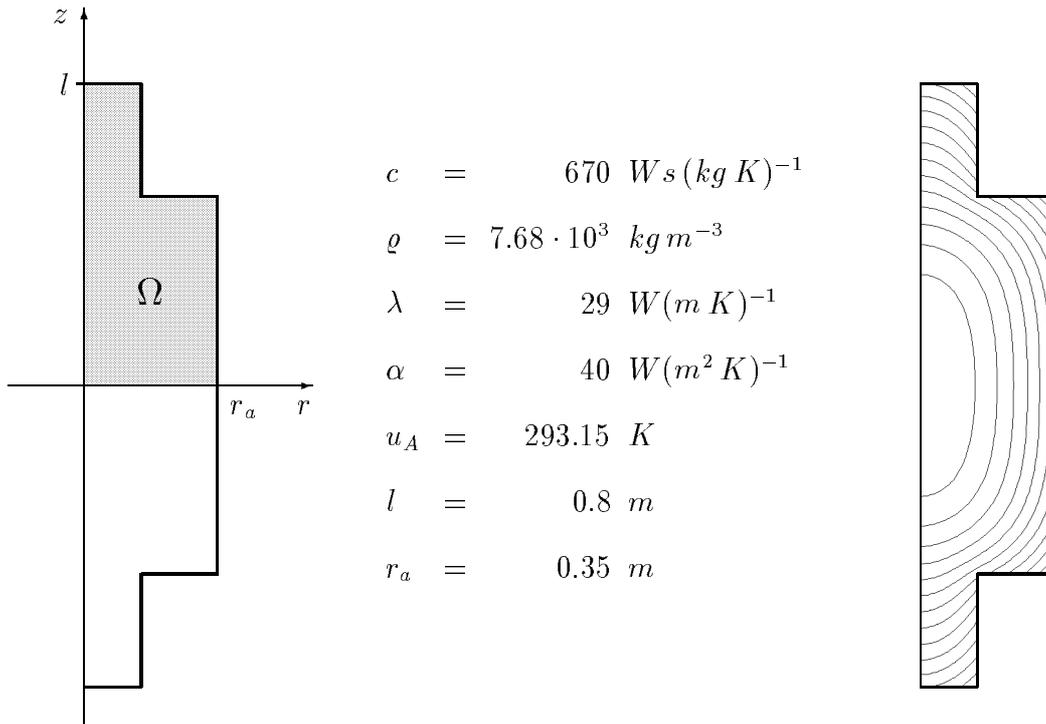


Abbildung 1.2: Niveaulinien des Temperaturfeldes im Kühlkörper

Als Beispiel für ein instationäres Wärmeleitproblem betrachten wir den Abkühlungsprozeß in einer abgesetzten Welle (siehe auch [8]). Die Welle hat zum Zeitpunkt  $t_a = 0$  eine Temperatur von  $1073.15 \text{ K}$  ( $800^\circ\text{C}$ ), und die Umgebungstemperatur ist  $293.15 \text{ K}$  ( $20^\circ\text{C}$ ). Wir wollen das zeitlich veränderliche Temperaturfeld  $u(x, t)$  berechnen, d.h. wir bestimmen zu verschiedenen Zeitpunkten  $t > 0$  die Temperaturverteilung in der Welle. Da die Welle rotationssymmetrisch ist, nutzen wir zur Beschreibung des Problems Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$ . Die Meridianebene, d.h. die Fläche, welche durch Rotation um die  $z$ -Achse den Körper (Welle) erzeugt, ist in der Abbildung 1.3 dargestellt.



$$\Gamma_2 = \{(r, z) \in \partial\Omega : z = 0\} \cup \{(r, z) \in \partial\Omega : r = 0\}, \quad \Gamma_3 = \partial\Omega \setminus \Gamma_2$$

Abbildung 1.3: Meridianebene der Welle und Niveaulinien des Temperaturfeldes

Die Wärmeleitgleichung (1.4) lautet in Zylinderkoordinaten:

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(r, \varphi, z, t)$ , das der Differentialgleichung

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = f \quad (1.8)$$

genügt, wobei wir hier vorausgesetzt haben, daß die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  eine Konstante ist. Da das Gebiet, d.h. die Welle, rotationssymmetrisch ist sowie alle Eingangsdaten wie spezifische Wärmekapazität, Dichte, Wärmeleitfähigkeit, Wärmeübergangszahl und Umgebungstemperatur konstant sind, ist das Temperaturfeld unabhängig vom Winkel  $\varphi$ . Deshalb sind in der Gleichung (1.8) alle Ableitungen nach  $\varphi$  identisch Null. Beachten wir außerdem noch die Symmetrie der Meridianebene bezüglich der  $r$ -Achse (siehe Abbildung 1.3), dann ergibt sich die folgende Randwertaufgabe:

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(r, z, t)$ , für das

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = 0 \quad \text{für alle } (r, z) \in \Omega \quad \text{und für alle } t \in (0, t_e)$$

$$u(r, z, 0) = 800 \quad \text{für alle } (r, z) \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_2 \quad \text{und für alle } t \in [0, t_e]$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \kappa u = \kappa u_A \quad \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_3 \quad \text{und für alle } t \in [0, t_e]$$

gilt, mit

$$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad \kappa = \frac{\alpha}{c\rho} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial N} = a^2 \frac{\partial u}{\partial r} n_r + a^2 \frac{\partial u}{\partial z} n_z.$$

In der Abbildung 1.3 sind Niveaulinien des Temperaturfeldes zum Zeitpunkt  $t = 1 \text{ h}$  dargestellt. Die Temperatur am äußeren Rand beträgt zu diesem Zeitpunkt  $460^\circ\text{C}$ , und in der Mitte hat die Welle noch eine Temperatur von  $739^\circ\text{C}$ .

### 1.3.2 Berechnung elektrischer Felder

Den Ausgangspunkt für die Berechnung elektrischer Felder in einem Gebiet  $\Omega$  bilden die beiden *Maxwellschen Gleichungen*

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \tag{1.9}$$

und

$$\text{div } \vec{D} = \varrho, \tag{1.10}$$

wobei  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{D}$  die elektrische Verschiebung und  $\varrho$  die Ladungsträgerdichte bezeichnen (siehe auch [37, 49]). Der Differentialoperator  $\text{div}$  ist durch die Gleichung (1.5) und der Operator  $\text{rot}$  durch die Beziehung

$$\text{rot } \vec{v} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^T \tag{1.11}$$

mit  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$  definiert.

Auf Grund der Gültigkeit der Gleichung (1.9) existiert eine skalare Funktion  $\varphi$ , für die

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \tag{1.12}$$

gilt. Diese Funktion wird auch als *elektrisches Potential* bezeichnet. Wegen  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  mit  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  ( $\varepsilon_0$  elektrische Feldkonstante,  $\varepsilon_r$  Dielektrizitätszahl des Mediums in  $\Omega$ ) folgt aus den Gleichungen (1.10) und (1.12) die skalare Differentialgleichung

$$-\varepsilon \text{div grad } \varphi = \varrho. \tag{1.13}$$

Nutzen wir die Beziehung  $\Delta = \text{div grad}$  mit dem Laplace-Operator

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}, \tag{1.14}$$

so kann die Differentialgleichung (1.13) auch in der Form

$$-\Delta\varphi = \frac{\varrho}{\varepsilon} \quad (1.15)$$

geschrieben werden.

Als Beispiel betrachten wir die Berechnung des elektrischen Feldes in einem Elektronenstrahlverdampfer. Dabei reduzieren wir die Berechnungen wieder auf die Lösung eines Randwertproblems in einem zweidimensionalen Gebiet. In der Abbildung 1.4 ist ein Schnitt in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene dargestellt. In dem mit  $\square$  gekennzeichneten Gebiet wird der Elektronenstrahl erzeugt. Die durch  $\blacksquare$  markierten Gebiete sind Abschirmplatten. Gesucht ist das elektrische Potential in der gesamten  $(x_1, x_2)$ -Ebene, d.h. in einem unbeschränkten Gebiet. Da wir zur numerischen Bestimmung des Potentials die Methode der finiten Elemente nutzen wollen, müssen wir unsere Untersuchungen auf ein beschränktes Gebiet reduzieren. Wir legen den Berechnungen ein Gebiet  $\Omega$  zugrunde, dessen äußerer Rand hinreichend weit von dem Gebiet entfernt ist, in dem der Elektronenstrahl erzeugt wird. Auf diesem äußeren Rand wird das elektrische Potential als identisch Null angenommen.

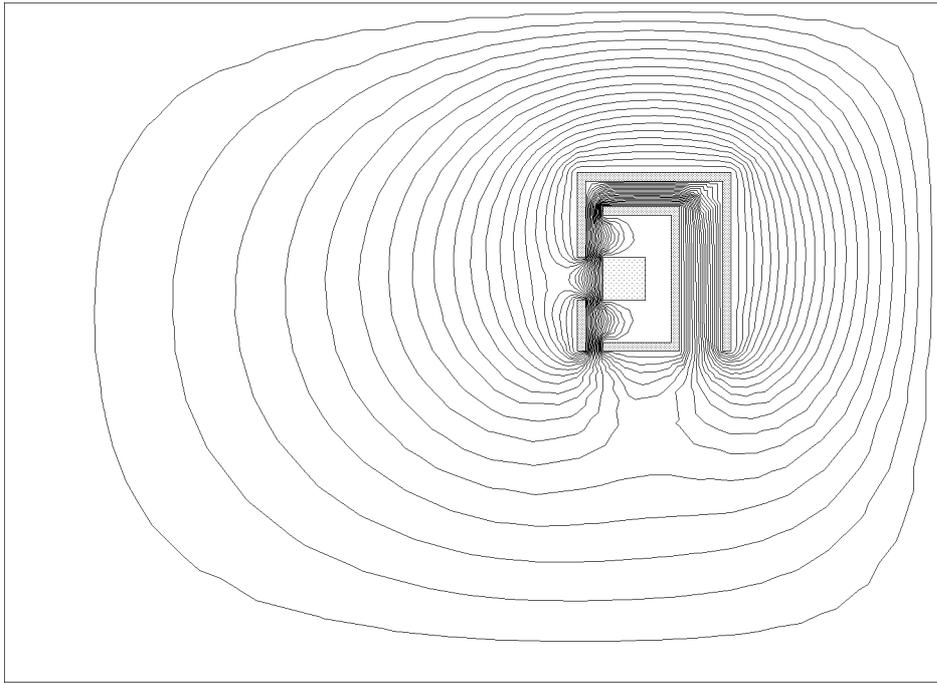


Abbildung 1.4: Äquipotentiallinien des elektrischen Potentials

In unserem Beispiel ist  $\varrho = 0$ . Auf  $\Gamma_{11}$ , dem Rand des Gebietes  $\square$ , ist ein Potential  $g_{11}$  vorgegeben, und auf dem Rand der Abschirmplatten sowie dem äußeren Gebietsrand ist das Potential identisch Null. Gesucht wird das elektrische Potential im Gebiet  $\Omega$  ( $\square$ ). Somit ist die folgende Randwertaufgabe zu lösen:

Gesucht ist das elektrische Potential  $\varphi(x_1, x_2)$ , so daß

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= 0 && \text{für alle } x \in \Omega \\ \varphi &= g_{11} && \text{für alle } x \in \Gamma_{11} \\ \varphi &= 0 && \text{für alle } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma_{11} \end{aligned}$$

gilt.

Die Abbildung 1.4 zeigt die Äquipotentiallinien des elektrischen Potentials.

### 1.3.3 Berechnung elektromagnetischer Felder

Den Ausgangspunkt zur Aufstellung des mathematischen Modells bildet die *Maxwell'sche Gleichung*

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{S}, \quad (1.16)$$

wobei  $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke und  $\vec{S}$  die Stromdichte bezeichnen (siehe auch [49]). Weiterhin führen wir das Vektorpotential  $\vec{A}$  ein, das durch die Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad (1.17)$$

und

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (1.18)$$

definiert ist. Hierbei ist  $\vec{B}$  die magnetische Induktion. Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Induktion  $\vec{B}$  und der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  ist durch

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r (\vec{H} + \vec{H}_0) \quad (1.19)$$

mit der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$  und der materialabhängigen Permeabilitätszahl  $\mu_r$  gegeben. Für die nicht permanentmagnetischen Materialien wird  $\vec{H}_0 = \vec{0}$  vorausgesetzt. Bei Permanentmagneten bezeichnet  $-\vec{H}_0$  die magnetische Feldstärke, bei der die Induktion verschwindet (siehe auch [38]). Besteht für den Permanentmagneten ein linearer Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ ,

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{J}_0, \quad (1.20)$$

so ist

$$\vec{H}_0 = (\mu_0 \mu_r)^{-1} \vec{J}_0, \quad (1.21)$$

wobei  $\vec{J}_0$  die Permanentmagnetisierung bezeichnet. Für nicht ferromagnetische Materialien ist die relative Permeabilitätszahl  $\mu_r$  eine Konstante, und für Ferromagnetika besteht bei Vernachlässigung der Hysterese ein eindeutiger Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$ , so daß sich  $\mu_r$  als

$$\mu_r = \mu_r(|\vec{B}|) \quad (1.22)$$

aufschreiben läßt.

Damit ergibt sich aus den Beziehungen (1.16) – (1.22) (siehe auch [39]) die Gleichung

$$\operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_0 \mu_r (|\operatorname{rot} \vec{A}|)} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = \vec{S} + \operatorname{rot} \vec{H}_0. \quad (1.23)$$

Wir wollen im weiteren das magnetische Potential in einer Gleichstrommaschine berechnen (siehe [39]). Die Erregung erfolgt durch radial magnetisierte Permanentmagnete, und die Stromdichten in den einzelnen Nuten sind jeweils vorgegeben (siehe Abbildung 1.5). Außerdem sind die Magnetisierungskennlinien für die ferromagnetischen Materialien Dynamoblech und Walzstahl für gewisse Wertepaare  $(|\vec{H}|, |\vec{B}|)$  tabellarisch gegeben (siehe Tabelle 1.1).

Dynamoblech		Walzstahl	
$ \vec{H} $ [ $A m^{-1}$ ]	$ \vec{B} $ [ $V s m^{-2}$ ]	$ \vec{H} $ [ $A m^{-1}$ ]	$ \vec{B} $ [ $V s m^{-2}$ ]
200	0.698		
500	1.110		
1000	1.381	1000	1.0
		2000	1.32
2500	1.618	2500	1.40
5000	1.750	5000	1.61
10000	1.892	10000	1.78
20000	2.062	20000	1.95
30000	2.139		

Tabelle 1.1: Magnetisierungskennlinien für Dynamoblech und Walzstahl

In einer ersten Näherung betrachten wir das Problem als ebenes Problem in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene. Der Querschnitt der Gleichstrommaschine ist in der Abbildung 1.5 dargestellt. Wir setzen voraus, daß die  $x_1$ - und  $x_2$ -Komponenten des Potentials  $A$  und der Stromdichte  $\vec{S}$  identisch Null sind, d.h.

$$\vec{A} = (0, 0, A_3)^T \quad \text{und} \quad \vec{S} = (0, 0, S_3)^T.$$

Somit erhalten wir aus dem Differentialgleichungssystem (1.23) die nichtlineare Differentialgleichung

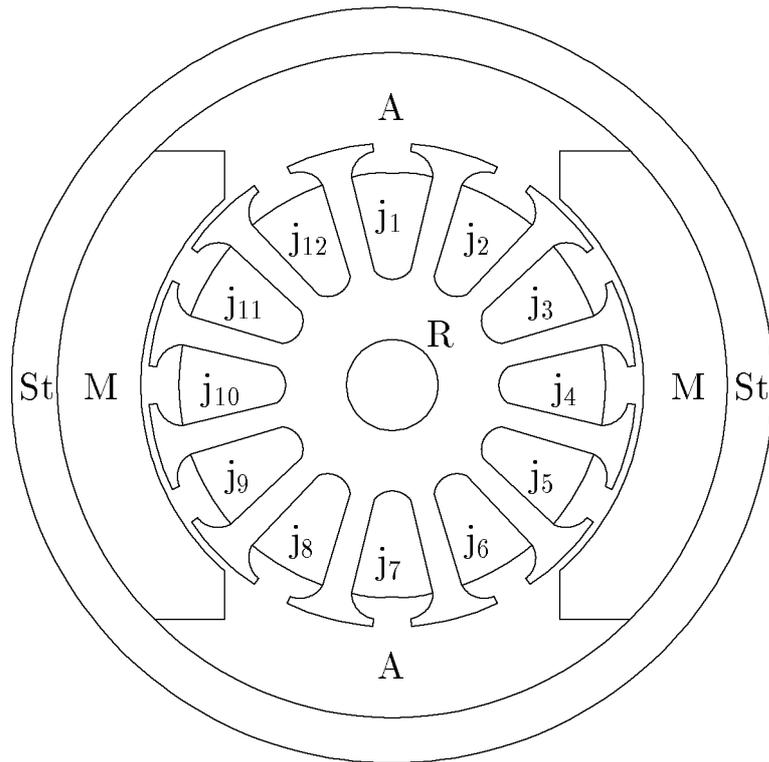
$$-\operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_0 \mu_r (|\operatorname{grad} A_3|)} \operatorname{grad} A_3 \right) = S_3 + (\operatorname{rot} \vec{H}_0)_3.$$

Setzen wir weiter voraus, daß

$$(\vec{H}_0)_3 = 0 \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial H_{01}}{\partial x_3} = \frac{\partial H_{02}}{\partial x_3} = 0$$

so folgt

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = \left( 0, 0, -\frac{\partial H_{01}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{02}}{\partial x_1} \right)^T.$$



R	Rotor (Dynamoblech)
St	Gehäuse (Walzstahl)
M	Permanentmagneten, Magnetisierung radial (( $\vec{J}_0$ ) <sub>r</sub> = 0.4 V s m <sup>-2</sup> , μ <sub>r</sub> = 1.15)
A	Luft (μ <sub>r</sub> = 1)
j <sub>1</sub> , j <sub>2</sub> , ..., j <sub>12</sub>	Wicklungen (Kupfer)

Stromdichten in den Nuten j<sub>2</sub>, j<sub>3</sub>, j<sub>4</sub>, j<sub>5</sub>, j<sub>6</sub> : -3.75 · 10<sup>6</sup> A m<sup>-2</sup>

Stromdichten in den Nuten j<sub>8</sub>, j<sub>9</sub>, j<sub>10</sub>, j<sub>11</sub>, j<sub>12</sub> : 3.75 · 10<sup>6</sup> A m<sup>-2</sup>

Stromdichten in den Nuten j<sub>1</sub>, j<sub>7</sub> : 0 A m<sup>-2</sup>

$$\mu_0 = 1.256637 \cdot 10^{-6} \text{ V s (A m)}^{-1}$$

Abbildung 1.5: Querschnitt des Gleichstrommotors

Damit ergibt sich das Randwertproblem:

Gesucht ist die  $x_3$ -Komponente  $u = A_3$  des Vektorpotentials  $\vec{A}$ , für die

$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r (|\operatorname{grad} u|)} \operatorname{grad} u\right) = S_3 - \frac{\partial H_{01}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{02}}{\partial x_1} \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad (1.24)$$

gilt. Als Randbedingung stellen wir die Forderung

$$u = 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma.$$

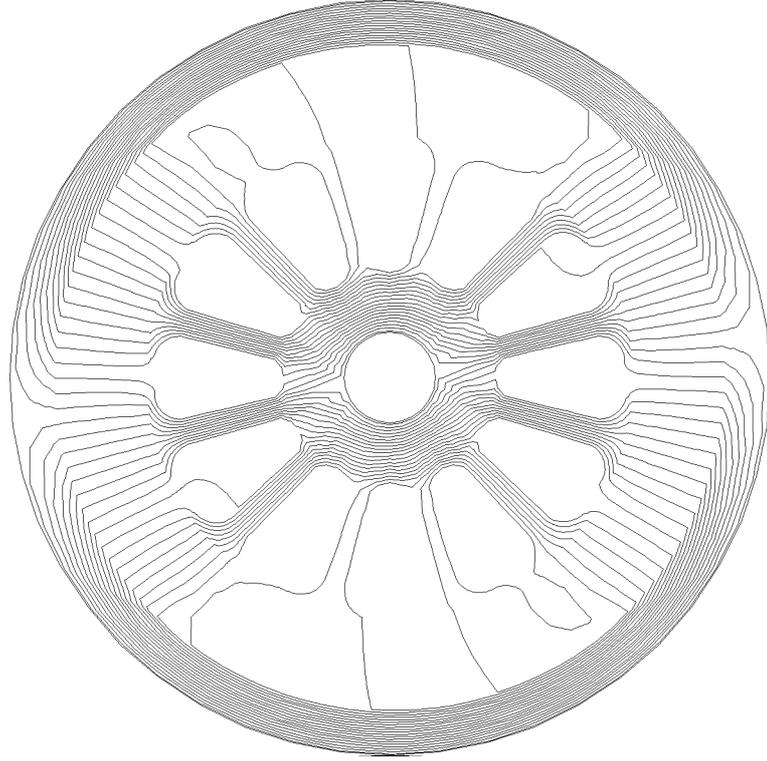


Abbildung 1.6: Feldlinienbild für die Gleichstrommaschine

### 1.3.4 Berechnung mechanischer Felder

Das Verschiebungsfeld  $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$  unter vorgegebenen Belastungen wird in der linearen Elastizitätstheorie als Lösung eines Differentialgleichungssystems bestimmt (siehe [25, 26, 47]). Die Verschiebungskomponenten  $u_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , beschreiben die Verschiebung des Punktes  $P(x_1, x_2, x_3)$  in Richtung  $i$ . Bezeichnen wir mit  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$  den Vektor der Volumenkräfte,  $\vec{g}_1 = (g_{11}, g_{12}, g_{13})^T$  den Vektor der vorgegebenen Randverschiebungen,  $\vec{g}_2 = (g_{21}, g_{22}, g_{23})^T$  den Vektor der vorgegebenen Oberflächenkräfte und  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$  den Vektor der äußeren Einheitsnormalen, dann kann die Randwertaufgabe der linearen Elastizitätstheorie in kartesischen Koordinaten folgendermaßen geschrieben werden:

Gesucht ist das Verschiebungsfeld  $\vec{u}(x)$ , für das

$$\begin{aligned}
 -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= f_1(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \\
 -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= f_2(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \\
 -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) &= f_3(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \\
 \vec{u}(x) &= \vec{g}_1(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1 \\
 \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3 &= g_{2i}(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2, \\
 & \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

gilt. Dabei bezeichnen  $\lambda_e$  und  $\mu_e$  die Laméschen Elastizitätskonstanten, die durch

$$\lambda_e = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu_e = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Poissonschen Querkontraktionszahl  $\nu$  definiert sind. Das *Hookesche Gesetz* beschreibt den Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungstensors und denen des Verzerrungstensors (siehe [25, 26]). Für die Komponenten  $\sigma_{ij}$  des Spannungstensors gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda_e(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu_e\varepsilon_{ii}, & i &= 1, 2, 3 \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} = 2\mu_e\varepsilon_{ij}, & i, j &= 1, 2, 3, i \neq j \end{aligned}$$

mit den Verzerrungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.26)$$

Nutzen wir wieder die Differentialoperatoren  $\text{div}$  und  $\text{grad}$  aus (1.5) bzw. (1.6) sowie den Laplace-Operator eines Vektorfeldes  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ , d.h.

$$\Delta \vec{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)^T, \quad (1.27)$$

dann kann das Differentialgleichungssystem der linearen Elastizitätstheorie in der Form

$$-\mu_e \Delta \vec{u} - (\lambda_e + \mu_e) \text{grad div } \vec{u} = \vec{f} \quad (1.28)$$

aufgeschrieben werden.

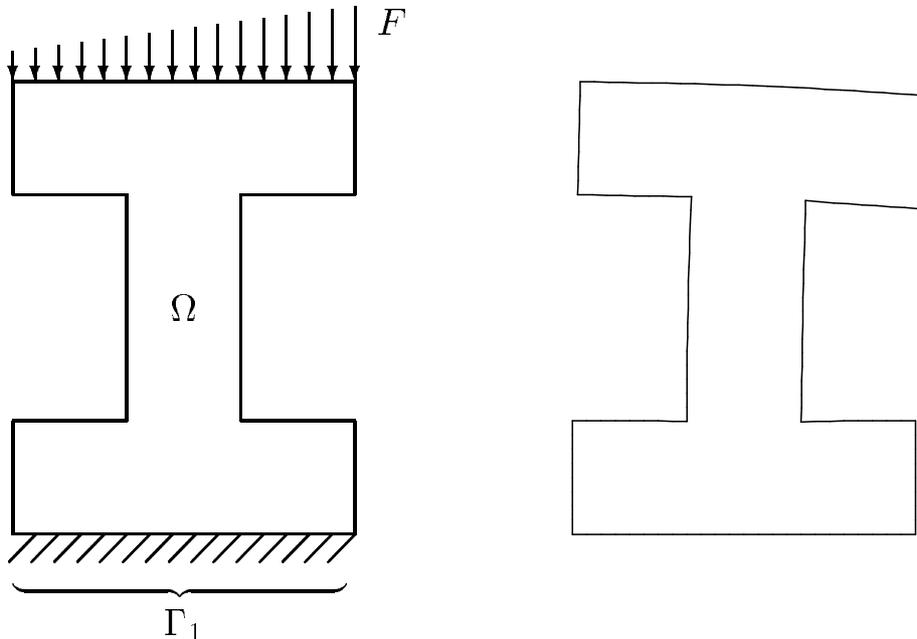


Abbildung 1.7: Querschnitt des Trägers in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene und die Deformation der Kontur (stark vergrößert dargestellt)

Zuerst betrachten wir das folgende Beispiel. Gegeben sei ein Profilträger, auf den eine Kraft wirkt und der am Boden (Rand  $\Gamma_1$ ) fest verankert ist. In der Abbildung 1.7 ist ein Schnitt in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene dargestellt.

Der Querschnitt ist konstant in  $x_3$ -Richtung. Außerdem wirkt die Kraft  $F$  in Ebenen senkrecht zur  $x_3$ -Achse, und sie ist unabhängig von der  $x_3$ -Richtung. Deshalb können wir annehmen, daß

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = u_3 = 0 \quad (1.29)$$

gilt und folglich ist

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0.$$

Unter Beachtung der Beziehung (1.29) erhalten wir aus der Randwertaufgabe (1.25) das folgende ebene lineare Elastizitätsproblem (*ebener Verzerrungszustand*):

Gesucht ist das Verschiebungsfeld  $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$ , für das

$$\begin{aligned} -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) &= 0 & \text{für alle } x \in \Omega \\ -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) &= 0 & \text{für alle } x \in \Omega \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\vec{u}(x) = \vec{0} \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1$$

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2$$

$$\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = g_{22} \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2$$

gilt. In unserem Beispiel ist  $E = 1.96 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ ,  $\nu = 0.3$  und

$$g_{22} = \begin{cases} F = -10^6 x_1 - 4 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2} & \text{auf der Oberseite des Trägers} \\ & (x_1 \in [0.0, 0.18], x_2 = 0.24) \\ 0 \text{ Nm}^{-2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir ein dickwandiges Rohr unter Innendruck. Der Querschnitt des Rohres ist in der Abbildung 1.8 dargestellt. Auf Grund der Rotationsymmetrie des Rohres ist es sinnvoll, zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes die Randwertaufgabe der linearen Elastizitätstheorie in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  zu formulieren.

In diesem Koordinatensystem sind die Komponenten des Verzerrungstensors durch die Beziehungen

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right)$$

definiert (siehe auch [26]), und gemäß des *Hookeschen Gesetzes* bestehen zwischen den Komponenten des Spannungstensors und den Komponenten des Verzerrungstensors die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \lambda_e (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu_e \varepsilon_{rr} \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda_e (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu_e \varepsilon_{\varphi\varphi} \\
 \sigma_{zz} &= \lambda_e (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu_e \varepsilon_{zz} \\
 \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{\varphi r} = 2\mu_e \varepsilon_{r\varphi} \\
 \sigma_{rz} &= \sigma_{zr} = 2\mu_e \varepsilon_{rz} \\
 \sigma_{\varphi z} &= \sigma_{z\varphi} = 2\mu_e \varepsilon_{\varphi z}.
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Es ist die folgende Randwertaufgabe zu lösen:

Gesucht ist das Verschiebungsfeld  $\vec{u}(r, \varphi, z) = (u_r(r, \varphi, z), u_\varphi(r, \varphi, z), u_z(r, \varphi, z))^T$ , für das

$$\begin{aligned}
 & -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\
 & \quad - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = f_r \quad \text{für alle } (r, \varphi, z) \in \Omega \\
 & -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \\
 & \quad - (\lambda_e + \mu_e) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = f_\varphi \quad \text{für alle } (r, \varphi, z) \in \Omega \\
 & -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \\
 & \quad - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = f_z \quad \text{für alle } (r, \varphi, z) \in \Omega
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\vec{u} = \vec{g}_1 \quad \text{für alle } (r, \varphi, z) \in \Gamma_1$$

$$\sigma_{rr} n_r + \sigma_{r\varphi} n_\varphi + \sigma_{rz} n_z = g_{2r} \quad \text{für alle } (r, \varphi, z) \in \Gamma_2$$

$$\sigma_{\varphi r} n_r + \sigma_{\varphi\varphi} n_\varphi + \sigma_{\varphi z} n_z = g_{2\varphi} \quad \text{für alle } (r, \varphi, z) \in \Gamma_2$$

$$\sigma_{zr} n_r + \sigma_{z\varphi} n_\varphi + \sigma_{zz} n_z = g_{2z} \quad \text{für alle } (r, \varphi, z) \in \Gamma_2$$

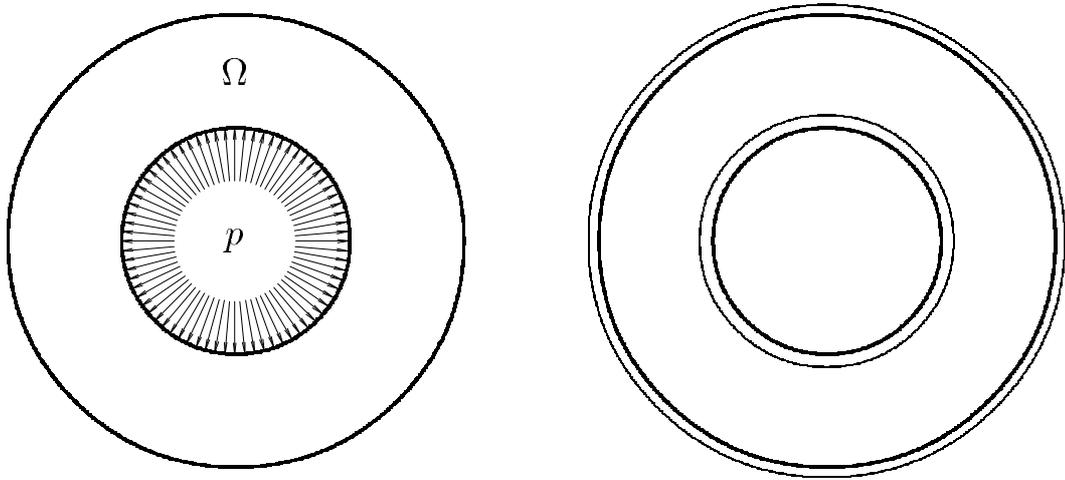
gilt. Es bezeichnen  $\vec{f} = (f_r, f_\varphi, f_z)^T$  den Vektor der Volumenkräfte,  $\vec{g}_1 = (g_{1r}, g_{1\varphi}, g_{1z})^T$  den Vektor der vorgegebenen Randverschiebungen,  $\vec{g}_2 = (g_{2r}, g_{2\varphi}, g_{2z})^T$  den Vektor der vorgegebenen Oberflächenkräfte und  $\vec{n} = (n_r, n_\varphi, n_z)^T$  den Vektor der äußeren Einheitsnormalen.

Zwischen den Verschiebungen  $(u_r, u_\varphi, u_z)^T$  und dem Verschiebungsfeld  $(u_1, u_2, u_3)^T$  in kartesischen Koordinaten besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} u_1 &= u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi \\ u_2 &= u_r \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi \\ u_3 &= u_z \end{aligned}$$

sowie zwischen den Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  und den kartesischen Koordinaten die Beziehung

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z.$$



Innenradius $r_I$	: 0.1 m	Elastizitätsmodul $E$	: $6.87 \cdot 10^7 \text{ Nm}^{-2}$
Außenradius $r_A$	: 0.2 m	Querkontraktionszahl $\nu$	: 0.3
		Druck $p$	: $1 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-2}$

Abbildung 1.8: Geometrie des Rohres und Darstellung der verformten Kontur

Auf Grund der Geometrie des Rohres und der Wirkung des Druckes gilt

$$u_\varphi = u_z = \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0,$$

so daß sich das Differentialgleichungssystem (1.33) auf eine eindimensionale Randwertaufgabe reduziert, d.h.:

Gesucht ist die Verschiebungskomponente  $u_r$ , für die

$$\begin{aligned} -(\lambda_e + 2\mu_e) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) &= 0 & \text{für alle } r \in (r_I, r_A) \\ \sigma_{rr} &= -p & \text{für } r = r_I \\ \sigma_{rr} &= 0 & \text{für } r = r_A \end{aligned} \tag{1.34}$$

gilt.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1.34) ist

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Die unbekanntenen Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  werden unter Nutzung der Randbedingungen bestimmt (Beziehungen (1.31) und (1.32)), d.h.

$$\begin{aligned} (\lambda_e + 2\mu_e) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda_e \frac{u_r}{r} &= -p \quad \text{für } r = r_I \\ (\lambda_e + 2\mu_e) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda_e \frac{u_r}{r} &= 0 \quad \text{für } r = r_A. \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich die Lösung

$$u_r = p \left( \frac{1}{2\lambda_e + 2\mu_e} \frac{r_I^2}{r_A^2 - r_I^2} r + \frac{1}{2\mu_e} \frac{r_I^2 r_A^2}{r_A^2 - r_I^2} \frac{1}{r} \right).$$

Das Verschiebungsfeld für das Rohr unter Innendruck konnten wir analytisch berechnen. Bei allen anderen bisher vorgestellten Beispielen ist eine analytische Berechnung des Verschiebungsfeldes nicht möglich. Für eine näherungsweise Bestimmung des Verschiebungsfeldes müssen wir eine Diskretisierung des jeweiligen Problems vornehmen.

### 1.3.5 Berechnung gekoppelter Felder

Im weiteren diskutieren wir die Berechnung thermomechanischer Felder. Wir berechnen zuerst ein stationäres Temperaturfeld und bestimmen dann die durch den Temperaturgradienten verursachten Verschiebungen. Somit sind die folgenden Randwertaufgaben zu lösen:

Gesucht ist das Temperaturfeld  $T(x)$ , für das

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda(x) \operatorname{grad} T(x)) &= f^T(x) && \text{für alle } x \in \Omega \\ T(x) &= g_1^T(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_1^T \\ \frac{\partial T}{\partial N} &= g_2^T(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_2^T \\ \frac{\partial T}{\partial N} + \alpha(x)T(x) &= \alpha(x)T_A(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_3^T \end{aligned} \quad (1.35)$$

gilt, sowie das Verschiebungsfeld  $\vec{u}(x)$ , welches das Differentialgleichungssystem

$$-\mu_e \Delta \vec{u}(x) - (\lambda_e + \mu_e) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}(x) = \vec{f}^e(x) - (3\lambda_e + 2\mu_e) \alpha_l(x) \operatorname{grad} T(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad (1.36)$$

und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{u}(x) &= \vec{g}_1^e(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_1^e \\ \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= g_{21}^e(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_2^e \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 &= g_{22}^e(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_2^e \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= g_{23}^e(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_2^e \end{aligned} \quad (1.37)$$

erfüllt. Für den Rand des Gebietes  $\Omega$  gilt  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_1^T \cup \bar{\Gamma}_2^T \cup \bar{\Gamma}_3^T = \bar{\Gamma}_1^e \cup \bar{\Gamma}_2^e$  mit  $\Gamma_i^T \cap \Gamma_j^T = \Gamma_i^e \cap \Gamma_j^e = \emptyset$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Außerdem bezeichnen wieder  $\lambda(x)$  den Wärmeleitkoeffizienten,  $\alpha(x)$  die Wärmeübergangszahl,  $f^T(x)$  die Intensität der Wärmequelle,  $T_A(x)$  die Umgebungstemperatur,  $\vec{f}^e(x) = (f_1^e(x), f_2^e(x), f_3^e(x))^T$  den Vektor der Volumenkräfte,  $\vec{g}_1^e = (g_{11}^e, g_{12}^e, g_{13}^e)^T$  den Vektor der vorgegebenen Randverschiebungen,  $\vec{g}_2^e = (g_{21}^e, g_{22}^e, g_{23}^e)^T$  den Vektor der vorgegebenen Oberflächenkräfte,  $\alpha_l$  den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten und  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$  den Vektor der äußeren Einheitsnormalen. Die Spannungskomponenten bei thermomechanischen Feldern sind durch

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda_e (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu_e \varepsilon_{ii} - (3\lambda_e + 2\mu_e) \alpha_l T, & i = 1, 2, 3 \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} = 2\mu_e \varepsilon_{ij} & i, j = 1, 2, 3, i \neq j \end{aligned}$$

definiert, mit den in den Beziehungen (1.26) eingeführten Komponenten  $\varepsilon_{ij}$  des Verzerrungstensors (siehe auch [25, 26]).

Wir berechnen im weiteren das Verschiebungsfeld im oberen Teil des Kolbens eines Verbrennungsmotors. Die Verschiebungen werden durch die Temperaturänderungen infolge des Verbrennungsprozesses hervorgerufen. Wir nehmen an, daß der obere Teil des Kolbens rotationssymmetrisch ist. In den Abbildungen 1.9 und 1.10 ist die Meridianebene des Kolbens dargestellt. Weiterhin setzen wir voraus, daß alle Eingangsdaten wie z.B. die Wärmeleitzahl, die Wärmeübergangszahl, die Umgebungstemperatur, die Laméschen Konstanten, die vorgegebenen Oberflächenkräfte und der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient vom Rotationswinkel unabhängig sind.

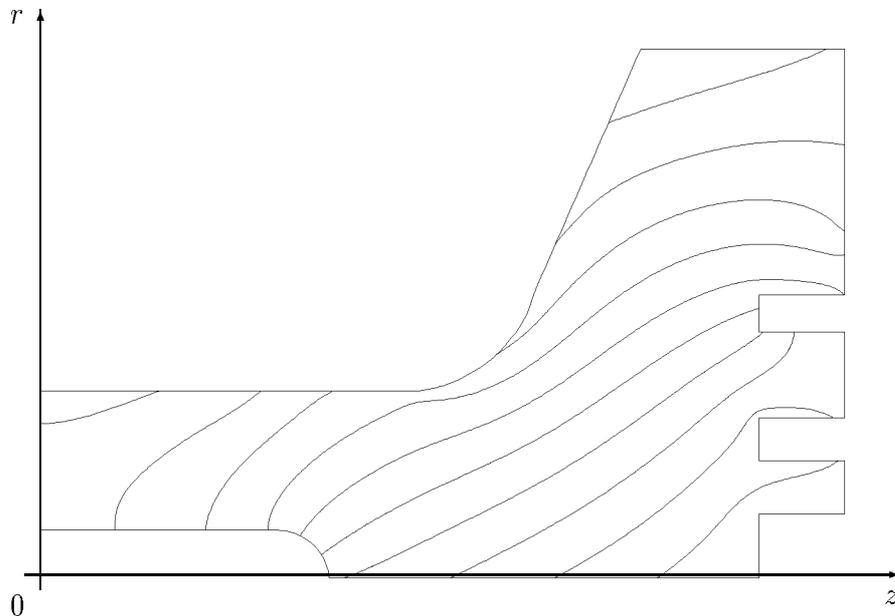


Abbildung 1.9: Niveaulinien des Temperaturfeldes

Zur Bestimmung des Temperatur- und Verschiebungsfeldes nutzen wir die Formulierung des Wärmeleitproblems und des Elastizitätsproblems in Zylinderkoordinaten. Auf Grund der getroffenen Annahmen sind alle partiellen Ableitungen nach dem Rotationswinkel  $\varphi$  sowie die Verschiebungskomponente  $u_\varphi$  identisch Null. Wir erhalten die

folgenden Randwertprobleme (siehe auch die Beziehungen (1.8) und (1.33)): Gesucht ist das Temperaturfeld  $T(r, z)$ , für das

$$\begin{aligned} -\lambda(r, z) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] &= 0 && \text{für alle } (r, z) \in \Omega \\ T(r, z) &= g_1^T(r, z) && \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_1^T \\ \frac{\partial T}{\partial N} &= 0 && \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_2^T \end{aligned}$$

gilt, mit  $\Gamma_2^T = \{(r, z) \in \partial\Omega : r = 0\} \cup \{(r, z) \in \partial\Omega : z = 0\}$  und  $\Gamma_1^T = \partial\Omega \setminus \Gamma_2^T$ . Die Funktion  $g_1^T(r, z)$  beschreibt ein vorgegebenes Temperaturfeld auf  $\Gamma_1^T$ .

Das Verschiebungsfeld  $\vec{u}(r, z) = (u_r(r, z), u_z(r, z))^T$  wird durch die Lösung der folgenden Randwertaufgabe bestimmt.

Gesucht ist das Verschiebungsfeld  $\vec{u} = (u_r, u_z)$ , das die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) \\ -(\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -(3\lambda_e + 2\mu_e) \alpha_l \frac{\partial T}{\partial r} && \text{für alle } (r, z) \in \Omega \\ -\mu_e \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \\ -(\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -(3\lambda_e + 2\mu_e) \alpha_l \frac{\partial T}{\partial z} && \text{für alle } (r, z) \in \Omega \end{aligned}$$

erfüllt und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_r &= 0 && \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_{1r}^e \\ u_z &= 0 && \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_{1z}^e \\ \sigma_{rr} n_r + \sigma_{rz} n_z &= g_{2r}^e && \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_{2r}^e \\ \sigma_{zr} n_r + \sigma_{zz} n_z &= g_{2z}^e && \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_{2z}^e \end{aligned}$$

genügt. Die Komponenten des Spannungstensors sind durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda_e (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu_e \varepsilon_{rr} - (3\lambda_e + 2\mu_e) \alpha_l T \\ \sigma_{zz} &= \lambda_e (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu_e \varepsilon_{zz} - (3\lambda_e + 2\mu_e) \alpha_l T \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{zr} = 2\mu_e \varepsilon_{rz} \end{aligned}$$

mit den Verzerrungen (1.31) definiert.

Die Ränder  $\Gamma_{1r}^e$ ,  $\Gamma_{1z}^e$ ,  $\Gamma_{2r}^e$  und  $\Gamma_{2z}^e$  sind durch

$$\begin{aligned}\Gamma_{1r}^e &= \{(r, z) \in \partial\Omega : r = 0\}, \\ \Gamma_{2r}^e &= \partial\Omega \setminus \Gamma_{1r}^e = \Gamma_{21r}^e \cup \Gamma_{22r}^e, \quad \Gamma_{21r}^e = \{(r, z) \in \partial\Omega : z = 0\}, \\ \Gamma_{1z}^e &= \{(r, z) \in \partial\Omega : z = 0\}, \\ \Gamma_{2z}^e &= \partial\Omega \setminus \Gamma_{1z}^e = \Gamma_{21z}^e \cup \Gamma_{22z}^e, \quad \Gamma_{21z}^e = \{(r, z) \in \partial\Omega : r = 0\}\end{aligned}$$

gegeben. Weiterhin gilt

$$g_{2r}^e = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{21r}^e \quad \text{und} \quad g_{2z}^e = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{21z}^e.$$

Auf den Teilrändern  $\Gamma_{22r}^e$  und  $\Gamma_{22z}^e$  sind die Funktionen  $g_{2r}^e$  sowie  $g_{2z}^e$  durch den Gasdruck gegeben.

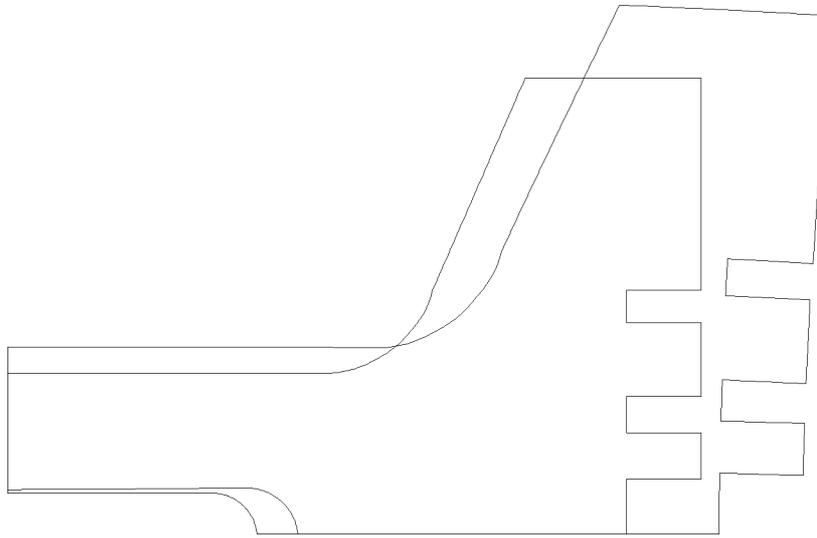


Abbildung 1.10: Darstellung der Deformation der Kontur (stark vergrößert)

## Kapitel 2

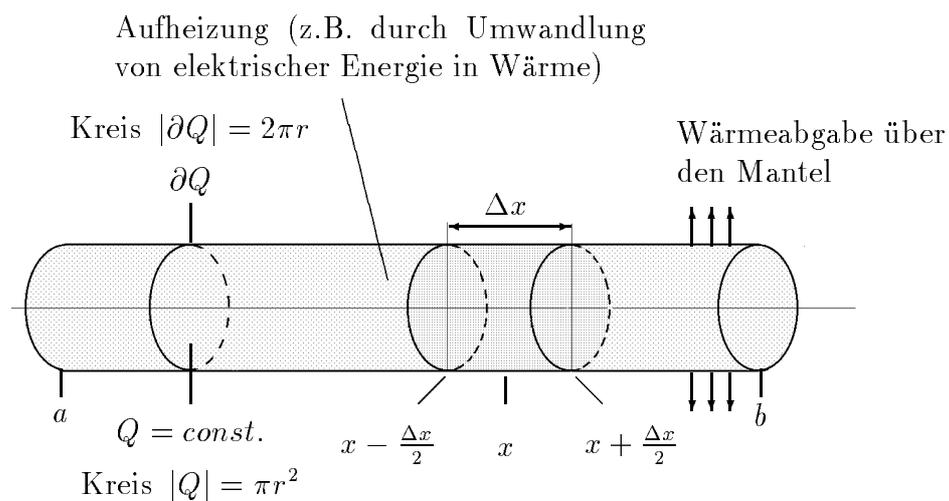
# Modellierung am Beispiel von Temperaturfeldern

## 2.1 Stationäre Wärmeleitprobleme

### 2.1.1 Das stationäre 1D-Wärmeleitproblem

- *Physikalisches Problem*

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , in einem hinreichend dünnen Stab der Länge  $l = b - a$  mit konstantem Querschnitt  $Q$  (z.B. Draht), wobei  $l \gg \varnothing Q$  ist.



$g_a$

Temperatur im linken  
Randpunkt

$$u(a) = g_a$$

$$u_A = u_A(x)$$

Umgebungstemperatur

$g_b$

Temperatur im rechten  
Randpunkt

$$u(b) = g_b$$

Abbildung 2.1: Einflüsse auf die Temperaturverteilung im Stab

- Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Stabstück der Länge  $\Delta x$  (später  $\Delta x \rightarrow 0$ )

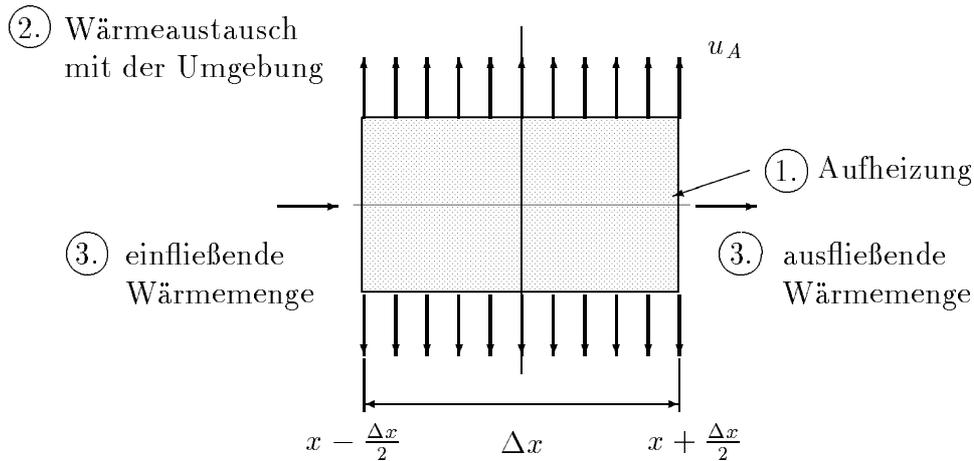


Abbildung 2.2: Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Stabstück

1. Wärmemenge, die durch Aufheizung entsteht:

$$W_H = |Q| \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} f(\xi) d\xi ,$$

wobei  $f(\xi)$  die Funktion der Intensität der Wärmequelle bezeichnet.

2. Transportierte Wärmemenge beim Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Mantel:

$$W_A = |\partial Q| \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} q(\xi) (u(\xi) - u_A(\xi)) d\xi = |Q| \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} \underbrace{\frac{|\partial Q|}{|Q|}}_{\bar{q}(\xi)} q(\xi) (u(\xi) - u_A(\xi)) d\xi .$$

Der Wärmeaustauschkoeffizient  $q(\xi)$  ist materialabhängig.

3. Wärmemenge, die am linken Rand des Stabstückes, d.h. bei  $(x - \frac{\Delta x}{2})$ , in „ $\Delta x$ “ hineinfließt bzw. am rechten Rand, d.h. bei  $(x + \frac{\Delta x}{2})$ , aus „ $\Delta x$ “ herausfließt:

Nach dem *Fourierschen Erfahrungsgesetz der Wärmeleitung* (siehe [17]) ist der Wärmefluß  $\sigma(x)$  proportional zum negativen Temperaturgradienten  $-u'(x)$ . Führen wir als Proportionalitätsfaktor die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(x)$  ein, dann gilt

$$\sigma(x) = -\lambda(x) u'(x) .$$

Somit ergibt sich für die einfließende Wärmemenge

$$W(x - \frac{\Delta x}{2}) = -\lambda(x - \frac{\Delta x}{2}) u'(x - \frac{\Delta x}{2}) |Q|$$

und für die ausfließende Wärmemenge

$$W(x + \frac{\Delta x}{2}) = -\lambda(x + \frac{\Delta x}{2}) u'(x + \frac{\Delta x}{2}) |Q| .$$

Aus der Wärmemengebilanz

$$\begin{array}{ccccccc}
 \boxed{\begin{array}{l} \text{Wärmemenge,} \\ \text{die am linken} \\ \text{Rand, d.h. bei} \\ (x - \frac{\Delta x}{2}), \text{ in} \\ \text{„}\Delta x\text{“ hinein-} \\ \text{fließt} \end{array}} & - & \boxed{\begin{array}{l} \text{Wärmemenge,} \\ \text{die am rechten} \\ \text{Rand, d.h. bei} \\ (x + \frac{\Delta x}{2}), \text{ aus} \\ \text{„}\Delta x\text{“ heraus-} \\ \text{fließt} \end{array}} & - & \boxed{\begin{array}{l} \text{Wärmemenge,} \\ \text{die über den} \\ \text{Mantel abge-} \\ \text{geben wird} \end{array}} & + & \boxed{\begin{array}{l} \text{Wärmemenge,} \\ \text{die durch Auf-} \\ \text{heizung ent-} \\ \text{steht} \end{array}} & = & 0
 \end{array} \tag{2.1}$$

$$W(x - \frac{\Delta x}{2}) - W(x + \frac{\Delta x}{2}) - W_A + W_H = 0$$

erhalten wir die integrale Form der Wärmeleitgleichung.

• *Die Wärmeleitgleichung in integraler Form*

Für alle  $x \in (a, b)$  und für alle  $\Delta x > 0$ , für die  $[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}] \subset (a, b)$ , gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & -\lambda(x - \frac{\Delta x}{2})u'(x - \frac{\Delta x}{2})|Q| + \lambda(x + \frac{\Delta x}{2})u'(x + \frac{\Delta x}{2})|Q| \\
 & - |Q| \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} \bar{q}(\xi)(u(\xi) - u_A(\xi)) d\xi = - |Q| \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} f(\xi) d\xi
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

und in den Randpunkten sind die Randbedingungen  $u(a) = g_a$  sowie  $u(b) = g_b$  vorgegeben.

• *Die differentielle Form der Wärmeleitgleichung bei homogenem Material und stetiger Wärmequelle*

Wir gehen von folgenden Voraussetzungen aus:

1.  $q \in C[a, b]$ , d.h.  $q(x)$  ist eine stetige Funktion im Intervall  $[a, b]$ ;  $q \geq 0$ , z.B.  $q = \text{const.} \geq 0$  ( $q = 0$  entspricht einer Isolation)
2.  $\lambda \in C^1(a, b)$ , d.h.  $\lambda(x)$  ist eine stetig differenzierbare Funktion im Intervall  $(a, b)$ ;  $\lambda(x) \geq \lambda_0 = \text{const.} > 0$ , z.B.  $\lambda = \text{const.}$
3.  $f \in C[a, b]$ , d.h.  $f(x)$  ist eine stetige Funktion im Intervall  $[a, b]$
4.  $u_A \in C[a, b]$ , d.h.  $u_A(x)$  ist eine stetige Funktion im Intervall  $[a, b]$

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe [19]) folgt, daß für eine beliebige Funktion  $v(x) \in C[a, b]$  und für ein beliebiges  $x \in (a, b)$  die Beziehung

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} v(\xi) d\xi = v(x) \tag{2.4}$$

gilt.

Multiplizieren wir die Gleichung (2.2) mit  $-1$  und dividieren sie durch  $\Delta x$  sowie  $|Q|$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \frac{\lambda(x + \frac{\Delta x}{2})u'(x + \frac{\Delta x}{2}) - \lambda(x - \frac{\Delta x}{2})u'(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x} \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} \bar{q}(\xi)u(\xi) d\xi \\ & = \frac{1}{\Delta x} \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\Delta x} \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} \bar{q}(\xi)u_A(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Mit  $\Delta x \rightarrow 0$  ergibt sich auf Grund der Voraussetzungen (2.3) und der Beziehung (2.4) die Differentialgleichung

$$-(\lambda(x)u'(x))' + \bar{q}(x)u(x) = f(x) + \bar{q}(x)u_A(x).$$

**Bemerkung 2.1** Aus den Voraussetzungen 1. bis 4. folgt, daß  $\sigma \in C^1(a, b)$ , d.h. der Wärmefluß ist eine stetig differenzierbare Funktion im Intervall  $(a, b)$ , und  $u \in C^2(a, b)$ , d.h. die Temperatur ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion im Intervall  $(a, b)$ .

Die klassische differentielle Form der Wärmeleitgleichung lautet

Gesucht ist  $u(x) \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ , so daß

$$-(\lambda(x)u'(x))' + \bar{q}(x)u(x) = f(x) + \bar{q}(x)u_A(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b) \quad (2.5)$$

gilt sowie die Randbedingungen  $u(a) = g_a$  und  $u(b) = g_b$  erfüllt werden.

- Die differentielle Form der Wärmeleitgleichung bei stückweise homogenem Material und stückweise stetiger Wärmequelle

Wir betrachten o.B.d.A. einen Stab, bestehend aus zwei Materialien.

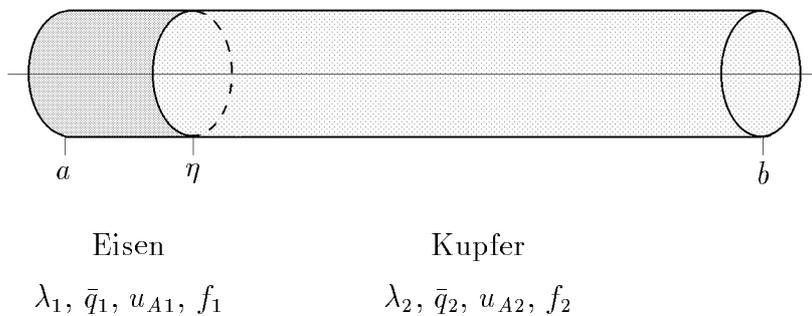


Abbildung 2.3: Stab, bestehend aus zwei verschiedenen Materialien

Dabei setzen wir voraus, daß  $\lambda_1, \bar{q}_1, u_{A1}$  und  $f_1$  die Voraussetzungen (2.3) im Intervall  $(a, \eta)$  sowie  $\lambda_2, \bar{q}_2, u_{A2}$  und  $f_2$  diese Voraussetzungen im Intervall  $(\eta, b)$  erfüllen.

Eine zur Herleitung der Wärmeleitgleichung (2.5) analoge Vorgehensweise liefert die Randwertaufgabe für die Wärmeleitung bei stückweise homogenem Material und stückweise stetiger Wärmequelle.

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x)$ , für das die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Randbedingung} & u(a) = g_a & \text{für } x = a \\
 \text{Differentialgleichung} & -(\lambda_1 u')' + \bar{q}_1 u = f_1 + \bar{q}_1 u_{A1} & \text{für alle } x \in (a, \eta) \\
 \text{Interfacebedingungen} & u(\eta - 0) = u(\eta + 0) & \text{für } x = \eta \\
 & -\lambda_1(\eta - 0)u'(\eta - 0) = -\lambda_2(\eta + 0)u'(\eta + 0) & \text{für } x = \eta \\
 \text{Differentialgleichung} & -(\lambda_2 u')' + \bar{q}_2 u = f_2 + \bar{q}_2 u_{A2} & \text{für alle } x \in (\eta, b) \\
 \text{Randbedingung} & u(b) = g_b & \text{für } x = b
 \end{array}$$

Die Interfacebedingung  $-\lambda_1(\eta - 0)u'(\eta - 0) = -\lambda_2(\eta + 0)u'(\eta + 0)$  folgt unmittelbar aus der Gleichung (2.2) für  $x = \eta$  und  $\Delta x \rightarrow 0$ .

### Bemerkung 2.2 Möglichkeiten zur Formulierung von Randbedingungen

- Randbedingungen 1. Art: Vorgabe der Funktion  $u$  (Temperatur) am Rand (Dirichletsche RB)
- Randbedingungen 2. Art: Vorgabe des Wärmeflusses am Rand (Neumannsche RB):
 
$$\begin{aligned}
 \lambda(a)u'(a) &= g_a \\
 -\lambda(b)u'(b) &= g_b
 \end{aligned}$$
- Randbedingungen 3. Art: Freier Wärmeübergang  
 Der Wärmefluß ist proportional zur Differenz zwischen dem Wert der Temperatur am Rand und der Umgebungstemperatur.
 
$$\begin{aligned}
 \lambda(a)u'(a) &= \alpha_a(u(a) - u_a) \\
 -\lambda(b)u'(b) &= \alpha_b(u(b) - u_b)
 \end{aligned}$$
 Dabei bezeichnen  $\alpha_a$  und  $\alpha_b$  die Wärmeübergangszahlen sowie  $u_a$  und  $u_b$  die Außentemperatur am linken bzw. rechten Rand
- Gemischte Randbedingungen: z.B.  $u(a) = g_a, u'(b) = 0$  oder  $u'(a) = 0, -\lambda(b)u'(b) = \alpha_b(u(b) - u_b)$

### Bemerkung 2.3 Modellierung von Punktquellen

Im Punkt  $x = \eta_p$  sei eine Wärmequelle der Intensität  $\hat{f}$  konzentriert. Aus der Wärmebilanz

$$\begin{aligned}
 & -\lambda(\eta_p - \frac{\Delta\eta_p}{2})u'(\eta_p - \frac{\Delta\eta_p}{2})|Q| + \lambda(\eta_p + \frac{\Delta\eta_p}{2})u'(\eta_p + \frac{\Delta\eta_p}{2})|Q| \\
 & - |Q| \int_{\eta_p - \frac{\Delta\eta_p}{2}}^{\eta_p + \frac{\Delta\eta_p}{2}} \bar{q}(\xi)(u(\xi) - u_A(\xi)) d\xi = - |Q| \int_{\eta_p - \frac{\Delta\eta_p}{2}}^{\eta_p + \frac{\Delta\eta_p}{2}} f(\xi) d\xi - |Q| \int_{\eta_p - \frac{\Delta\eta_p}{2}}^{\eta_p + \frac{\Delta\eta_p}{2}} \hat{f}\delta(\xi - \eta_p) d\xi
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

ergibt sich für  $\Delta\eta_p \rightarrow 0$  die Beziehung

$$-\lambda(\eta_p - 0)u'(\eta_p - 0) = -\lambda(\eta_p + 0)u'(\eta_p + 0) - \hat{f}.$$

Hier bezeichnet  $\delta(\xi - \eta_p)$  die *Diracsche Deltafunktion* (siehe auch [55, 88]).

Bei homogenem Material und einer Punktquelle im Punkt  $x = \eta_p$  erhalten wir somit die im folgenden formulierte Randwertaufgabe.

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x)$ , für das die Beziehungen

Randbedingung	$u(a) = g_a$	für $x = a$
Differentialgleichung	$-(\lambda u')' + \bar{q}u = f + \bar{q}u_A$	für alle $x \in (a, \eta_p)$
Interfacebedingungen	$u(\eta - 0) = u(\eta + 0)$	für $x = \eta_p$
	$-\lambda(\eta - 0)u'(\eta - 0) = -\lambda(\eta + 0)u'(\eta + 0) - \hat{f}$	für $x = \eta_p$
Differentialgleichung	$-(\lambda u')' + \bar{q}u = f + \bar{q}u_A$	für alle $x \in (\eta_p, b)$
Randbedingung	$u(b) = g_b$	für $x = b$

gelten.

### 2.1.2 Das stationäre 2D-Wärmeleitproblem

- *Physikalisches Problem*

Gesucht ist die Temperaturverteilung  $u(x_1, x_2)$  in einer hinreichend dünnen Platte mit einer konstanten Dicke  $h$ .

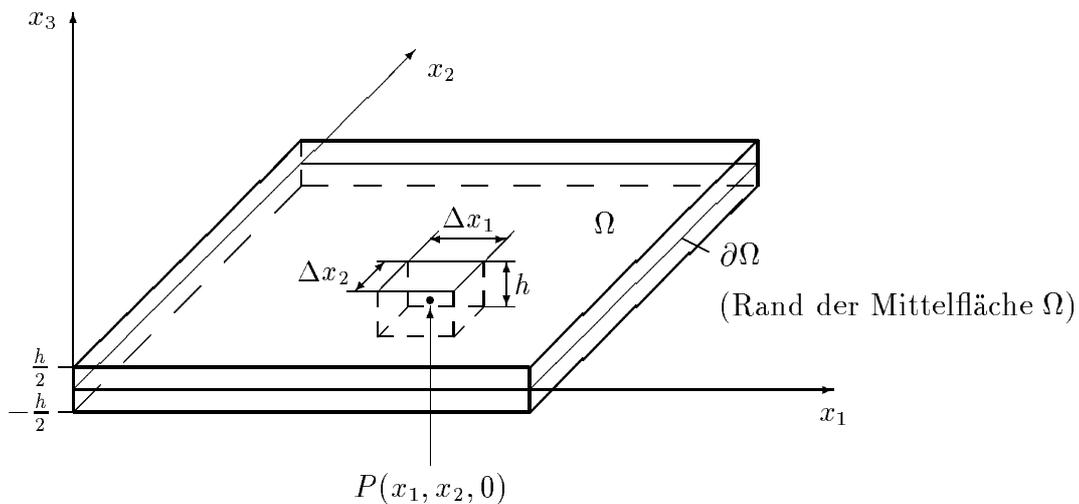


Abbildung 2.4: Platte mit konstanter Dicke  $h$

- Wärmemengebilanz an „kleinem“ Quader „ $\Delta x_1 \times \Delta x_2 \times h$ “ im Punkt  $P(x_1, x_2, 0)$  für ein beliebiges  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ :

Wir setzen voraus, daß der Wärmefluß über der Höhe der Platte konstant bleibt, d.h.  $\sigma = \sigma(x_1, x_2)$  ist von  $x_3$  unabhängig.

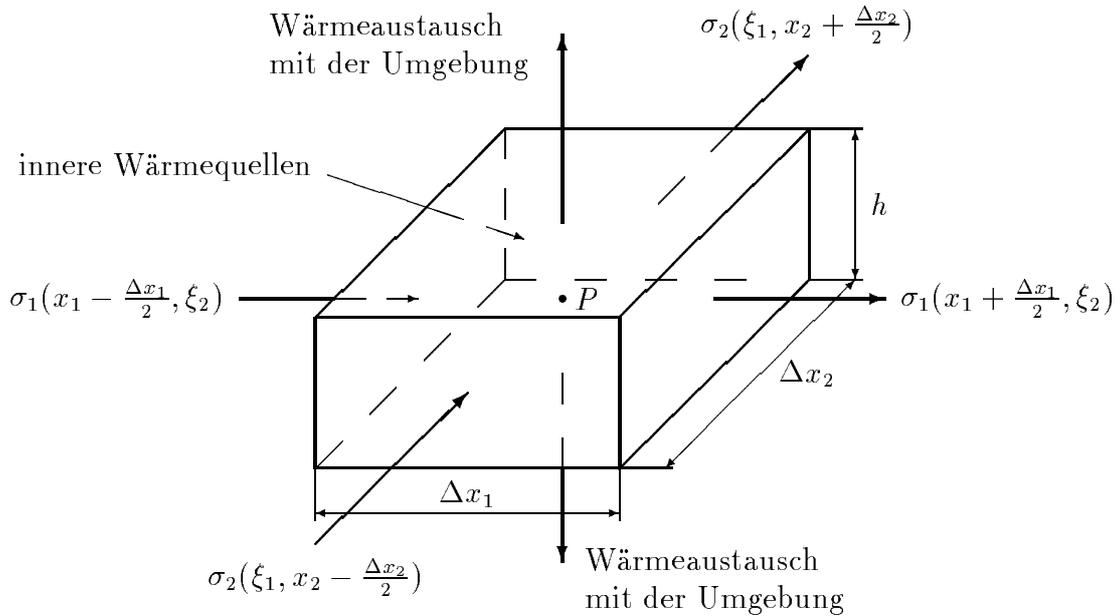


Abbildung 2.5: Wärmemengebilanz an einem Quader „ $\Delta x_1 \times \Delta x_2 \times h$ “

Für alle  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$  und für alle  $\Delta x_1, \Delta x_2 > 0$  mit  $\{(y_1, y_2) : x_\alpha - \frac{\Delta x_\alpha}{2} \leq y_\alpha \leq x_\alpha + \frac{\Delta x_\alpha}{2}, \alpha = 1, 2\} \subset \Omega$  erhalten wir die Wärmeleitgleichung in integraler Form

$$\begin{aligned}
 & h \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \sigma_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2) d\xi_2 - h \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \sigma_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2) d\xi_2 \\
 & + h \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \sigma_2(\xi_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}) d\xi_1 - h \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \sigma_2(\xi_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}) d\xi_1 \quad (2.7) \\
 & - 2 \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} q(\xi_1, \xi_2)(u - u_A) d\xi_2 d\xi_1 + h \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Zusätzlich sind noch die Randbedingungen auf  $\partial\Omega$  vorgegeben.

Nach dem *Fourierschen Erfahrungsgesetz der Wärmeleitung* gilt für ein orthotropes Material

$$\sigma_1 = -\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = -\lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

mit den Wärmeleitkoeffizienten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

In Analogie zum eindimensionalen stationären Wärmeleitproblem stellen wir an die Eingangsdaten die folgenden Voraussetzungen:

1.  $\lambda_1(x), \lambda_2(x) \in C^1(\Omega)$ , d.h.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind einmal stetig differenzierbare Funktionen über dem Gebiet  $\Omega$ ;  $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 = \text{const.} > 0$
2.  $f(x) \in C(\overline{\Omega})$ , d.h.  $f$  ist eine stetige Funktion über  $\overline{\Omega}$
3.  $q(x) \in C(\overline{\Omega})$ ,  $q(x) \geq 0$
4.  $u_A(x) \in C(\overline{\Omega})$ .

Multiplizieren wir die Gleichung (2.7) mit  $-1/(h\Delta x_1\Delta x_2)$  und lassen  $\Delta x_1$  sowie  $\Delta x_2$  gegen Null streben, dann erhalten wir die Wärmeleitgleichung in differentieller Form:

Gesucht ist  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , so daß

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \bar{q}(x)u(x) = f(x) + \bar{q}(x)u_A(x) \quad (2.8)$$

für alle  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$

$$u(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega$$

mit  $\bar{q} = 2q/h$  gilt.

**Bemerkung 2.4** Weitere Möglichkeiten zur Formulierung von Randbedingungen

– Randbedingungen 2. Art:

(a) Wärmeisolation: 
$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega$$

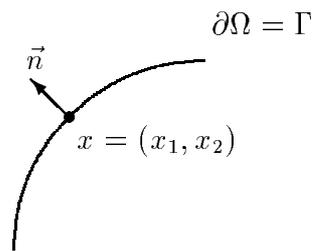
(b) vorgegebener Wärmefluß: 
$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = g_2 \quad \text{auf } \Gamma$$

Dabei bezeichnen  $\vec{n}(x) = (n_1(x), n_2(x))^T$  ( $|\vec{n}| = 1$ ) den Vektor der äußeren Einheitsnormalen im Punkt  $x = (x_1, x_2) \in \Gamma$  und  $\lambda_1(x)$  sowie  $\lambda_2(x)$  die Wärmeleitkoeffizienten.

– Randbedingungen 3. Art: Freier Wärmeaustausch mit der Umgebung

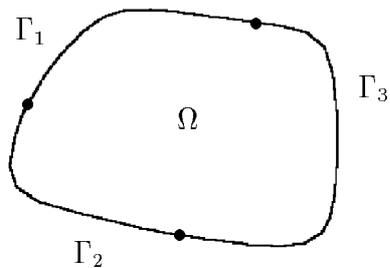
$$-\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = \alpha(u - u_A) \quad \text{auf } \Gamma$$

Es bezeichnen  $\alpha(x)$  die Wärmeübergangszahl und  $u_A(x)$  die Umgebungstemperatur.

Abbildung 2.6: Vektor der äußeren Einheitsnormalen am Rand  $\Gamma$ 

– Gemischte Randbedingungen

Auf  $\Gamma_1$  sind Randbedingungen 1. Art, auf  $\Gamma_2$  Randbedingungen 2. Art und auf  $\Gamma_3$  Randbedingungen 3. Art vorgegeben.



$$\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3,$$

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, i, j = 1, 2, 3$$

Abbildung 2.7: Darstellung des Randes  $\Gamma$  als Vereinigung der Teilränder  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ 

**Bemerkung 2.5** Ein Spezialfall

Für thermisch isotropes, homogenes Material, d.h.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \text{const.} > 0$ , sowie  $q \equiv 0$  erhält man aus der Gleichung (2.8) die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f/\lambda$$

mit den jeweils vorgegebenen Randbedingungen.

### 2.1.3 Das stationäre 3D-Wärmeleitproblem und einige Spezialfälle

- *Physikalisches Problem*

Gesucht ist das stationäre Temperaturfeld  $u(x)$  in einem dreidimensionalen Körper, der das beschränkte Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  einnimmt.

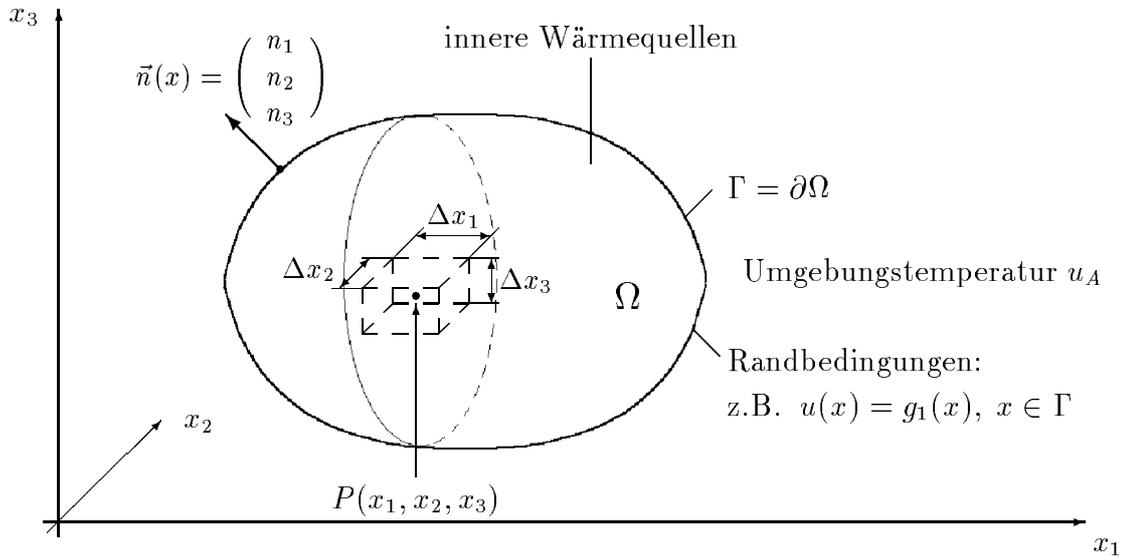


Abbildung 2.8: Skizze eines 3D-Körpers

- *Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Quader „ $\Delta x_1 \times \Delta x_2 \times \Delta x_3$ “ mit dem Schwerpunkt  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$*

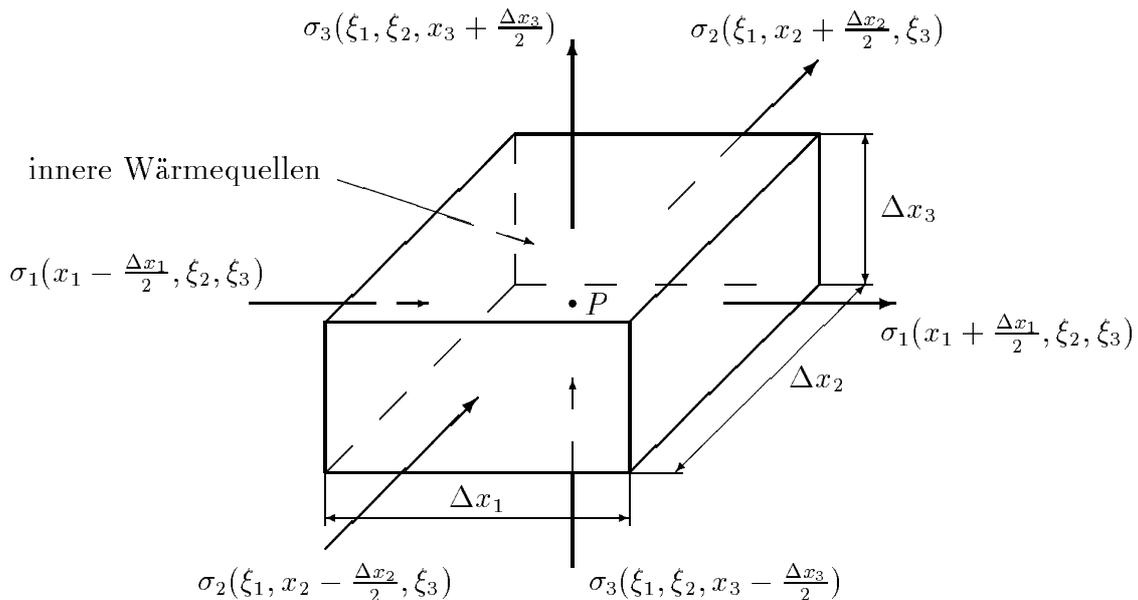


Abbildung 2.9: Wärmemengebilanz an einem Quader „ $\Delta x_1 \times \Delta x_2 \times \Delta x_3$ “

Für alle  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  und für alle  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 > 0$  mit  $\{(y_1, y_2, y_3) : x_\alpha - \frac{\Delta x_\alpha}{2} \leq y_\alpha \leq x_\alpha + \frac{\Delta x_\alpha}{2}, \alpha = 1, 2, 3\} \subset \Omega$  gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \sigma_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 d\xi_2 - \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \sigma_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 d\xi_2 \\
& + \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \sigma_2(\xi_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, \xi_3) d\xi_3 d\xi_1 - \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \sigma_2(\xi_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, \xi_3) d\xi_3 d\xi_1 \\
& + \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \sigma_3(\xi_1, \xi_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}) d\xi_2 d\xi_1 - \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \sigma_3(\xi_1, \xi_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}) d\xi_2 d\xi_1 \\
& + \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Zusätzlich sind noch die Randbedingungen auf  $\partial\Omega$  vorgegeben.

Auf Grund des *Fourierschen Erfahrungsgesetzes der Wärmeleitung* gelten für ein orthotropes Material die Beziehungen

$$\sigma_i = -\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Unter den Voraussetzungen:

1.  $\lambda_i(x) \in C^1(\Omega)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , d.h. die  $\lambda_i$  sind einmal stetig differenzierbare Funktionen über dem Gebiet  $\Omega$ ,  $\lambda_i \geq \lambda_0 = \text{const.}$ ,  $\lambda_0 > 0$  und
2.  $f(x) \in C(\bar{\Omega})$ , d.h.  $f$  ist eine stetige Funktion über  $\bar{\Omega}$ ,

erhalten wir nach der Multiplikation der Gleichung (2.9) mit  $-1/(\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)$  und dem Grenzübergang  $\Delta x_1 \rightarrow 0$ ,  $\Delta x_2 \rightarrow 0$  sowie  $\Delta x_3 \rightarrow 0$  die Wärmeleitgleichung in differentieller Form:

Gesucht ist  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , so daß

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) = f(x) \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \tag{2.10}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega$$

gilt.

**Bemerkung 2.6** Möglichkeiten zur Formulierung anderer Randbedingungen

- Vorgabe des Wärmeflusses (Randbedingungen 2. Art)

$$-\frac{\partial u}{\partial N} := - \underbrace{\sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i(x)}_{\text{Konormalenableitung}} = g_2(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma = \partial\Omega$$

- Freier Wärmeaustausch mit der Umgebung (Randbedingungen 3. Art)

$$-\frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(x) (u(x) - u_A(x)) \quad \text{für alle } x \in \Gamma$$

Es bezeichnen  $\alpha(x)$  die Wärmeübergangszahl und  $u_A(x)$  die Umgebungstemperatur.

- Gemischte Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x) &= g_1(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_1 \\ -\frac{\partial u}{\partial N} &= g_2(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_2 \\ -\frac{\partial u}{\partial N} &= \alpha(x) (u(x) - u_A(x)) && \text{für alle } x \in \Gamma_3 \end{aligned}$$

Dabei ist  $\partial\Omega = \Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ ,  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

**Bemerkung 2.7** Eine weitere Möglichkeit zur Herleitung der Wärmeleitgleichung und einige Spezialfälle hinsichtlich der Wärmeleitkoeffizienten

1. Herleitung der Wärmeleitgleichung mittels des Gaußschen Integralsatzes:

Wir betrachten ein beliebiges Teilgebiet  $G \subset \Omega$  mit  $\bar{G} \subset \Omega$  (falls  $\partial G \subset \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  gilt, sind Sonderbetrachtungen notwendig).

Aus der Wärmemengebilanz

$$-\int_{\partial G} \left( -\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} n_i \right) ds + \int_G f(\xi) d\xi = 0$$

folgt nach dem Integralsatz von Gauß–Ostrogradski (siehe z.B. [18])

$$-\int_G \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \lambda_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right) \right) d\xi = \int_G f(\xi) d\xi \quad \text{für alle } G \subset \Omega \text{ mit } \bar{G} \subset \Omega.$$

Hieraus erhalten wir die Differentialgleichung

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Zusätzlich müssen die Randbedingungen formuliert werden.

2. Für ein homogenes, isotropes Material, d.h.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = \text{const.}$  in  $\Omega$ , geht die Gleichung (2.10) in die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \bar{f}(x) & \text{für alle } x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) & \text{für alle } x \in \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

mit dem LAPLACE-Operator  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$  und  $\bar{f}(x) = f(x)/\lambda$  über.

3. Inhomogenes, anisotropes Material (Materialsprünge):

- Die Wärmeleitgleichung in integraler Form gilt nach wie vor!
- Die Differentialgleichung gilt nur in Teilgebieten mit „glatten“ Daten. Zusätzlich müssen die Übergangsbedingungen am Interface gestellt werden, d.h. die Temperatur und der Wärmefluß sind stetig.

• *Spezialfälle bei 3D-Wärmeleitproblemen*

1. Lange „zylinderartige“ Körper mit von  $x_3$  unabhängigen Daten

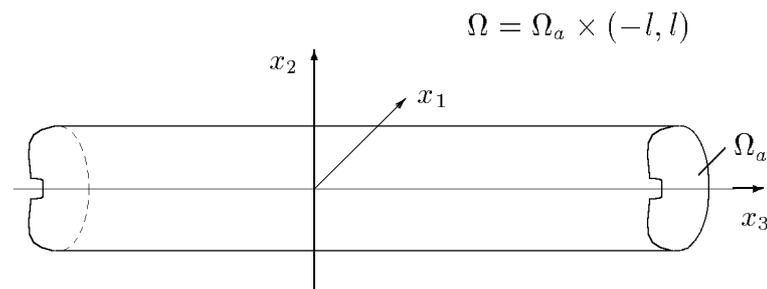


Abbildung 2.10: Beispiel für einen „zylinderartigen“ Körper

Somit muß die Lösung von  $x_3$  unabhängig sein. Aus der Aufgabe (2.10) ergibt sich deshalb die folgende Aufgabe:

Gesucht ist  $u(x) \in C^2(\Omega_a) \cap C(\bar{\Omega}_a)$ , so daß

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= f(x) & \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \Omega_a \\ u(x) &= g_1(x) & \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega_a \end{aligned}$$

gilt.

2. Rotationssymmetrische Probleme, d.h. rotationssymmetrisches Gebiet und Unabhängigkeit der Eingangsdaten vom Rotationswinkel

Wir gehen von den kartesischen Koordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  zu Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  über ( $\Omega \rightarrow \Omega_a \times [0, 2\pi)$ ) und erhalten aus (2.10) mit  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  die Aufgabe:

Gesucht ist  $u(r, z)$ , so daß

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(r, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f(r, z) \quad \text{für alle } (r, z) \in \Omega_a$$

$$u(r, z) = g_1(r, z) \quad \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_1,$$

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_a \setminus \Gamma_R$$

$$-\lambda(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} n_r(r, z) - \lambda(r, z) \frac{\partial u}{\partial z} n_z(r, z) = 0 \quad \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_R$$

gilt.

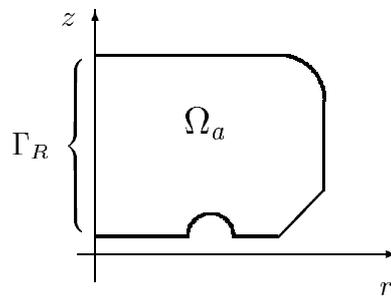


Abbildung 2.11: Meridianebene  $\Omega_a$  eines rotationssymmetrischen Körpers

## 2.2 Instationäre Wärmeleitprobleme

### 2.2.1 Das instationäre 1D-Wärmeleitproblem

- *Physikalisches Problem*

Gesucht ist ein sich zeitlich änderndes (instationäres) Temperaturfeld  $u(x, t)$  in einem hinreichend dünnen Stab der Länge  $l = b - a$ , d.h.  $x \in (a, b)$ , während der Zeit  $t \in \mathbb{T} = (0, T)$ .

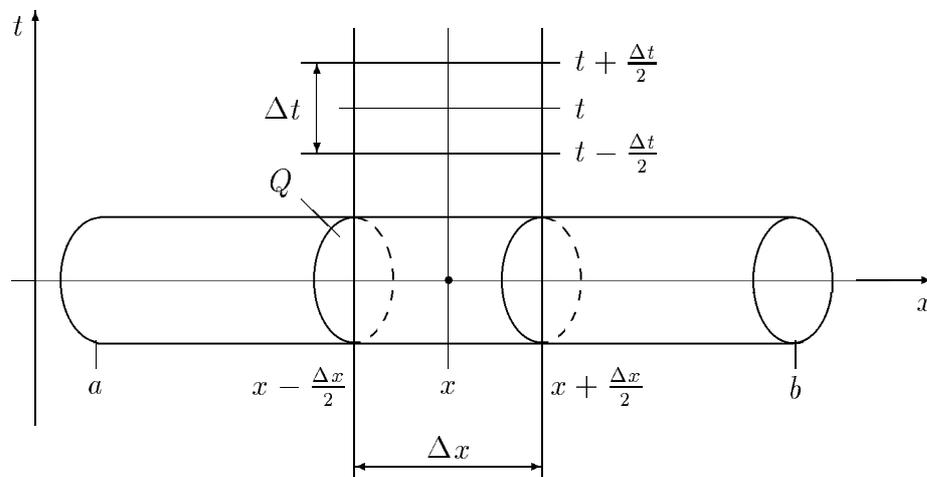


Abbildung 2.12: Instationäre Wärmeleitung im Stab

• *Wärmemengebilanz in Raum und Zeit*

Wir stellen die Wärmemengebilanz an einem „kleinen“ Stabstück der Länge  $\Delta x$  während der Zeitspanne  $\Delta t$  (später „Momentaufnahme“, d.h.  $\Delta t \rightarrow 0$  und  $\Delta x \rightarrow 0$ ) auf.

Wärmemenge, die am linken Rand, d.h. bei $x - \frac{\Delta x}{2}$ , in „ $\Delta x$ “ während der Zeitspanne $\Delta t$ hineinfließt	-	Wärmemenge, die am rechten Rand, d.h. bei $x + \frac{\Delta x}{2}$ , aus „ $\Delta x$ “ während der Zeitspanne $\Delta t$ herausfließt	-	Wärmemenge, die über den Mantel während der Zeit- spanne $\Delta t$ abgege- ben wird
$-  Q  \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big _{x-\frac{\Delta x}{2}} d\theta +  Q  \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big _{x+\frac{\Delta x}{2}} d\theta -  Q  \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \bar{q}(u - u_A) d\xi d\theta$				
+		Wärmemenge, die durch Aufheizung während der Zeit- spanne $\Delta t$ entsteht	=	Wärmemengendifferenz in „ $\Delta x$ “ zwischen End- und Anfangszeit
$+  Q  \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f d\xi d\theta =  Q  \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} c\rho (u(\xi, t+\frac{\Delta t}{2}) - u(\xi, t-\frac{\Delta t}{2})) d\xi$				

Hier bezeichnen  $\rho$  die Dichte,  $c$  die spezifische Wärmekapazität,  $\lambda$  den Wärmeleitkoeffizienten und  $\bar{q} = \frac{|\partial Q|}{|Q|} q$  den spezifischen Wärmeaustauschkoeffizienten.

Die Wärmemengebilanz liefert die instationäre Wärmeleitgleichung in integraler Form.

Für alle  $x \in (a, b)$  und für alle  $\Delta x > 0$  mit  $[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}] \subset (a, b)$  sowie für alle  $t \in (0, T)$  und für alle  $\Delta t > 0$  mit  $[t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}] \subset (0, T)$  gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} c\rho (u(\xi, t + \frac{\Delta t}{2}) - u(\xi, t - \frac{\Delta t}{2})) d\xi - \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}} \right) d\theta \\
 & + \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \bar{q}(\xi, \theta) (u(\xi, \theta) - u_A(\xi, \theta)) d\xi d\theta = \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi, \theta) d\xi d\theta.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Zusätzlich sind die Randbedingungen (z.B. 1. Art)

$$u(a, t) = g_a(t) \quad \text{und} \quad u(b, t) = g_b(t) \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b)$$

gegeben.

- *Übergang zur differentiellen Form*

Multiplizieren wir die Gleichung (2.11) mit  $1/(\Delta t \Delta x)$  und lassen  $\Delta x$  sowie  $\Delta t$  gegen Null streben, dann erhalten wir bei glatten Eingangsdaten (z.B. homogenes Material, stetig verteilte Wärmequelle, siehe auch die Voraussetzungen (2.3)) die differentielle Form der instationären Wärmeleitgleichung.

Gesucht ist  $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ , so daß

$$c(x, t) \varrho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{q}(x, t) u(x, t) = f(x, t) + \bar{q}(x, t) u_A(x, t) \quad (2.12)$$

für alle  $(x, t) \in Q_T$

gilt und die Randbedingungen (z.B. 1. Art)

$$\left. \begin{aligned} u(a, t) &= g_a(t) \\ u(b, t) &= g_b(t) \end{aligned} \right\} \text{ für alle } t \in [0, T]$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b)$$

erfüllt werden.

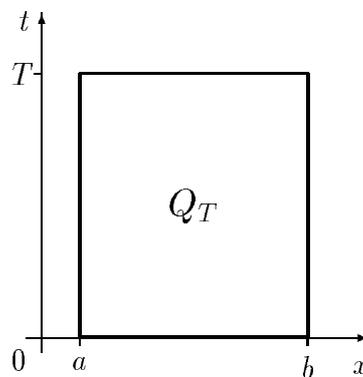


Abbildung 2.13: Raum-Zeit-Zylinder  $Q_T = (a, b) \times (0, T)$

**Bemerkung 2.8** Der Raum  $C^{2,1}(Q_T)$  umfaßt alle Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar bezüglich des Ortes  $x \in (a, b)$  und einmal stetig differenzierbar bezüglich der Zeit  $t \in (0, T)$  sind.

**Bemerkung 2.9** Analog zu der stationären Wärmeleitgleichung können auch bei der instationären Wärmeleitgleichung Randbedingungen 2. Art oder 3. Art bzw. gemischte Randbedingungen gestellt werden.

**Bemerkung 2.10** Für die Existenz einer *klassischen* Lösung, d.h. Lösung der Aufgabe (2.12), ist die *Kompatibilität* zwischen der Anfangsbedingung und den Randbedingungen notwendig, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow +0} g_a(t) = u_0(a) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +0} g_b(t) = u_0(b)$$

**Bemerkung 2.11** Für  $c, \rho, \lambda = \text{const.}$  und  $q = 0$  erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f} \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad \bar{f} = \frac{f}{c\rho}.$$

Nach der Substitution

$$x' = \frac{x}{k} \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x'} \right)$$

ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = \bar{f}.$$

### 2.2.2 Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall und auf Wärmeleit-Wärmetransportprobleme

- *Der mehrdimensionale Fall (2D, 3D) –  $\Omega \subset \mathbb{R}^m, m = 2, 3$*

Die Herleitung der Wärmeleitgleichung in differentieller Form erfolgt analog zum 1D-Fall, vgl. auch die Abschnitte 2.2.1 und 2.1.2 bzw. 2.1.3.

Gesucht ist  $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ , so daß

$$c(x, t) \rho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x, t) \quad (2.13)$$

für alle  $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$

gilt und die Randbedingungen (z.B. 1. Art)

$$u(x, t) = g_1(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

erfüllt werden ( $x = (x_1, x_2)$  bzw.  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ).

**Bemerkung 2.12** Der Raum  $C^{2,1}(Q_T)$  umfaßt alle Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar bezüglich des Ortes  $x \in \Omega$  und einmal stetig differenzierbar bezüglich der Zeit  $t \in (0, T)$  sind.

**Bemerkung 2.13** Analog zu der stationären Wärmeleitgleichung können auch bei der instationären Wärmeleitgleichung Randbedingungen 2. Art oder 3. Art bzw. gemischte Randbedingungen gestellt werden.

• *Instationäre (stationäre) Wärmeleit–Wärmetransportprobleme*

Gesucht ist  $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ , so daß

$$\begin{aligned}
 c(x, t)\varrho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)}_{\text{Wärmeleitung}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\text{Wärmetransport}} + \underbrace{\bar{q}(x, t)u(x, t)}_{\substack{\text{nur im 1D- bzw.} \\ \text{im 2D-Fall}}} \\
 = f(x, t) + \underbrace{\bar{q}(x, t)u_A(x, t)}_{\substack{\text{nur im 1D- bzw.} \\ \text{im 2D-Fall}}} \quad \text{für alle } (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)
 \end{aligned}$$

gilt und die Randbedingung

$$u(x, t) = g_1(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

erfüllt werden. Dabei bezeichnen

$c = c(x, t)$  die spezifische Wärmekapazität,  
 $\varrho = \varrho(x, t)$  die Dichte  
 $\lambda_i = \lambda_i(x, t)$  den Wärmeleitkoeffizienten (in Richtung  $x_i$ ),

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1(x, t) \\ \vdots \\ a_m(x, t) \end{pmatrix}$  den Vektor der Geschwindigkeit, mit welcher das Material durch das Gebiet  $\Omega$  fließt (siehe auch [55]),

$q(x, t)$  den spezifischen Wärmeaustauschkoeffizienten,

$f(x, t)$  die Wärmeintensitätsfunktion,

$g_1(x, t)$  die vorgegebene Randtemperatur und

$u_0(x)$  die Anfangstemperatur.

**Bemerkung 2.14** Bei der stationären Wärmeleit–Wärmetransportgleichung wird die Lösung  $u$  als eine Funktion  $u(x)$  gesucht. Gleichzeitig sind alle Eingangsdaten von  $t$  unabhängig. Weiterhin entfallen der Term  $c\varrho \frac{\partial u}{\partial t}$  in der Differentialgleichung sowie die Anfangsbedingung.

## Kapitel 3

# Grundprinzipien der Finite-Elemente-Methode: Ein 1D-Beispiel

### 3.1 Die Funktionenräume $L_2(a, b)$ und $H^1(a, b)$

Eine Funktion  $u(x)$  ist Element des Funktionenraumes  $L_2(a, b)$ , wenn das Integral

$$\int_a^b (u(x))^2 dx$$

existiert und endlich ist.

Zum Beispiel gehört die folgende Funktion zum Raum  $L_2(-2, 2)$ .

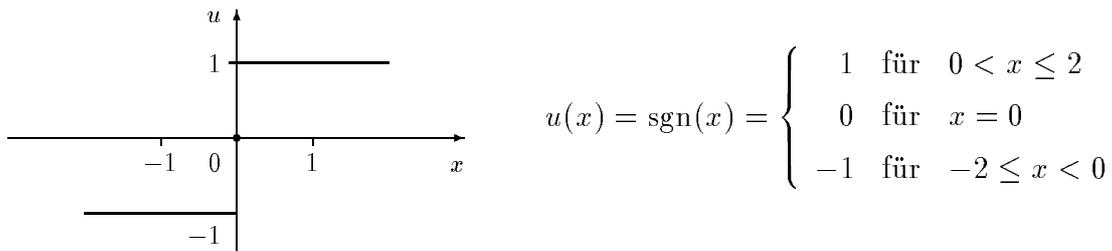


Abbildung 3.1: Die Funktion  $u(x) = \operatorname{sgn}(x)$  im Intervall  $(-2, 2)$

Sind  $u_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , Funktionen aus dem Raum  $L_2(a, b)$ , dann gehört auch jede Linearkombination

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x)$$

mit reellen Zahlen  $\alpha_i$  zu  $L_2(a, b)$ .

Für beliebige Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  aus  $L_2(a, b)$  gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\left| \int_a^b u(x)v(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b (u(x))^2 dx} \sqrt{\int_a^b (v(x))^2 dx}.$$

Mit

$$\|u\|_{0,2,(a,b)} = \sqrt{\int_a^b (u(x))^2 dx}$$

ist eine Norm in  $L_2(a, b)$  definiert und mit

$$(u, v)_{L_2} = \int_a^b u(x)v(x) dx$$

ein Skalarprodukt.

Im weiteren wollen wir den Sobolev-Raum  $H^1(a, b)$  definieren. Dazu führen wir zunächst einen neuen Ableitungsbegriff ein.

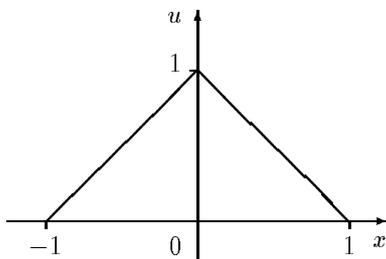
*Wiederholung:* Besitzt eine Funktion  $u(x)$  eine stetige Ableitung  $u'(x)$ , so gilt nach der Formel der partiellen Integration für jede stetig differenzierbare Funktion  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x) dx = - \int_a^b u'(x)\varphi(x) dx.$$

Wir definieren mit Hilfe dieser Formel Ableitungen für Funktionen, die im üblichen klassischen Sinn nicht differenzierbar sind. Sind  $u(x)$  sowie  $w(x)$  integrierbare Funktionen und gilt

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x) dx = - \int_a^b w(x)\varphi(x) dx$$

für alle differenzierbaren Funktionen  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ , so wird  $w(x)$  als *verallgemeinerte Ableitung von  $u(x)$  nach  $x$*  bezeichnet.



$$u(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Abbildung 3.2: Ein Beispiel einer Funktion aus dem Raum  $H^1(a, b)$

Die durch die Beziehung (3.1) definierte Funktion  $u(x)$  ist wegen des „Knicks“ bei  $x = 0$  im klassischen Sinn nicht differenzierbar. Für differenzierbare Funktionen  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$  erhalten wir mittels der Formel der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x) \varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 (x+1) \varphi'(x) dx + \int_0^1 (1-x) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + (x+1)\varphi(x) \Big|_{-1}^0 - \int_0^1 (-1) \varphi(x) dx + (1-x)\varphi(x) \Big|_0^1 \\ &= - \left[ \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \int_0^1 (-1) \varphi(x) dx \right] + \underbrace{\varphi(0) - \varphi(0)}_{=0}. \end{aligned}$$

Damit ist im verallgemeinerten Sinn

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ -1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Im Punkt  $x = 0$  kann  $u'(0)$  beliebig festgesetzt werden.

Der neue Ableitungsbegriff erlaubt es also, stetige, stückweise polynomiale Funktionen zu differenzieren. Solche Funktionen treten gerade bei der Methode der finiten Elemente auf (siehe auch Abschnitt 3.5).

Eine Funktion  $u(x)$  aus dem Raum  $L_2(a, b)$  ist Element des Raumes  $H^1(a, b)$ , wenn  $u'(x)$  existiert und zum Raum  $L_2(a, b)$  gehört.

Im Raum  $H^1(a, b)$  ist durch

$$\|u\|_{1,2,(a,b)} = \sqrt{\int_a^b (u(x))^2 dx + \int_a^b (u'(x))^2 dx}$$

eine Norm definiert und

$$(u, v)_{H^1} = \int_a^b u(x)v(x) dx + \int_a^b u'(x)v'(x) dx$$

ist ein Skalarprodukt in  $H^1(a, b)$ .

Für Funktionen  $u(x)$ , die wenigstens in einem der Randpunkte  $x = a$  bzw.  $x = b$  den Wert Null annehmen, gilt die Friedrichssche Ungleichung

$$\int_a^b (u(x))^2 dx \leq c_F^2 \int_a^b (u'(x))^2 dx.$$

Zu jeder Funktion  $u(x) \in H^1(a, b)$  kann man eine stetige Funktion  $u_c(x)$  finden, so daß sich die Funktionen  $u(x)$  und  $u_c(x)$  nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. „Die Funktion  $u(x) \in H^1(a, b)$  nimmt im Randpunkt  $x = a$  bzw.  $x = b$  einen vorgegebenen Wert  $g_a$  bzw.  $g_b$  an“ bedeutet:  $u_c(a) = g_a$  bzw.  $u_c(b) = g_b$ .

Eine ausführliche Darlegung der Theorie der Sobolev-Räume kann der interessierte Leser z.B. in [1] und [86] finden.

## 3.2 Variationsformulierung von Randwertaufgaben

Die Grundidee der Finite-Elemente-Methode beschreiben wir im weiteren anhand eines stationäres 1D-Wärmeleitproblems (siehe Abschnitt 2.1.1). Dabei setzen wir voraus, daß die Wärmeleitfähigkeit konstant ist, z.B.  $\lambda = 1$ , und daß für den spezifischen Wärmeaustauschkoeffizienten  $\bar{q} = 0$  gilt. Die klassische Formulierung des Wärmeleitproblems lautet somit:

Gesucht ist  $u(x) \in C^2(a, b) \cap C^1(a, b] \cap C[a, b]$ , so daß

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) && \text{für alle } x \in \Omega = (a, b) \\ u(a) &= g_a \\ -u'(b) &= \alpha_b(u(b) - g_b) \end{aligned} \quad (3.2)$$

gilt, wobei  $g_a$  und  $g_b$  vorgegebene Werte sind und  $f(x)$  eine gegebene Funktion ist.

Die Variationsformulierung des Wärmeleitproblems wird wie folgt hergeleitet.

Wir wählen eine beliebige Funktion  $v(x) \in H^1(a, b)$ , wobei  $v(x)$  in den Randpunkten mit Randbedingungen 1. Art verschwindet, d.h. in unserem Beispiel  $v(a) = 0$ , und multiplizieren die Differentialgleichung (3.2) mit einer solchen *Testfunktion*  $v(x)$ . Anschließend integrieren wir über  $(a, b)$  und erhalten

$$-\int_a^b u''(x)v(x) dx = \int_a^b f(x)v(x) dx. \quad (3.3)$$

Gemäß der Formel der partiellen Integration

$$-\int_a^b u''(x)v(x) dx = \int_a^b u'(x)v'(x) dx - u'(x)v(x) \Big|_a^b \quad (3.4)$$

und unter Beachtung der Randbedingung  $-u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b)$  sowie der Bedingung  $v(a) = 0$  ergibt sich

$$-\int_a^b u''(x)v(x) dx = \int_a^b u'(x)v'(x) dx + \alpha_b u(b)v(b) - \alpha_b g_b v(b). \quad (3.5)$$

Aus den Beziehungen (3.3) – (3.5) folgt die *Variationsformulierung* (= schwache Formulierung = verallgemeinerte Formulierung) des Wärmeleitproblems, d.h.:

Gesucht ist  $u(x) \in V_g$ , so daß

$$\int_a^b u'(x)v'(x) dx + \alpha_b u(b)v(b) = \int_a^b f(x)v(x) dx + \alpha_b g_b v(b) \quad \text{für alle } v(x) \in V_0 \quad (3.6)$$

mit  $V_g = \{u \in H^1(a, b) : u(a) = g_a\}$  und  $V_0 = \{v \in H^1(a, b) : v(a) = 0\}$  gilt.

**Bemerkung 3.1** Die verallgemeinerte Formulierung (3.6) enthält im Unterschied zur klassischen Formulierung (3.2) keine 2. Ableitungen mehr.

Die Aufgabe (3.6) ist der Ausgangspunkt für die FEM (Finite-Elemente-Methode) und die Aufgabe (3.2) ist der Ausgangspunkt für klassische Differenzenverfahren (siehe z.B. [70]).

**Bemerkung 3.2** Wesentliche Randbedingungen (Randbedingungen 1. Art) gehen in die Definition von  $V_g$  und  $V_0$  ein, natürliche Randbedingungen (Randbedingungen 2. bzw. 3. Art) gehen in die Variationsformulierung ein.

### 3.3 Die FEM zur näherungsweise Lösung des Variationsproblems

- *Der Begriff der finiten Funktion*

Eine finite Funktion ist eine Funktion, die nur in einem „kleinen“ endlichen Intervall  $(\alpha, \beta)$  von Null verschieden ist.

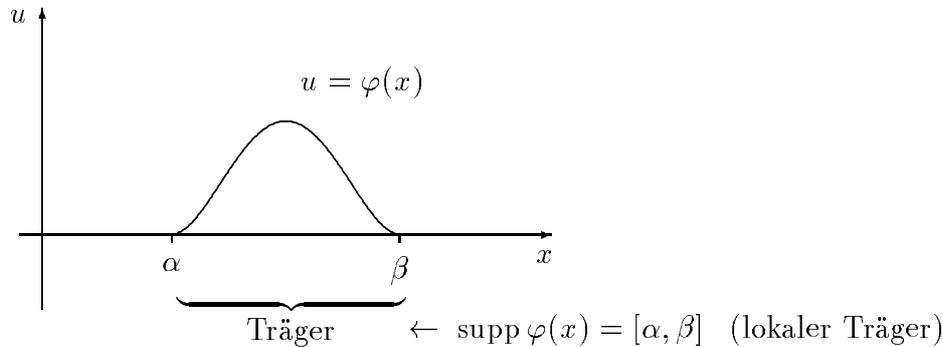


Abbildung 3.3: Ein Beispiel einer finiten Funktion

Bei der Finite-Elemente-Methode wird die Näherungslösung als Linearkombination finiter Funktionen gesucht.

- *Die Idee der FEM:* Wie wird die Näherungslösung konstruiert ?

1. Wir diskretisieren (unterteilen) das Intervall  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle (= finite Elemente) mit i.a. verschiedener Länge.

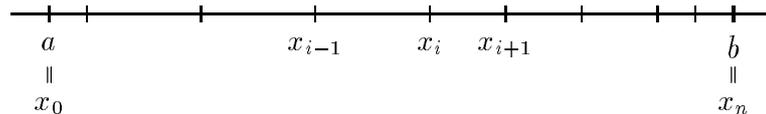


Abbildung 3.4: Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$

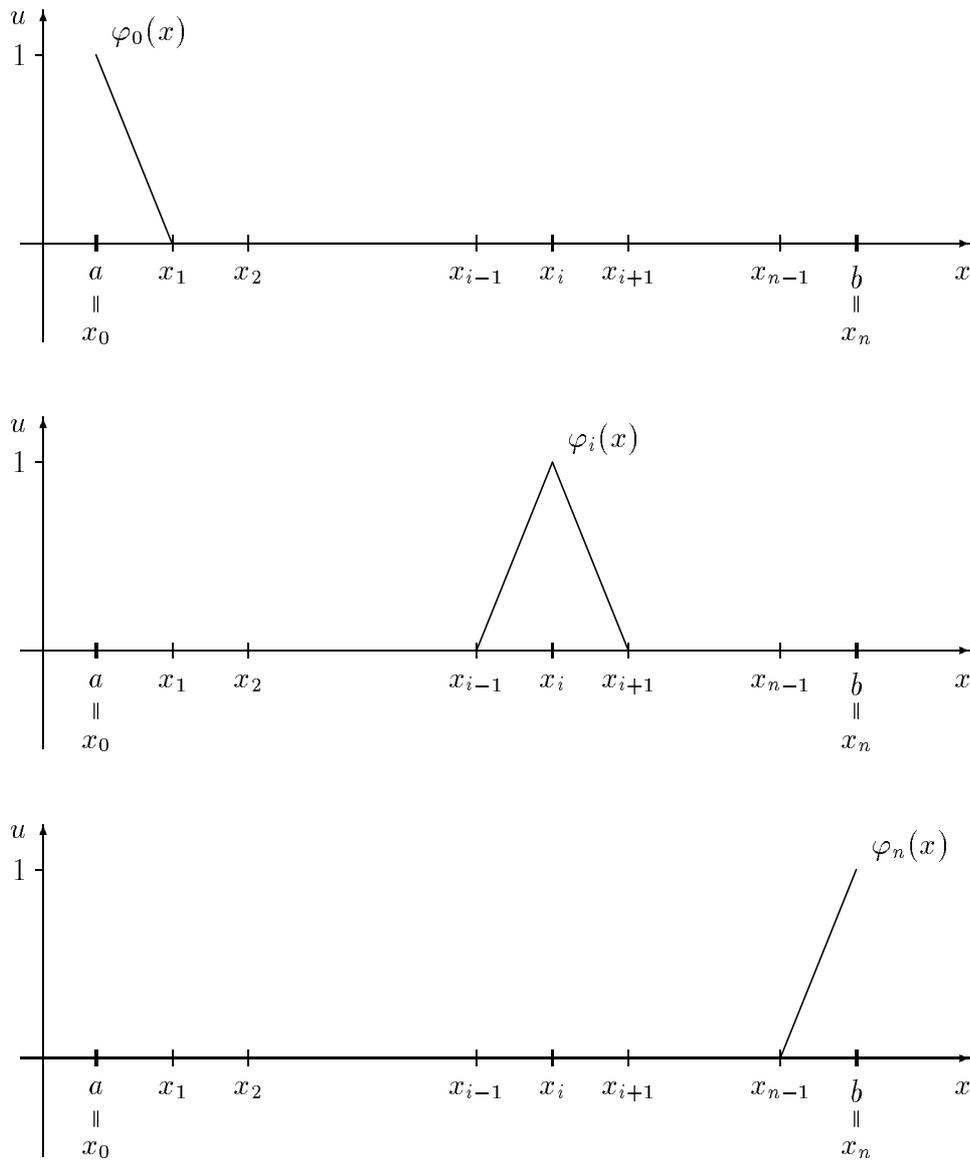
Der Einfachheit halber wählen wir zunächst eine gleichmäßige Unterteilung, d.h. für die Koordinaten des  $i$ -ten Knotens  $P_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , gilt

$$x_i = x_0 + ih$$

mit dem Diskretisierungsparameter

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

2. Jedem Knoten  $P_i$  ordnen wir eine im Intervall  $[a, b]$  stetige, finite Funktion  $\varphi_i(x)$  (*Ansatzfunktion*) zu, die nur im Intervall  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  von Null verschieden ist. Ein Beispiel für die Funktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , sind die in der Abbildung 3.5 dargestellten stückweise linearen Funktionen.

Abbildung 3.5: Stückweise lineare Funktionen  $\varphi_i(x)$ 

Für die Funktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , gilt

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} & x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h} & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & x_{i+1} < x \leq b \end{cases} \quad (3.7)$$

und für die Funktion  $\varphi_0(x)$  bzw.  $\varphi_n(x)$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\frac{x - x_1}{h} & a < x \leq x_1 \\ 0 & x_1 < x \leq b \end{cases}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x < x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{h} & x_{n-1} < x \leq b \end{cases}. \quad (3.8)$$

Die Ansatzfunktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , erfüllen offenbar die Bedingung

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (3.9)$$

( $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol).

3. Wir suchen die Näherungslösung  $u_h(x)$  der Aufgabe (3.6) als Linearkombination

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^n u_i \varphi_i(x) \quad (3.10)$$

der Ansatzfunktionen  $\varphi_i(x)$ , wobei die  $u_i = u_h(x_i)$  noch zu bestimmende Parameter sind.

Der Parameter  $u_0$  ist in unserer Aufgabe auf Grund der vorgegebenen Randbedingung  $u(a) = g_a$  bekannt. Die unbekanntenen Knotenparameter  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , werden durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmt.

Setzen wir den Lösungsansatz (3.10) in die Variationsformulierung (3.6) ein, dann erhalten wir zunächst die Ersatzaufgabe:

Gesucht ist  $u_h(x) \in V_{gh}$ , so daß

$$\int_a^b u_h'(x) v_h'(x) dx + \alpha_b u_h(b) v_h(b) = \int_a^b f(x) v_h(x) dx + \alpha_b g_b v_h(b) \quad (3.11)$$

für alle  $v_h \in V_{0h}$

mit

$$V_{gh} = \left\{ u_h(x) : u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x) + g_a \varphi_0(x) \right\}$$

und

$$V_{0h} = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x) \right\}$$

gilt.

Die Lösung der Aufgabe (3.11) zu ermitteln heißt, die unbekanntenen Knotenparameter  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , zu bestimmen. Diese sind die Lösung des Finite-Elemente-Gleichungssystems, welches aus der Ersatzaufgabe (3.11) auf die im weiteren beschriebene Weise entsteht.

- *Bestimmung der Knotenparameter  $u_1, u_2, \dots, u_n$*

Wir wählen nacheinander in der Aufgabe (3.11) als Funktion  $v_h$  die Funktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Damit ergibt sich das zur Aufgabe (3.11) äquivalente Finite-Elemente-Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
v_h = \varphi_1 &: \sum_{i=0}^n u_i \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_1'(x) dx + \alpha_b u_h(b) \varphi_1(b) = \int_a^b f(x) \varphi_1(x) dx + \alpha_b g_b \varphi_1(b) \\
v_h = \varphi_2 &: \sum_{i=0}^n u_i \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_2'(x) dx + \alpha_b u_h(b) \varphi_2(b) = \int_a^b f(x) \varphi_2(x) dx + \alpha_b g_b \varphi_2(b) \\
&\vdots \\
v_h = \varphi_n &: \sum_{i=0}^n u_i \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_n'(x) dx + \alpha_b u_h(b) \varphi_n(b) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx + \alpha_b g_b \varphi_n(b).
\end{aligned}$$

Auf Grund der vorgegebenen Randbedingung gilt  $u_0 = g_a$ . Beachten wir außerdem  $\varphi_j(b) = 0$  für  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\varphi_n(b) = 1$  und  $u_h(b) = u_n$ , dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n u_i \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_1'(x) dx &= \int_a^b f(x) \varphi_1(x) dx - g_a \int_a^b \varphi_0'(x) \varphi_1'(x) dx \\
\sum_{i=1}^n u_i \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_2'(x) dx &= \int_a^b f(x) \varphi_2(x) dx - g_a \int_a^b \varphi_0'(x) \varphi_2'(x) dx \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^n u_i \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_{n-1}'(x) dx &= \int_a^b f(x) \varphi_{n-1}(x) dx - g_a \int_a^b \varphi_0'(x) \varphi_{n-1}'(x) dx \\
\sum_{i=1}^n u_i \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_n'(x) dx + \alpha_b u_n &= \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx - g_a \int_a^b \varphi_0'(x) \varphi_n'(x) dx \\
&\quad + \alpha_b g_b.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Beziehungen (3.12) werden als das Finite-Elemente-Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \tag{3.13}$$

zur Bestimmung des unbekanntenen Koeffizientenvektors  $\underline{u}_h = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in R^n$  bezeichnet. Die Elemente der *Steifigkeitsmatrix*  $K_h$  sind durch

$$K_h = \left[ \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \alpha_b \delta_{ij} \delta_{nj} \right]_{i,j=1}^n$$

definiert, und für die Komponenten des *Lastvektors*  $\underline{f}_h$  gilt

$$\underline{f}_h = \left[ \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx - g_a \int_a^b \varphi_0'(x) \varphi_i'(x) dx + \alpha_b g_b \delta_{in} \right]_{i=1}^n.$$



3.  $K$  ist eine tridiagonale Matrix

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

• *Berechnung der Koeffizienten  $K_{ij}$*

Die Funktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sind wie folgt definiert (siehe auch die Beziehungen (3.7) und (3.8))

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} & x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h} & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & x_{i+1} < x \end{cases}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \leq x_{n-1} \\ \frac{x - x_{n-1}}{h} & x_{n-1} < x \leq b \end{cases}.$$

Somit gilt für  $i = 2, 3, \dots, n$

$$K_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-1}(x) \varphi'_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h^2} h = -\frac{1}{h},$$

für  $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} K_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \frac{1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) dx = \frac{1}{h^2} h + \frac{1}{h^2} h = \frac{2}{h}, \end{aligned}$$

$$K_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'_{i+1}(x) \varphi'_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h}\right) \left(-\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h^2} h = -\frac{1}{h}$$

und

$$K_{nn} = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi'_n(x) \varphi'_n(x) dx + \alpha_b = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{1}{h} \frac{1}{h} dx + \alpha_b = \frac{1}{h} + \alpha_b.$$

Weiterhin ist

$$\int_a^b \varphi_0'(x) \varphi_i'(x) dx = \begin{cases} -\frac{1}{h} & \text{für } i = 1 \\ 0 & \text{für } i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Damit ergibt sich das tridiagonale Gleichungssystem

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 + \alpha_b h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 + \frac{1}{h} g_a \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \vdots \\ \tilde{f}_{n-2} \\ \tilde{f}_{n-1} \\ \tilde{f}_n + \alpha_b g_b \end{pmatrix}$$

mit  $\tilde{f}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx$  für  $i = 1, 2, \dots, n-1$  und  $\tilde{f}_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \varphi_n(x) dx$ .

### 3.4 Der elementweise Aufbau der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors

Wir beschreiben im folgenden wie die Steifigkeitsmatrix und der Lastvektor elementweise berechnet werden können. Dabei werden zuerst eine Steifigkeitsmatrix  $\bar{K}_h$  und ein Lastvektor  $\bar{f}_h$  generiert, in denen die Randbedingungen noch nicht berücksichtigt sind. Die Beachtung der Randbedingungen erläutern wir später.

Der elementweise Aufbau des Finite-Elemente-Gleichungssystems ist eine Vorgehensweise, die in jedem größeren FEM-Programm genutzt wird.

- *Berechnung der Elementbeziehungen*

Auf Grund der im Abschnitt 3.3 beschriebenen Diskretisierung gilt für das Intervall  $[a, b]$

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i].$$

Damit erhalten wir zunächst

$$\int_a^b u_h'(x) v_h'(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_h'(x) v_h'(x) dx$$

und mit dem Lösungsansatz (3.10) sowie unter Beachtung der Definition der Funktionen  $\varphi_i(x)$  (siehe (3.7) und (3.8))

$$\begin{aligned} \int_a^b u_h'(x) v_h'(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u_{i-1} \varphi'_{i-1}(x) + u_i \varphi'_i(x)) (v_{i-1} \varphi'_{i-1}(x) + v_i \varphi'_i(x)) dx \\ &= \sum_{i=1}^n (v_{i-1} \ v_i) K^{(i)} \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Matrizen  $K^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned}
 K^{(i)} &= \begin{pmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-1}(x) \varphi'_{i-1}(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-1}(x) \varphi'_i(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx \end{pmatrix}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

werden als *Elementsteifigkeitsmatrizen* bezeichnet.

Auf analoge Weise erhalten wir für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) v_h(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) v_h(x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) (v_{i-1} \varphi_{i-1}(x) + v_i \varphi_i(x)) dx \\
 &= \sum_{i=1}^n (v_{i-1} \ v_i) \underline{f}^{(i)} \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Die *Elementlastvektoren*  $\underline{f}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sind durch die Beziehung

$$\underline{f}^{(i)} = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_{i-1}(x) dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

definiert.

- *Assemblierung des FEM-Gleichungssystems*, d.h. Zusammensetzen der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren zur globalen Steifigkeitsmatrix bzw. zum globalen Lastvektor.

Wir schreiben die Beziehungen (3.14) und (3.16) nochmals ausführlich auf. Es gilt

$$\int_a^b u'_h(x) v'_h(x) dx = \sum_{i=1}^n (v_{i-1} \ v_i) K^{(i)} \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} = \underline{\bar{v}}_h^T \bar{K}_h \underline{\bar{u}}_h =$$

$$\begin{aligned}
& [K_{11}^{(1)}u_0 + K_{12}^{(1)}u_1] v_0 \\
& + [K_{21}^{(1)}u_0 + (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)})u_1 + K_{12}^{(2)}u_2] v_1 \\
& \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\
& + [K_{21}^{(n-1)}u_{n-2} + (K_{22}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)})u_{n-1} + K_{12}^{(n)}u_n] v_{n-1} \\
& + [K_{21}^{(n)}u_{n-1} + K_{22}^{(n)}u_n] v_n
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) v(x) dx &= \sum_{i=1}^n (v_{i-1} \ v_i) \underline{f}^{(i)} = \underline{\bar{v}}_h^T \underline{\bar{f}}_h = \\
& f_1^{(1)} v_0 + (f_1^{(2)} + f_2^{(1)}) v_1 + \dots + (f_{n-1}^{(2)} + f_n^{(1)}) v_{n-1} + f_n^{(2)} v_n
\end{aligned}$$

mit  $\underline{\bar{v}}_h = (v_0 \ v_1 \ \dots \ v_n)^T$ ,  $\underline{\bar{u}}_h = (u_0 \ u_1 \ \dots \ u_n)^T$ ,  $\underline{\bar{f}}_h = (f_0 \ f_1 \ \dots \ f_n)^T$  und  $\bar{K}_h = [K_{ij}]_{i,j=0}^n$ .

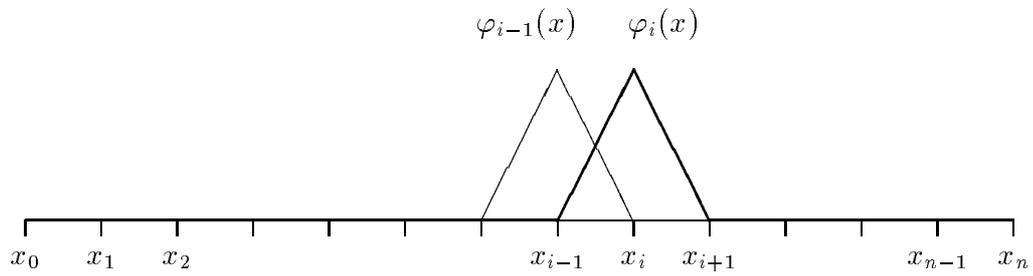
Aus den obigen Beziehungen wird deutlich, wie sich die Matrixelemente der *globalen Steifigkeitsmatrix*  $\bar{K}_h$  aus Elementen der Elementsteifigkeitsmatrizen und die Komponenten des *globalen Lastvektors*  $\underline{\bar{f}}_h$  aus Komponenten der Elementlastvektoren zusammensetzen.

Zur Berechnung der globalen Steifigkeitsmatrix und des globalen Lastvektors führen wir den folgenden Algorithmus durch:

Zuerst stellen wir den Zusammenhang zwischen der globalen und der lokalen Knotennummerierung her (siehe Abbildung 3.7). Dieser Zusammenhang wird in einer entsprechenden Zuordnungstabelle gespeichert.

Elementnummer	globale Knotennummer des Knotens mit der lokalen Knotennummer	
	1	2
1	0	1
2	1	2
3	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$n-1$	$n$

Tabelle 3.1: Zuordnungstabelle zwischen globaler und lokaler Knotennummerierung



globale Knotennummern:

0    1    2                                     $i - 1$     $i$     $i + 1$                                      $n - 1$     $n$

lokale Knotennummern:

1    2                                    1    2                                    1    2                                    1    2

1    2                                    1    2                                    1    2

Abbildung 3.7: Zusammenhang zwischen globaler und lokaler Knotennumerierung

Wir setzen  $\bar{K}_h$  und  $\bar{f}_h$  identisch Null. Danach bauen wir elementweise, d.h. Element für Element, die Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(i)}$  und die Elementlastvektoren  $\underline{f}^{(i)}$  in  $\bar{K}_h$  bzw.  $\bar{f}_h$  ein.

$$K^{(i)} = \begin{pmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \qquad \underline{f}^{(i)} = \begin{pmatrix} f_1^{(i)} \\ f_2^{(i)} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

1    2    ———> lokale Knotennummern

Nach dem Einbau von  $K^{(1)}$  und  $\underline{f}^{(1)}$  erhalten wir

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

|                                    0    1    2     $\cdots$     $n$

globale Knotennummern

Der Einbau von  $K^{(2)}$  und  $f^{(2)}$  liefert

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Assemblierung aller  $K^{(i)}$  bzw.  $\underline{f}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , entstehen die globale Steifigkeitsmatrix

$$\bar{K}_h = \begin{pmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K_{21}^{(n-2)} & K_{22}^{(n-2)} + K_{11}^{(n-1)} & K_{12}^{(n-1)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & K_{21}^{(n-1)} & K_{22}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$$

sowie der globale Lastvektor

$$\underline{\bar{f}}_h = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(n-2)} + f_1^{(n-1)} \\ f_2^{(n-1)} + f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \end{pmatrix},$$

wobei die Randbedingungen noch nicht berücksichtigt sind.

- *Einbau der Randbedingungen*

Im Beispiel aus dem Abschnitt 3.2 sind die folgenden Randbedingungen vorgegeben:

- Randbedingungen 1. Art bei  $x = a$ :  $u(a) = g_a$
- Randbedingungen 3. Art bei  $x = b$ :  $-u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b)$

Mit den Beziehungen (3.14) und (3.16) können wir die Ersatzaufgabe (3.11) folgendermaßen aufschreiben:

Gesucht ist  $\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{n+1}$ , so daß

$$\underline{\bar{v}}_h^T \bar{K}_h \underline{\bar{u}}_h + \alpha_b u_n v_n = \underline{\bar{v}}_h^T \underline{\bar{f}}_h + \alpha_b g_b v_n \quad \text{für alle } \underline{\bar{v}}_h \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (3.18)$$

mit  $\underline{\bar{u}}_h = (g_a \ u_1 \ \dots \ u_n)^T$  und  $\underline{\bar{v}}_h = (0 \ v_1 \ \dots \ v_n)^T$  gilt.

Wegen  $v_0 = 0$  ist die Beziehung (3.18) äquivalent zu

$$\underline{v}_h^T \tilde{K}_h \underline{u}_h + \alpha_b u_n v_n = \underline{v}_h^T \underline{\tilde{f}}_h + \alpha_b g_b v_n \quad \text{für alle } \underline{v}_h \in \mathbb{R}^n. \quad (3.19)$$

Dabei ist  $\underline{v}_h = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^T$ ,  $\underline{\tilde{f}}_h = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n)^T$  und  $\tilde{K} = [K_{ij}]_{i=1, j=0}^n$ .

Da die Identität (3.19) für einen beliebigen Vektor  $\underline{v}_h \in \mathbb{R}^n$  gültig ist, muß auch

$$\begin{pmatrix} K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & K_{21}^{(n-2)} & K_{22}^{(n-2)} + K_{11}^{(n-1)} & K_{12}^{(n-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & K_{21}^{(n-1)} & K_{22}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} + \alpha_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_a \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(n-2)} + f_1^{(n-1)} \\ f_2^{(n-1)} + f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} + \alpha_b g_b \end{pmatrix}$$

gelten. Beachten wir noch, daß  $g_a$  der vorgegebene Wert aus der Randbedingung  $u(a) = g_a$  ist, so können wir  $K_{21}^{(1)} g_a$  von der ersten Komponente der rechten Seite subtrahieren. Damit erhalten wir schließlich das Finite-Elemente-Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & K_{21}^{(n-2)} & K_{22}^{(n-2)} + K_{11}^{(n-1)} & K_{12}^{(n-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_{21}^{(n-1)} & K_{22}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} + \alpha_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2^{(1)} + f_1^{(2)} - K_{21}^{(1)} g_a \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(n-2)} + f_1^{(n-1)} \\ f_2^{(n-1)} + f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} + \alpha_b g_b \end{pmatrix},$$

in dem die Randbedingungen  $u(a) = g_a$  und  $-u'(b) = \alpha_b (u(b) - g_b)$  eingearbeitet sind.

• *Zusammenfassung der Schritte zur Generierung des FE-Gleichungssystems*

1. Zerlegung des Intervalls  $(a, b)$  in finite Elemente  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Für alle Elemente  $(x_{i-1}, x_i)$ 
  - Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
  - Berechnung der Elementlastvektoren  $\underline{f}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
  - Einbau von  $K^{(i)}$  bzw.  $\underline{f}^{(i)}$  in die globale Steifigkeitsmatrix bzw. den globalen Lastvektor
3. Einbau der Randbedingungen in das FE-Gleichungssystem

### 3.5 1D-LAGRANGE-Elemente höherer Ordnung

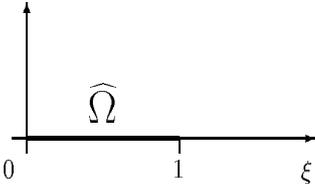
Die im weiteren eingeführten Elemente heißen LAGRANGE-Elemente, weil zu ihrer Definition LAGRANGE-Interpolationspolynome genutzt werden.

Es sei die Zerlegung

$$\bar{\Omega} = [a, b] = \bigcup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i, \quad \bar{\Omega}_i = [x_{i-1}, x_i]$$

des Intervalls  $[a, b]$  gegeben. Zur Definition der LAGRANGE-Elemente führen wir die folgenden Schritte durch:

1. Definition der Abbildung von  $\bar{\Omega}_i$  auf das Basiselement  $\hat{\Omega} = [0, 1]$



Transformationsvorschrift:

$$\xi = \xi(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (3.20)$$

Abbildung 3.8: Das Basiselement  $\hat{\Omega} = [0, 1]$

Für die Umkehrabbildung gilt  $x = x(\xi) = (x_i - x_{i-1})\xi + x_{i-1}$ .

2. Definition der Formfunktionen  $\hat{\Phi}_k(\xi)$  auf  $\hat{\Omega}$

Wir teilen das Basiselement  $\hat{\Omega}$  in  $m$  gleiche Teilintervalle

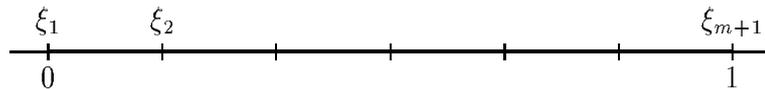


Abbildung 3.9: Unterteilung des Basiselements  $\hat{\Omega}$

und definieren für jeden Knoten  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m + 1$ , das Polynom

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m+1} (\xi - \xi_j). \quad (3.21)$$

3. Aufstellen des LAGRANGE-Interpolationspolynoms

Durch eine Normierung der Polynome (3.21) erhalten wir die Formfunktionen

$$\hat{\Phi}_k(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m+1} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_k - \xi_j)}, \quad k = 1, 2, \dots, m + 1, \quad (3.22)$$

für die  $\hat{\Phi}_k(\xi_j) = \delta_{kj}$  gilt ( $\delta_{kj}$  ist das Kronecker-Symbol).

Im Fall  $m = 1$  ergeben sich aus den Beziehungen (3.22) die linearen Formfunktionen

$$\widehat{\Phi}_1(\xi) = -\xi + 1 \quad \text{und} \quad \widehat{\Phi}_2(\xi) = \xi. \quad (3.23)$$

Die Ansatzfunktionen über den Elementen  $[x_{i-1}, x_i]$  werden mittels einer Koordinatentransformation aus den Formfunktionen (3.23) bestimmt. Die so erhaltenen Ansatzfunktionen sind die im Abschnitt 3.3 definierten Funktionen  $\varphi_i(x)$  (siehe auch die Abbildung 3.5).

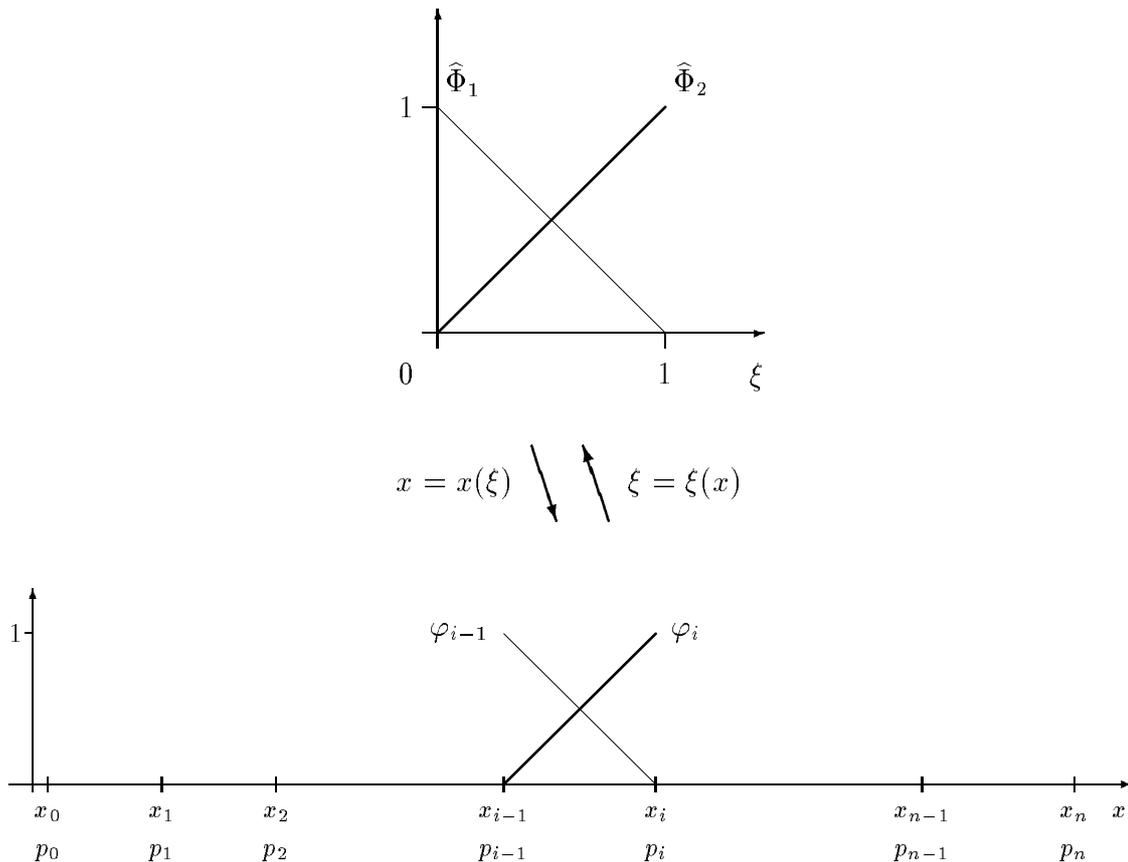


Abbildung 3.10: Bestimmung der linearen Ansatzfunktionen

### Bemerkung 3.3

- Die Funktionen  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , sind linear unabhängig.
- Der Einsatz dieser Ansatzfunktionen bei der Diskretisierung des Randwertproblems (3.6) führt auf eine tridiagonale globale Steifigkeitsmatrix (siehe auch Abschnitt 3.3).

Für  $m = 2$  erhalten wir aus den Beziehungen (3.22) die quadratischen Formfunktionen

$$\widehat{\Phi}_1(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1, \quad \widehat{\Phi}_2(\xi) = -4\xi^2 + 4\xi \quad \text{und} \quad \widehat{\Phi}_3(\xi) = 2\xi^2 - \xi. \quad (3.24)$$

Die Ansatzfunktionen über den Elementen  $[x_{i-1}, x_i]$  werden wie im Fall  $m = 1$  durch eine Koordinatentransformation gemäß der Vorschrift (3.20) aus den Formfunktionen (3.24) bestimmt.



Für  $m = 3$  sind die kubischen Formfunktionen für das Basiselement wie folgt definiert

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}_1(\xi) &= -\frac{9}{2}(\xi - \frac{1}{3})(\xi - \frac{2}{3})(\xi - 1), & \widehat{\Phi}_2(\xi) &= \frac{27}{2}(\xi - \frac{2}{3})(\xi - 1)\xi, \\ \widehat{\Phi}_3(\xi) &= -\frac{27}{2}(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1)\xi, & \widehat{\Phi}_4(\xi) &= \frac{9}{2}(\xi - \frac{1}{3})(\xi - \frac{2}{3})\xi.\end{aligned}\quad (3.25)$$

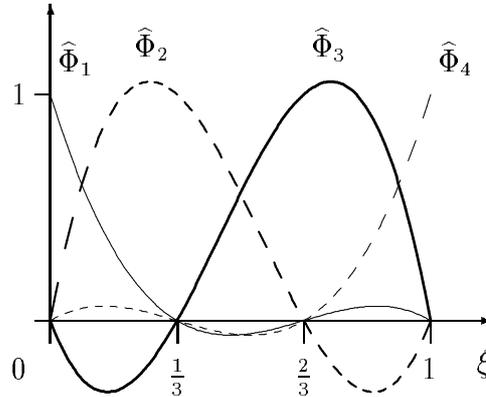


Abbildung 3.12: Darstellung der kubischen Formfunktionen über dem Basiselement

**Bemerkung 3.5** Die Ansatzfunktionen über den Elementen  $[x_{i-1}, x_i]$  werden wiederum durch eine Koordinatentransformation gemäß der Vorschrift (3.20) aus den Formfunktionen (3.25) bestimmt. Für die auf diese Weise definierten Ansatzfunktionen  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 3n$ , gilt:

- $\varphi_j(p_k) = \delta_{jk}$ ,  $j, k = 0, 1, \dots, 3n$ .
- Diese Ansatzfunktionen sind linear unabhängig.
- Die FE-Matrix ist 7-diagonal.

In der Praxis werden auch Kombinationen von linearen, quadratischen und kubischen Elementen auf unregelmäßigen Gittern genutzt, z.B.

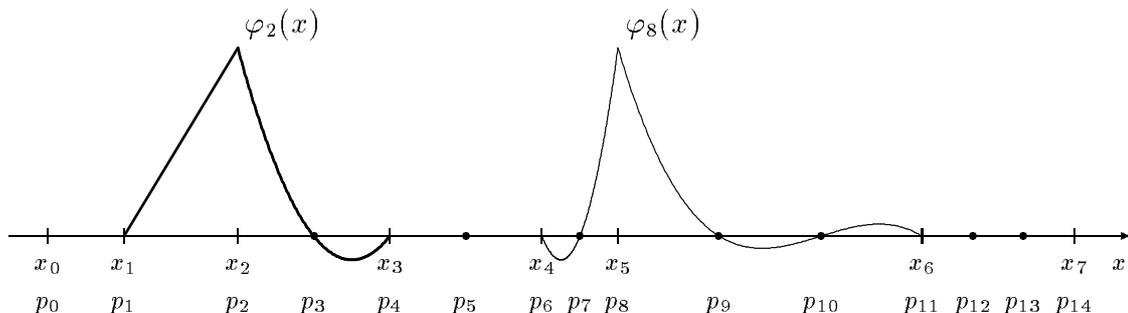


Abbildung 3.13: Kombination linearer, quadratischer und kubischer Ansatzfunktionen

### 3.6 Auflösung des Finite-Elemente-Gleichungssystems

Wir betrachten ein tridiagonales Gleichungssystem, das z.B. bei der FE-Diskretisierung von 1D-Randwertaufgaben 2. Ordnung mit linearen Ansatzfunktionen entsteht (siehe auch Abschnitt 3.3). Die allgemeine Gestalt des Gleichungssystems  $K\underline{u} = \underline{f}$  sei

$$\begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_3 & c_3 & -b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} & c_{n-2} & -b_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

oder in der äquivalenten Schreibweise

$$\begin{aligned} c_1 u_1 & - b_1 u_2 & = f_1, \\ -a_i u_{i-1} + c_i u_i & - b_i u_{i+1} & = f_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ -a_n u_{n-1} + c_n u_n & & = f_n \end{aligned}$$

• *Eliminationsschritte (LU-Faktorisierung)*

$1. \quad u_1 - \alpha_2 u_2 = \beta_2, \quad u_1 = \alpha_2 u_2 + \beta_2$ $\implies (c_2 - a_2 \alpha_2) u_2 - b_2 u_3 = f_2 + a_2 \beta_2$	$\alpha_2 = \frac{b_1}{c_1}, \quad \beta_2 = \frac{f_1}{c_1}$
$2. \quad u_2 - \alpha_3 u_3 = \beta_3, \quad u_2 = \alpha_3 u_3 + \beta_3$	$\alpha_3 = \frac{b_2}{c_2 - a_2 \alpha_2},$ $\beta_3 = \frac{f_2 + a_2 \beta_2}{c_2 - a_2 \alpha_2}$
$3. \quad u_3 - \alpha_4 u_4 = \beta_4, \quad u_3 = \alpha_4 u_4 + \beta_4$	$\alpha_4 = \frac{b_3}{c_3 - a_3 \alpha_3},$ $\beta_4 = \frac{f_3 + a_3 \beta_3}{c_3 - a_3 \alpha_3}$
$\vdots$	
$(n-1). \quad u_{n-1} - \alpha_n u_n = \beta_n, \quad u_{n-1} = \alpha_n u_n + \beta_n$ $\implies (c_n - a_n \alpha_n) u_n = f_n + a_n \beta_n$	$\alpha_n = \frac{b_{n-1}}{c_{n-1} - a_{n-1} \alpha_{n-1}},$ $\beta_n = \frac{f_{n-1} + a_{n-1} \beta_{n-1}}{c_{n-1} - a_{n-1} \alpha_{n-1}}$
$u_n = \beta_{n+1}$	$\beta_{n+1} = \frac{f_n + a_n \beta_n}{c_n - a_n \alpha_n}$

Infolge der Eliminationsschritte haben wir das tridiagonale Gleichungssystem in ein Gleichungssystem mit einer Systemmatrix in Dreiecksgestalt überführt, d.h.

$$\begin{aligned}
 u_1 - \alpha_2 u_2 &= \beta_2, & \alpha_2 &= \frac{b_1}{c_1}, & \beta_2 &= \frac{f_1}{c_1}, \\
 u_i - \alpha_{i+1} u_{i+1} &= \beta_{i+1}, & \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \\
 & & \beta_{i+1} &= \frac{f_i + a_i \beta_i}{c_i - a_i \alpha_i}, & i &= 2, 3, \dots, n-1, \\
 u_n &= \beta_{n+1}, & \beta_{n+1} &= \frac{f_n + a_n \beta_n}{c_n - a_n \alpha_n}.
 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat in Matrixschreibweise die Form

$$\begin{pmatrix}
 1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 1 & -\alpha_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -\alpha_4 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} & 0 \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_n \\
 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 \vdots \\
 u_{n-2} \\
 u_{n-1} \\
 u_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \beta_2 \\
 \beta_3 \\
 \beta_4 \\
 \vdots \\
 \beta_{n-1} \\
 \beta_n \\
 \beta_{n+1}
 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

- *Rückwärtseinsetzen*

Das Gleichungssystem (3.26) läßt sich gemäß den Beziehungen

$$\begin{aligned}
 u_n &= \beta_{n+1} \\
 u_i &= \beta_{i+1} + \alpha_{i+1} u_{i+1}, & i &= n-1, n-2, \dots, 1,
 \end{aligned} \quad (3.27)$$

leicht auflösen.

- *Anzahl der notwendigen arithmetischen Operationen*

	Elimination	Rückwärtseinsetzen	gesamt
Divisionen	$2n - 1$	—	$2n - 1$
Multiplikationen	$2n - 2$	$n - 1$	$3n - 3$
Additionen/Subtraktionen	$2n - 2$	$n - 1$	$3n - 3$
insgesamt	$6n - 5$	$2n - 2$	$8n - 7$

Die Anzahl der notwendigen arithmetischen Operationen ist also proportional zur Anzahl der Unbekannten des zu lösenden Gleichungssystems.

- *Speicherplatzbedarf*

Die Systemmatrix, die rechte Seite des Gleichungssystems sowie die bei der Elimination entstehende Dreiecksmatrix können wie folgt abgespeichert werden.

0	$c_1$	$b_1$	$f_1$
$a_2$	$c_2$	$b_2$	$f_2$
$a_3$	$c_3$	$b_3$	$f_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{n-1}$	$c_{n-1}$	$b_{n-1}$	$f_{n-1}$
$a_n$	$c_n$	0	$f_n$



überschreiben mit

0	$c_1$	$\alpha_2$	$\beta_2, u_1$
$a_2$	$c_2 - a_2\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_3, u_2$
$a_3$	$c_3 - a_3\alpha_3$	$\alpha_4$	$\beta_4, u_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{n-1}$	$c_{n-1} - a_{n-1}\alpha_{n-1}$	$\alpha_n$	$\beta_n, u_{n-1}$
$a_n$	$c_n - a_n\alpha_n$	0	$\beta_{n+1}, u_n$

Ist die Systemmatrix symmetrisch, dann entfällt der Speicherplatzbedarf für die  $a_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Es werden also  $4n$  bzw.  $3n$  Speicherplätze benötigt, d.h. auch der Speicherplatzbedarf ist proportional zur Anzahl der Unbekannten des zu lösenden FE-Gleichungssystems.

- *Durchführbarkeit und Stabilität*

Im Satz 3.1 werden hinreichende Bedingungen für die Durchführbarkeit und Stabilität des beschriebenen Auflösungsalgorithmus formuliert.

**Satz 3.1**

Voraussetzungen:  $|c_1| > 0$ ,  $|c_n| > 0$

$|a_i| > 0$ ,  $|b_i| > 0$  für alle  $i = 2, 3, \dots, n-1$

$|c_i| \geq |a_i| + |b_i|$  für alle  $i = 2, 3, \dots, n-1$

$|c_1| \geq |b_1|$ ,  $|c_n| \geq |a_n|$ ,

wobei für wenigstens eine der Ungleichungen  $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|$ ,  $|c_1| \geq |b_1|$  bzw.  $|c_n| \geq |a_n|$  „>“ gelten soll

Behauptung: 1.  $c_i - a_i\alpha_i \neq 0$  für alle  $i = 2, 3, \dots, n$  (Durchführbarkeit)  
2.  $|\alpha_i| \leq 1$  für alle  $i = 2, 3, \dots, n$  (Stabilität)

Ein Beweis dieses Satzes ist zum Beispiel in [71] zu finden.

Die Bedingung  $c_i - a_i\alpha_i \neq 0$  sichert die Berechenbarkeit der Größen  $\alpha_{i+1}$  und  $\beta_{i+1}$  in den Eliminationsschritten und aus  $|\alpha_i| \leq 1$  folgt, daß Rundungsfehler, die in einem

Rechenschritt auftreten, beim Übergang zum nächsten Schritt nicht anwachsen. Sei zum Beispiel beim Rückwärtseinsetzen für ein  $i = i_0$  anstelle von  $u_{i_0}$  ein Wert  $\tilde{u}_{i_0} = u_{i_0} + \delta_{i_0}$  mit dem Fehler  $\delta_{i_0}$  berechnet worden. Dann gilt im nächsten Rechenschritt, d.h. für  $i = i_0 - 1$ , anstelle von  $u_{i_0-1} = \beta_{i_0} + \alpha_{i_0} u_{i_0}$  die Beziehung  $\tilde{u}_{i_0-1} = \beta_{i_0} + \alpha_{i_0}(u_{i_0} + \delta_{i_0})$ . Unter der Bedingung  $|\alpha_{i_0}| \leq 1$  erhalten wir für den Fehler  $\delta_{i_0-1}$

$$|\delta_{i_0-1}| = |\tilde{u}_{i_0-1} - u_{i_0-1}| = |\alpha_{i_0} \delta_{i_0}| \leq |\delta_{i_0}|.$$

### Bemerkung 3.6

1. In unserem Beispiel (siehe Abschnitt 3.3) sind die Voraussetzungen des Satzes 3.1 erfüllt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{h} \right| &> \left| \frac{1}{h} \right| && (|c_1| > |b_1|, |c_1| > 0) \\ \left| \frac{2}{h} \right| &\geq \left| \frac{1}{h} \right| + \left| \frac{1}{h} \right| && (|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, |a_i| > 0, |b_i| > 0, i = 2, 3, \dots, n-1) \\ \left| \frac{1}{h} + \alpha_b \right| &> \left| \frac{1}{h} \right| && (|c_n| > |a_n|, |c_n| > 0). \end{aligned}$$

2. Für 5–diagonale (bei quadratischen Elementen) und 7–diagonale (bei kubischen Elementen) Gleichungssysteme können analoge Auflösungsalgorithmen hergeleitet werden.

**Bemerkung 3.7** Es gilt die Beziehung  $K = LU$  mit

$$L = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & \Delta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_3 & \Delta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & \Delta_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n & \Delta_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -\alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und  $\Delta_i = c_i - a_i \alpha_i$ .

## 3.7 Diskretisierungsfehlerabschätzungen

In diesem Abschnitt geben wir Abschätzungen für den Diskretisierungsfehler  $\|u - u_h\|$  in verschiedenen Normen an. Dabei bezeichnen  $u$  die exakte Lösung der Variationsformulierung des Randwertproblems und  $u_h$  die Finite-Elemente-Näherungslösung.

- *Exakte Lösung  $u$  des Randwertproblems*

Die Variationsformulierung des Wärmeleitproblems aus dem Abschnitt 3.2 lautet (siehe auch die Beziehung (3.6)):

Gesucht ist  $u \in V_g$ , so daß

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_0 \quad (3.28)$$

mit

$$a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x) dx + \alpha_b u(b)v(b), \quad \langle F, v \rangle = \int_a^b f(x)v(x) dx + \alpha_b g_b v(b),$$

$$V_g = \{u \in H^1(a, b) : u(a) = g_a\} \quad \text{und} \quad V_0 = \{v \in H^1(a, b) : v(a) = 0\}$$

gilt.

**Bemerkung 3.8** Der Ausdruck  $a(.,.)$  ist eine Bilinearform, d.h.

$$a(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2, v) = \nu_1 a(u_1, v) + \nu_2 a(u_2, v) \quad \text{für alle } u_1, u_2 \in V_g, \text{ für alle } v \in V_0 \\ \text{und für alle } \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^1$$

$$a(u, \nu_1 v_1 + \nu_2 v_2) = \nu_1 a(u, v_1) + \nu_2 a(u, v_2) \quad \text{für alle } u \in V_g, \text{ für alle } v_1, v_2 \in V_0 \\ \text{und für alle } \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^1$$

- *Finite-Elemente-Näherungslösung*  $u_h$

Die FE-Näherungslösung erhalten wir aus der Ersatzaufgabe:

Gesucht ist  $u_h \in V_{gh}$ , so daß

$$a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \text{für alle } v_h \in V_{0h} \quad (3.29)$$

mit

$$a(u_h, v_h) = \int_a^b u_h'(x) v_h'(x) dx + \alpha_b u_h(b) v_h(b),$$

$$\langle F, v_h \rangle = \int_a^b f(x) v_h(x) dx + \alpha_b g_b v_h(b),$$

$$V_{gh} = \left\{ u_h : u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x) + u_0 \varphi_0(x) \right\} \quad (u_0 = g_a),$$

$$V_{0h} = \left\{ v_h : v_h(x) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x) \right\}$$

gilt. Die Bestimmung der Lösung dieser Aufgabe erfolgt durch das Lösen des linearen FE-Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^n u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = \langle F, \varphi_i \rangle - u_0 a(\varphi_0, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.30)$$

(siehe auch die Abschnitte 3.3 und 3.4).

- *Beurteilung des Fehlers*  $e(x) = u(x) - u_h(x) \in V_0$

Zur Beurteilung des Fehlers benötigen wir eine Norm  $\| \cdot \|$ . Jede Norm erfüllt die folgenden Bedingungen:

1.  $\|v\| \geq 0$ ,  $\|v\| = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  für alle  $v \in V_0$  und für alle  $\lambda \in \mathbb{R}^1$
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  für alle  $u, v \in V_0$

Die folgenden Normen sind interessant:

1.  $C$ -Norm  $\|\cdot\|_C$

$$\|u - u_h\|_C := \max_{x \in [a,b]} |u(x) - u_h(x)|$$

2.  $L_2$ -Norm  $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{0,2,(a,b)}$

$$\|u - u_h\|_0 := \sqrt{\int_a^b (u(x) - u_h(x))^2 dx}$$

3.  $H^1$ -Norm  $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{1,2,(a,b)}$

$$\|u - u_h\|_1 := \sqrt{\int_a^b [(u(x) - u_h(x))^2 + ((u(x) - u_h(x)))']^2 dx}$$

Falls  $u \in V_g$  quadratisch integrierbare Ableitungen bis zur Ordnung  $k + 1$  (zumindest elementweise) besitzt, d.h. wenn  $u', u'', \dots, u^{(k+1)} \in L_2(x_{j-1}, x_j)$  gilt, und finite Elemente  $p$ -ter Ordnung ( $p = 1$  linear,  $p = 2$  quadratisch,  $p = 3$  kubisch) verwendet werden, dann erhalten wir folgende Diskretisierungsfehlerabschätzungen:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_s &\leq c_s h^{\min\{k,p\}+1-s}, & s = 0, 1 \\ \|u - u_h\|_C &\leq c_\infty h^{\min\{k,p\}+0.5}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dabei sind  $c_s$  und  $c_\infty$  nichtnegative Konstanten, die von der exakten Lösung  $u$  abhängen und vom Diskretisierungsparameter  $h$  unabhängig sind (siehe auch [13, 30]).

**Bemerkung 3.9** Um derartige Fehlerabschätzungen beweisen zu können, müssen wir voraussetzen, daß die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$   $V_0$ -elliptisch und  $V_0$ -beschränkt ist, d.h.:

$$\begin{aligned} \text{Es existiert ein } \mu_1 > 0 : \quad a(v, v) &\geq \mu_1 \|v\|_1^2 && \text{für alle } v \in V_0 \quad \text{und} \\ \text{es existiert ein } \mu_2 > 0 : \quad |a(u, v)| &\leq \mu_2 \|u\|_1 \|v\|_1 && \text{für alle } u, v \in V_0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Im weiteren wollen wir die Abschätzung (3.31) für  $s = 1$  ( $\|\cdot\|_1$ ),  $p = 1$  (lineare Ansatzfunktionen) und die Modellaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) && \text{in } (0, 1) \\ u(0) &= g_0 \\ u'(1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

beweisen.

Die Variationsformulierung der Aufgabe (3.33) lautet:

Gesucht ist  $u \in V_g$ , so daß

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_0 \quad (3.34)$$

mit

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx, \quad \langle F, v \rangle = \int_0^1 f(x)v(x) dx,$$

$$V_g = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = g_0\} \quad \text{und} \quad V_0 = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$$

gilt.

Die Finite-Elemente-Näherungslösung ist somit Lösung der Aufgabe:

Gesucht ist die Funktion  $u_h \in V_{gh}$ , die der Beziehung

$$a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \text{für alle } v_h \in V_{0h} \quad (3.35)$$

mit

$$a(u_h, v_h) = \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x) dx, \quad \langle F, v_h \rangle = \int_0^1 f(x)v_h(x) dx,$$

$$V_{gh} = \left\{ u_h : u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x) + u_0 \varphi_0(x) \right\} \quad (u_0 = g_0),$$

$$V_{0h} = \left\{ v_h : v_h(x) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(x) \right\}$$

genügt.

Für unsere Modellaufgabe existieren offenbar solche Konstanten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  aus den Beziehungen (3.32). Es gilt mit der Friedrichsschen Ungleichung

$$\int_0^1 (v(x))^2 dx \leq c_F^2 \int_0^1 (v'(x))^2 dx \quad \text{für alle } v(x) \in V_0 \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_0^1 (v'(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \frac{1}{2c_F^2} \int_0^1 (v(x))^2 dx \\ &\geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2} \right\} \|v\|_1^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

d.h.  $\mu_1 = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2} \right\}$ . Mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \int_0^1 u'(x)v'(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 (u'(x))^2 dx} \sqrt{\int_0^1 (v'(x))^2 dx} \quad (3.38)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 u'(x)v'(x) dx \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 (u'(x))^2 dx} \sqrt{\int_0^1 (v'(x))^2 dx} \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 [(u(x))^2 + (u'(x))^2] dx} \sqrt{\int_0^1 [(v(x))^2 + (v'(x))^2] dx} \\ &= \|u\|_1 \|v\|_1, \end{aligned} \quad (3.39)$$

d.h.  $\mu_2 = 1$ .

Wegen  $V_{0h} \subset V_0$  gilt auch

$$a(u, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \text{für alle } v_h \in V_{0h}. \quad (3.40)$$

Subtrahieren wir die Gleichung (3.35) von der Gleichung (3.40), dann ergibt sich

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \text{für alle } v_h \in V_{0h}. \quad (3.41)$$

Für  $v_h = u - u_h - (u - w_h) = w_h - u_h \in V_{0h}$  folgt aus der  $V_0$ -Elliptizität und der  $V_0$ -Beschränktheit der Bilinearform  $a(.,.)$  sowie aus der Beziehung (3.41)

$$\begin{aligned} \mu_1 \|u - u_h\|_1^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u) - a(u - u_h, u_h) \\ &= a(u - u_h, u) - a(u - u_h, w_h - v_h) \\ &= a(u - u_h, u) - a(u - u_h, w_h) \\ &= a(u - u_h, u - w_h) \\ &\leq \mu_2 \|u - u_h\|_1 \|u - w_h\|_1, \end{aligned} \quad (3.42)$$

mit einer beliebigen Funktion  $w_h \in V_{gh}$ , d.h.

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf_{w_h \in V_{gh}} \|u - w_h\|_1. \quad (3.43)$$

Setzen wir in (3.43) den Interpolanten

$$w_h = \text{Int}_h(u) = \sum_{i=0}^n u(x_i) \varphi_i(x) \quad (3.44)$$

ein und beachten wir, daß in unserer Modellaufgabe  $\mu_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2}\right\}$  sowie  $\mu_2 = 1$  gilt, so ergibt sich

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{1}{\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2}\right\}} \|u - \text{Int}_h(u)\|_1. \quad (3.45)$$

Wir schätzen zunächst den Interpolationsfehler  $\|(u - w_h)'\|_0 = \|(u - \text{Int}_h(u))'\|_0$  ab. Dabei erhalten wir

$$\begin{aligned} \|(u - w_h)'\|_0^2 &= \int_0^1 (u'(x) - w_h'(x))^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u'(x) - w_h'(x))^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (z'(x))^2 dx \end{aligned}$$

mit  $z(x) = u(x) - w_h(x)$ . Da  $w_h(x)$  der Interpolant von  $u(x)$  ist (siehe (3.44)), gilt offenbar

$$z(x_j) = u(x_j) - w_h(x_j) = 0 \quad \text{für alle } j = 0, 1, \dots, n.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (z'(x))^2 dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ z'(x) - \frac{1}{h} \underbrace{\int_{x_{j-1}}^{x_j} z'(\xi) d\xi}_{z(x_j) - z(x_{j-1}) = 0} \right\}^2 dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \underbrace{(z'(x) - z'(\xi))}_{= \int_{\xi}^x z''(\eta) d\eta} d\xi \right\}^2 dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( 1 \cdot \int_{\xi}^x z''(\eta) d\eta \right) d\xi \right\}^2 dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( 1 \cdot \int_{\xi}^x z''(\eta) d\eta \right) d\xi \right]^2 \right\} dx. \end{aligned}$$

Die zweimalige Anwendung der Schwarzschen Ungleichung liefert

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (z'(x))^2 dx \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[ \int_{x_{j-1}}^{x_j} 1^2 d\xi \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \int_{\xi}^x z''(\eta) d\eta \right)^2 d\xi \right] \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} (z'(x))^2 dx &\leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[ (x_j - x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \int_{\xi}^x 1 \cdot z''(\eta) d\eta \right)^2 d\xi \right] \right\} dx \\
&\leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[ h \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \int_{\xi}^x 1^2 d\eta \int_{\xi}^x (z''(\eta))^2 d\eta \right) d\xi \right] \right\} dx \\
&\leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[ h \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( |x - \xi| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (z''(\eta))^2 d\eta \right) d\xi \right] \right\} dx \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \underbrace{\frac{|x - \xi|}{h}}_{\leq 1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (z''(\eta))^2 d\eta \right) d\xi \right\} dx \\
&\leq h^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} (z''(\eta))^2 d\eta.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\|(u - \text{Int}_h(u))'\|_0^2 = \|(u - w_h)'\|_0^2 \leq \sum_{j=1}^n h^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} (z''(\eta))^2 d\eta = h^2 \int_0^1 (z''(\eta))^2 d\eta.$$

Mit der Beziehung (3.45) und der Friedrichsschen Ungleichung (3.36) gilt dann

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_1^2 &\leq \frac{1}{\left\{ \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2} \right\} \right\}^2} \|u - \text{Int}_h(u)\|_1^2 \\
&= \frac{1}{\left\{ \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2} \right\} \right\}^2} \left[ \|u - \text{Int}_h(u)\|_0^2 + \|(u - \text{Int}_h(u))'\|_0^2 \right] \\
&\leq \frac{1 + c_F^2}{\left\{ \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2} \right\} \right\}^2} \|(u - \text{Int}_h(u))'\|_0^2 \\
&\leq \frac{1 + c_F^2}{\left\{ \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2} \right\} \right\}^2} h^2 \int_0^1 [(u - \text{Int}_h(u))'']^2 dx.
\end{aligned}$$

Da die Interpolante von  $u$  stückweise linear ist und somit  $(\text{Int}_h(u))'' = 0$ , erhalten wir schließlich die gesuchte Abschätzung

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{\sqrt{1 + c_F^2}}{\min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2c_F^2} \right\}} h \|u''\|_0 = c_1 h.$$

**Bemerkung 3.10** Falls der FE-Raum  $V_{0h}$  die stückweise linearen Funktionen enthält, dann ist bei Randwertproblemen der Gestalt (3.46) der Fehler  $u(x) - u_h(x)$  in den Intervallenden der Elemente  $[x_{j-1}, x_j]$  gleich Null. Dies wollen wir kurz begründen. Den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildet die Variationsformulierung

Gesucht ist  $u(x) \in V_g$ , so daß

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_0 \quad (3.46)$$

mit

$$a(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x) dx, \quad \langle F, v \rangle = \int_a^b f(x)v(x) dx + g_b v(b),$$

$$V_g = \{u(x) \in H^1(a, b) : u(a) = g_a\} \quad \text{und} \quad V_0 = \{v(x) \in H^1(a, b) : v(a) = 0\}$$

gilt.

Die zugehörige Näherungsaufgabe lautet:

Gesucht ist  $u_h(x) \in V_{gh}$ , so daß

$$a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \text{für alle } v_h \in V_{0h}$$

erfüllt ist, wobei die Bilinearform und die rechte Seite durch

$$a(u_h, v_h) = \int_a^b u_h'(x)v_h'(x) dx \quad \text{sowie} \quad \langle F, v_h \rangle = \int_a^b f(x)v_h(x) dx + g_b v_h(b)$$

definiert sind. Die Elemente der Funktionenmengen  $V_{gh}$  und  $V_{0h}$  seien stetige Funktionen, die über den finiten Elementen  $[x_{j-1}, x_j]$  Polynome  $p$ -ten Grades sind. In Analogie zur Vorgehensweise bei der Herleitung der Beziehung (3.41) erhalten wir die Relation

$$a(u - u_h, v_h) = 0$$

für alle  $v_h \in V_{0h}$ , d.h. für die Bilinearform in der Aufgabe (3.46)

$$\int_a^b (u(x) - u_h(x))'v_h'(x) dx = 0$$

oder in äquivalenter Schreibweise

$$\sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} u'(x)v_h'(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} u_h'(x)v_h'(x) dx. \quad (3.47)$$

Wir wählen als Testfunktion  $v_h \in V_{0h}$  zunächst eine Funktion, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Die Funktion  $v_h$  ist linear im Intervall  $[x_0, x_1]$ , d.h.  $v_h'$  ist konstant in  $[x_0, x_1]$ ,

2.  $v_h(a) = v_h(x_0) = 0$ ,  $v_h(x_1) = v_1$  und
3.  $v_h(x) = v_1$  für alle  $x \in (x_1, x_n]$ , d.h.  $v_h'(x) = 0$  für alle  $x \in (x_1, x_n]$ .

Für eine derartige Funktion folgt aus (3.47)

$$\int_{x_0}^{x_1} u'(x)v_h'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} u_h'(x)v_h'(x) dx.$$

Dies ist wegen  $v_h'(x) = \text{const.}$  in  $[x_0, x_1]$  äquivalent zu

$$\int_{x_0}^{x_1} u'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} u_h'(x) dx,$$

d.h.

$$u(x_1) - u(x_0) = u_h(x_1) - u_h(x_0).$$

Wegen der vorgegebenen Randbedingung  $u(x_0) = u_h(x_0) = g_a$  erhalten wir schließlich

$$u(x_1) = u_h(x_1).$$

Unter Ausnutzung der Beziehungen  $u(x_0) = u_h(x_0)$  sowie  $u(x_1) = u_h(x_1)$  können wir beweisen, daß auch  $u(x_2) = u_h(x_2)$  gilt. Wir wählen als Funktion  $v_h \in V_{0h}$  eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion  $v_h$  ist stückweise linear, d.h. linear in den Intervallen  $[x_0, x_1]$  sowie  $[x_1, x_2]$ ,
2.  $v_h(x_0) = v_h(x_2) = 0$ ,  $v_h(x_1) = v_1$  und
3.  $v_h = 0$  für alle  $x \in [x_2, x_n]$ .

Mit einer derartigen Funktion  $v_h$  hat die Beziehung (3.47) die Form

$$\int_{x_0}^{x_1} u'(x)v_h'(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} u'(x)v_h'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} u_h'(x)v_h'(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} u_h'(x)v_h'(x) dx. \quad (3.48)$$

Da die Funktion  $v_h$  linear in den Intervallen  $[x_0, x_1]$  und  $[x_1, x_2]$  ist sowie  $v_h(x_0) = v_h(x_2) = 0$  gelten soll, ergibt sich mit  $h_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $j = 1, 2$ ,

$$\frac{v_1}{h_1} \int_{x_0}^{x_1} u'(x) dx - \frac{v_1}{h_2} \int_{x_1}^{x_2} u'(x) dx = \frac{v_1}{h_1} \int_{x_0}^{x_1} u_h'(x) dx - \frac{v_1}{h_2} \int_{x_1}^{x_2} u_h'(x) dx.$$

Die Berechnung dieser Integrale liefert

$$v_1 \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h_1} - v_1 \frac{u(x_2) - u(x_1)}{h_2} = v_1 \frac{u_h(x_1) - u_h(x_0)}{h_1} - v_1 \frac{u_h(x_2) - u_h(x_1)}{h_2},$$

woraus wegen  $u(x_0) = u_h(x_0)$  sowie  $u(x_1) = u_h(x_1)$  die Beziehung  $u(x_2) = u_h(x_2)$  folgt. Für alle weiteren  $i = 3, 4, \dots, n$  kann auf völlig analoge Weise die Gleichheit  $u(x_i) = u_h(x_i)$  bewiesen werden.

### 3.8 Zwei Anwendungsbeispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir die stationäre Wärmeleitung in einem Stab, bestehend aus zwei Materialien.

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x)$  in  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\Omega_1 = (0, 0.5)$ ,  $\Omega_2 = (0.5, 1)$ , wobei  $\lambda_1 = 50 \text{ W/mK}$  (Stahl),  $\lambda_2 = 371 \text{ W/mK}$  (Kupfer),  $f \equiv 0$  (keine Wärmequellen und -senken),  $q \equiv 0$  (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Mantel),  $g_0 \equiv 273.15 \text{ K}$  und  $g_1 \equiv 323.15 \text{ K}$  gilt.

Dieses physikalische Problem wird durch die folgende Randwertaufgabe beschrieben (siehe auch Abschnitt 2.1.1):

$$\begin{array}{lll}
 x = 0 & \text{Randbedingung} & \bar{u}(0) = 273.15 \\
 x \in (0, 0.5) & \text{Differentialgleichung} & -(50 \bar{u}')' = 0 \\
 x = 0.5 & \text{Interfacebedingung} & \begin{array}{l} \bar{u}(0.5 - 0) = \bar{u}(0.5 + 0) \\ -50 \bar{u}'(0.5 - 0) = -371 \bar{u}'(0.5 + 0) \end{array} \\
 x \in (0.5, 1) & \text{Differentialgleichung} & -(371 \bar{u}')' = 0 \\
 x = 1 & \text{Randbedingung} & \bar{u}(1) = 323.15
 \end{array} \quad (3.49)$$

Setzen wir in der Aufgabe (3.49)  $\bar{u}(x) = u(x) + 273.15$ , dann erhalten wir die äquivalente Aufgabe:

$$\begin{array}{lll}
 x = 0 & \text{Randbedingung} & u(0) = 0 \\
 x \in (0, 0.5) & \text{Differentialgleichung} & -(50 u')' = 0 \\
 x = 0.5 & \text{Interfacebedingung} & \begin{array}{l} u(0.5 - 0) = u(0.5 + 0) \\ -50 u'(0.5 - 0) = -371 u'(0.5 + 0) \end{array} \\
 x \in (0.5, 1) & \text{Differentialgleichung} & -(371 u')' = 0 \\
 x = 1 & \text{Randbedingung} & u(1) = 50
 \end{array} \quad (3.50)$$

Zunächst wollen wir diese Aufgabe analytisch lösen. Da die rechten Seiten in den Differentialgleichungen identisch Null sowie die Wärmeleitkoeffizienten konstant sind, wird folglich eine Funktion gesucht, deren 2. Ableitungen verschwinden. Wir vermuten, daß das Temperaturfeld  $u(x)$  in den Teilgebieten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  jeweils eine lineare Funktion ist und verwenden deshalb den folgenden Lösungsansatz:

$$\begin{array}{ll}
 u(x) = cx + d & \text{in } \Omega_1 \\
 u(x) = ex + f & \text{in } \Omega_2.
 \end{array} \quad (3.51)$$

Die unbekannt Parameter  $c, d, e$  und  $f$  bestimmen wir aus den Rand- und Interfacebedingungen:

$$\begin{aligned}
\text{Randbedingungen: } \quad u(0) = 0c + d = 0 &\implies d = 0 \\
\quad \quad \quad u(1) = 1e + f = 50 &\implies e + f = 50 \\
\text{Interfacebedingungen: } 0.5c + d = 0.5e + f &\implies 0.5c = 0.5e + f \\
\quad \quad \quad -50c = -371e &\implies c = \frac{371}{50}e.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} e + f = 50 \\ 0.5e + f = 3.71e \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} e + f = 50 \\ -3.21e + f = 0. \end{array}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind:

$$e = \frac{5000}{421} \quad \text{und} \quad f = \frac{16050}{421},$$

so daß  $c = \frac{37100}{421}$  gilt.

Die Randwertaufgabe (3.50) hat folglich die Lösung:

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0 \\
u(x) &= \frac{37100}{421}x \quad \text{für } x \in (0, 0.5) \\
u(0.5) &= \frac{18550}{421} \\
u(x) &= \frac{5000}{421}x + \frac{16050}{421} \quad \text{für } x \in (0.5, 1) \\
u(1) &= 50.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Wir lösen nun die Randwertaufgabe mittels der Methode der finiten Elemente. Deshalb stellen wir zuerst die Variationsformulierung auf. Wir wählen eine beliebige Testfunktion  $v(x) \in V_0 = \{v(x) \in H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\}$ , multiplizieren die Differentialgleichungen mit solch einer Funktion und integrieren über  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$ , d.h.

$$\int_0^{0.5} -(50u'(x))'v(x) dx + \int_{0.5}^1 -(371u'(x))'v(x) dx = \int_0^{0.5} 0 v(x) dx + \int_{0.5}^1 0 v(x) dx.$$

Mit der Formel der partiellen Integration folgt

$$\int_0^{0.5} 50u'(x)v'(x) dx - 50u'(x)v(x)\Big|_0^{0.5} + \int_{0.5}^1 371u'(x)v'(x) dx - 371u'(x)v(x)\Big|_{0.5}^1 = 0$$

$$\int_0^{0.5} 50u'(x)v'(x) dx + \int_{0.5}^1 371u'(x)v'(x) dx - 50u'(0.5)v(0.5) + 50u'(0)v(0) \\ - 371u'(1)v(1) + 371u'(0.5)v(0.5) = 0.$$

Beachten wir noch die Interfacebedingung  $-50u'(0.5-0) = -371u'(0.5+0)$  sowie die Bedingung  $v(0) = v(1) = 0$ , so erhalten wir die Variationsformulierung:

Gesucht ist  $u(x) \in V_g = \{u(x) \in H^1(0,1) : u(0) = 0, u(1) = 50\}$ , so daß

$$\int_0^1 \lambda(x)u'(x)v'(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v \in V_0 = \{v(x) \in H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0\} \quad (3.53)$$

mit

$$\lambda(x) = \begin{cases} 50 & \text{für } x < 0.5 \\ 371 & \text{für } x > 0.5 \end{cases}$$

gilt.

Diese Variationsformulierung ist der Ausgangspunkt einer Finite-Elemente-Diskretisierung. Zur Demonstration des Algorithmus der Methode der finiten Elemente zerlegen wir das Intervall  $(0,1)$  in 4 Teilintervalle. Um auch den Fall einer nicht äquidistanten Unterteilung erläutern zu können, wählen wir die folgende Zerlegung:

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^4 [x_{i-1}, x_i] \quad (3.54)$$

mit

$$(x_0, x_1) = (0, 0.3), \quad (x_1, x_2) = (0.3, 0.5), \quad (x_2, x_3) = (0.5, 0.7), \quad (x_3, x_4) = (0.7, 1).$$

Wesentlich ist dabei, daß die Materialgrenze, d.h. der Punkt, in dem die Interfacebedingung gegeben ist, als Knoten und damit als End- bzw. Anfangspunkt zweier Teilintervalle gewählt wird.

Wir wissen, daß die Lösung des Randwertproblems linear in den Teilgebieten  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  und  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  ist. Deshalb würde bereits bei einer FE-Diskretisierung mit den zwei finiten Elementen  $(0, 0.5)$  und  $(0.5, 1)$  sowie stückweise linearen Ansatzfunktionen die Lösung des Randwertproblems exakt approximiert. Wir wählen die obenbeschriebene Diskretisierung nur, um den FE-Algorithmus nochmals ausführlich demonstrieren zu können.

Die stückweise linearen Ansatzfunktionen sind durch

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & x_{i+1} < x \end{cases} \quad (3.55)$$

definiert. Für die verallgemeinerten Ableitungen  $\varphi'_i(x)$  gilt (siehe auch Abschnitt 3.1)

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & x_{i+1} < x \end{cases} \quad (3.56)$$

Aus der folgenden Näherungsaufgabe leiten wir das FE-Gleichungssystem her.

Gesucht ist  $u_h(x) \in V_{gh}$ , so daß

$$\int_0^1 \lambda(x) u'_h(x) v'_h(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v_h \in V_{0h} \quad (3.57)$$

mit

$$\lambda(x) = \begin{cases} 50 & \text{für } x < 0.5 \\ 371 & \text{für } x > 0.5 \end{cases},$$

$$V_{gh} = \left\{ u_h(x) : u_h(x) = \sum_{i=1}^3 u_i \varphi_i(x) + 0 \varphi_0(x) + 50 \varphi_4(x) \right\} \quad \text{und}$$

$$V_{0h} = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{i=1}^3 v_i \varphi_i(x) \right\}$$

gilt.

Analog zu der im Abschnitt 3.4 beschriebenen Herangehensweise werden die Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(i)}$  und die Elementlastvektoren  $\underline{f}^{(i)}$  berechnet:

$$K^{(i)} = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda(x) \varphi'_{i-1}(x) \varphi'_{i-1}(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda(x) \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda(x) \varphi'_{i-1}(x) \varphi'_i(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda(x) \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

$$\underline{f}^{(i)} = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_{i-1}(x) dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Unter Beachtung der Definition der Funktionen  $\varphi_i(x)$  und mit den berechneten verallgemeinerten Ableitungen  $\varphi'_i(x)$  (siehe (3.55) und (3.56)) erhalten wir:

finites Element	$K^{(i)}$	$f^{(i)}$
(0, 0.3)	$\begin{pmatrix} \frac{500}{3} & -\frac{500}{3} \\ -\frac{500}{3} & \frac{500}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(0.3, 0.5)	$\begin{pmatrix} \frac{500}{2} & -\frac{500}{2} \\ -\frac{500}{2} & \frac{500}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(0.5, 0.7)	$\begin{pmatrix} \frac{3710}{2} & -\frac{3710}{2} \\ -\frac{3710}{2} & \frac{3710}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(0.5, 0.7)	$\begin{pmatrix} \frac{3710}{3} & -\frac{3710}{3} \\ -\frac{3710}{3} & \frac{3710}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tabelle 3.2: Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren

Bevor wir die globale Steifigkeitsmatrix und den globalen Lastvektor assemblieren, stellen wir noch die Zuordnungstabelle zwischen der lokalen und der globalen Knotennummerierung auf.

Elementnummer	globale Knotennummer des Knotens mit der lokalen Knotennummer	
	1	2
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4

Tabelle 3.3: Zuordnungstabelle zwischen globaler und lokaler Knotennummerierung

Die Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrizen und der Elementlastvektoren ergibt die globale Steifigkeitsmatrix  $\bar{K}_h$  und den globalen Lastvektor  $\bar{f}_h$ ,

$$\bar{K}_h = \begin{pmatrix} \frac{500}{3} & -\frac{500}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{500}{3} & \frac{500}{3} + \frac{500}{2} & -\frac{500}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{500}{2} & \frac{500}{2} + \frac{3170}{2} & -\frac{3170}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3170}{2} & \frac{3170}{2} + \frac{3170}{3} & -\frac{3170}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3170}{3} & \frac{3170}{3} \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

in denen die Randbedingungen noch nicht berücksichtigt sind. Der Einbau der Randbedingungen  $u(0) = u_0 = 0$  und  $u(1) = u_4 = 50$  liefert das FE-Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{500}{3} + \frac{500}{2} & -\frac{500}{2} & 0 \\ -\frac{500}{2} & \frac{500}{2} + \frac{3170}{2} & -\frac{3170}{2} \\ 0 & -\frac{3710}{2} & \frac{3170}{2} + \frac{3170}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \frac{3170}{3} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \frac{1250}{3} & -250 & 0 \\ -250 & 2105 & -1855 \\ 0 & -1855 & \frac{9275}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{185500}{3} \end{pmatrix}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems verwenden wir den im Abschnitt 3.6 beschriebenen Algorithmus zur Lösung tridiagonaler Gleichungssysteme. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{3}{5}, & \beta_2 &= 0, & u_1 - \frac{3}{5}u_2 &= 0, \\ \alpha_3 &= \frac{1855}{2105 - \frac{3}{5}250} = \frac{371}{391}, & \beta_3 &= 0, & u_2 - \frac{371}{391}u_3 &= 0, \\ \beta_4 &= \frac{\frac{185500}{3}}{\frac{9275}{3} - 1855 \frac{371}{391}} = \frac{19550}{421} \end{aligned}$$

und somit

$$u_3 = \frac{19550}{421}, \quad u_2 = \frac{371}{391} \frac{19550}{421} = \frac{18550}{421}, \quad u_1 = \frac{3}{5} \frac{18550}{421} = \frac{11130}{421}.$$

Die FE-Lösung ist folglich

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^4 u_i \varphi_i(x) \quad \text{mit} \quad \underline{u} = [u_i]_{i=0}^4,$$

$$\underline{u} = \left( 0, \frac{11130}{421}, \frac{18550}{421}, \frac{19550}{421}, 50 \right)^T \approx (0, 26.44, 44.06, 46.44, 50)^T.$$

Zum Abschluß vergleichen wir die analytische Lösung mit der FE-Lösung.

	analytische Lösung	FE-Lösung
$x = 0.3$	$\frac{11130}{421}$	$\frac{11130}{421} \approx 26.44$
$x = 0.5$	$\frac{18550}{421}$	$\frac{18550}{421} \approx 44.06$
$x = 0.7$	$\frac{19550}{421}$	$\frac{19550}{421} \approx 46.44$

Tabelle 3.4: Analytische Lösung und FE-Lösung der betrachteten Randwertaufgabe

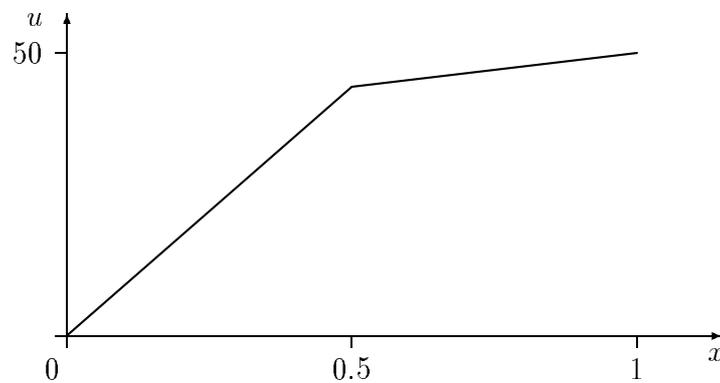


Abbildung 3.14: Darstellung der analytischen und der FE-Lösung

Als zweites Beispiel betrachten wir die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
 -u''(x) &= 6 - 6x + 12x^2 - 20x^3 & x \in (0, 2) \\
 u(0) &= 1 \\
 -u'(2) &= -50.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Die analytische Lösung dieser Aufgabe ist  $u(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^3 - x^4 + x^5$ , denn es gilt

$$\begin{aligned}
 u(0) &= 1 \\
 u'(x) &= 2 - 6x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4, \quad \text{d.h. } -u'(2) = -50 \\
 u''(x) &= -6 + 6x - 12x^2 + 20x^3.
 \end{aligned}$$

Als Variationsformulierung erhalten wir (siehe auch Abschnitt 3.2)

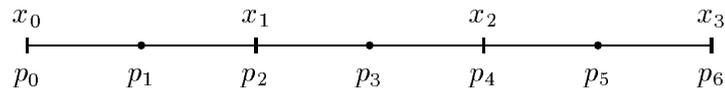
Gesucht ist  $u(x) \in V_g = \{u(x) \in H^1(0, 2) : u(0) = 1\}$ , so daß

$$\int_0^2 u'(x)v'(x) dx = \int_0^2 (6 - 6x + 12x^2 - 20x^3)v(x) dx + 50v(2) \tag{3.61}$$

für alle  $v(x) \in V_0$  mit  $V_0 = \{v(x) \in H^1(0, 2) : v(0) = 0\}$  erfüllt ist.

Bei der FE-Diskretisierung der Aufgabe (3.61) wollen wir die im Abschnitt 3.5 definierten stückweise quadratischen Ansatzfunktionen nutzen. Wir zerlegen zuerst das Intervall  $(0, 2)$  in 3 gleichgroße Teilintervalle, d.h.

$$[0, 2] = \bigcup_{i=1}^3 [x_{i-1}, x_i] \quad \text{mit} \quad (x_0, x_1) = (0, \frac{2}{3}), \quad (x_1, x_2) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \quad \text{und} \quad (x_2, x_3) = (\frac{4}{3}, 2).$$



globale Knotennummern:

0      1      2      3      4      5      6

lokale Knotennummern:

1      2      3  
           1      2      3  
                   1      2      3

Abbildung 3.15: Zerlegung des Intervalls  $(0, 2)$  und die Zuordnung zwischen globaler und lokaler Knotennumerierung

Die stückweise quadratischen Ansatzfunktionen  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 6$ , definieren wir, indem wir die auf dem Basiselement  $\hat{\Omega} = (0, 1)$  definierten Formfunktionen (siehe Abschnitt 3.5) auf das jeweilige Element transformieren. Dazu verwenden wir die Transformationsvorschrift

$$\xi(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1}{h_i} (x - x_{i-1}), \quad x(\xi) = h_i \xi + x_{i-1}$$

und die Formfunktionen

$$\hat{\Phi}_1(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1, \quad \hat{\Phi}_2(\xi) = -4\xi^2 + 4\xi \quad \hat{\Phi}_3(\xi) = 2\xi^2 - \xi.$$

Wir erhalten

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \hat{\Phi}_1(\xi(x)) = \hat{\Phi}_1(\frac{1}{h_1}(x)) & \text{für } 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{für } \frac{2}{3} \leq x \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_{i-1} \\ \hat{\Phi}_3(\frac{1}{h_i}(x - x_{i-1})) & \text{für } x_{i-1} \leq x < x_i \\ \hat{\Phi}_1(\frac{1}{h_{i+1}}(x - x_i)) & \text{für } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{für } x_{i+1} \leq x \end{cases}, \quad i = 1, 2$$

$$\varphi_6(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \frac{4}{3} \\ \widehat{\Phi}_3\left(\frac{1}{h_3}\left(x - \frac{4}{3}\right)\right) & \text{für } \frac{4}{3} \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\varphi_{2i-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_{i-1} \\ \widehat{\Phi}_2\left(\frac{1}{h_i}\left(x - x_{i-1}\right)\right) & \text{für } x_{i-1} \leq x < x_i, \quad i = 1, 2, 3. \\ 0 & \text{für } x_i \leq x \end{cases}$$

Auf die im Abschnitt 3.3 beschriebene Weise ergibt sich die Näherungsaufgabe:

Gesucht ist  $u_h(x) \in V_{gh}$ , so daß

$$\int_0^2 u'_h(x) v'_h(x) dx = \int_0^2 (6 - 6x + 12x^2 - 20x^3) v_h(x) dx + 50v_h(2) \quad (3.62)$$

für alle  $v_h \in V_{0h}$  mit

$$V_{gh} = \left\{ u_h(x) : u_h(x) = \sum_{i=1}^6 u_i \varphi_i(x) + \varphi_0(x) \right\} \quad \text{und} \quad V_{0h} = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{i=1}^6 v_i \varphi_i(x) \right\}$$

gilt.

Analog zum vorangegangenen Beispiel und zu der im Abschnitt 3.4 beschriebenen Vorgehensweise stellen wir das FE-Gleichungssystem auf. Dazu müssen die Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(i)}$  und die Elementlastvektoren  $\underline{f}^{(i)}$  berechnet werden, d.h.

$$K^{(i)} = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i-2}(x) \varphi'_{2i-2}(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i-1}(x) \varphi'_{2i-2}(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i}(x) \varphi'_{2i-2}(x) dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i-2}(x) \varphi'_{2i-1}(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i-1}(x) \varphi'_{2i-1}(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i}(x) \varphi'_{2i-1}(x) dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i-2}(x) \varphi'_{2i}(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i-1}(x) \varphi'_{2i}(x) dx & \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{2i}(x) \varphi'_{2i}(x) dx \end{pmatrix}.$$

Führen wir die Koordinatentransformation  $x = (x_i - x_{i-1})\xi + x_{i-1} = h_i \xi + x_{i-1}$  in allen Integralen durch, dann erhalten wir unter Beachtung des Zusammenhangs zwischen der globalen und der lokalen Knotennummerierung (siehe auch die Tabelle 3.6)

$$K^{(i)} = \left[ \int_0^1 \left( \frac{d\varphi_k(x(\xi))}{d\xi} \frac{d\xi(x)}{dx} \cdot \frac{d\varphi_l(x(\xi))}{d\xi} \frac{d\xi(x)}{dx} \right) h_i d\xi \right]_{k,l=2i-2}^{2i}$$

$$= \left[ \int_0^1 \left( \frac{d\widehat{\Phi}_\alpha}{d\xi} \frac{1}{h_i} \cdot \frac{d\widehat{\Phi}_\beta}{d\xi} \frac{1}{h_i} \right) h_i d\xi \right]_{\alpha,\beta=1}^3 = \left[ \frac{1}{h_i} \int_0^1 \left( \frac{d\widehat{\Phi}_\alpha}{d\xi} \cdot \frac{d\widehat{\Phi}_\beta}{d\xi} \right) d\xi \right]_{\alpha,\beta=1}^3$$

und

$$\underline{f}^{(i)} = \begin{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_{2i-2}(x) dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_{2i-1}(x) dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_{2i}(x) dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x(\xi)) \hat{\Phi}_1(\xi) h_i d\xi \\ \int_0^1 f(x(\xi)) \hat{\Phi}_2(\xi) h_i d\xi \\ \int_0^1 f(x(\xi)) \hat{\Phi}_3(\xi) h_i d\xi \end{pmatrix}.$$

mit  $f(x) = 6 - 6x + 12x^2 - 20x^3$ . Für die 3 finiten Elemente ergeben sich die folgenden Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren:

finites Element	$K^{(i)}$	$f^{(i)}$
$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{818}{1215} \\ \frac{2384}{1215} \\ \frac{278}{1215} \end{pmatrix}$
$(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{146}{405} \\ -\frac{544}{135} \\ -\frac{1154}{405} \end{pmatrix}$
$(\frac{4}{3}, 2)$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{3302}{1215} \\ -\frac{35216}{1215} \\ -\frac{15362}{1215} \end{pmatrix}$

Tabelle 3.5: Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren

Unter Anwendung der Informationen aus der Zuordnungstabelle 3.6

Elementnummer	globale Knotennummer des Knotens mit der lokalen Knotennummer		
	1	2	3
1	0	1	2
2	2	3	4
3	4	5	6

Tabelle 3.6: Zuordnungstabelle zwischen lokaler und globaler Knotennummerierung

und mit den Elementsteifigkeitsmatrizen sowie Elementlastvektoren aus der Tabelle 3.5 erhalten wir die globale Steifigkeitsmatrix  $\bar{K}_h$  und den globalen Lastvektor  $\bar{f}_h$ ,

$$\bar{K}_h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 7+7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7+7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_h = \begin{pmatrix} \frac{818}{1215} \\ \frac{2384}{1215} \\ \frac{278}{1215} + \frac{146}{405} \\ -\frac{544}{135} \\ -\frac{1154}{405} - \frac{3302}{1215} \\ -\frac{35216}{1215} \\ -\frac{15362}{1215} \end{pmatrix},$$

ohne Berücksichtigung der Randbedingungen. Beachten wir noch die Randbedingungen  $u(0) = u_0 = 1$  und  $u'(2) = 50$ , dann ergibt sich das FE-Gleichungssystem

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2384}{1215} + 4 \\ \frac{716}{1215} - \frac{1}{2} \\ -\frac{544}{135} \\ -\frac{6764}{1215} \\ -\frac{35216}{1215} \\ -\frac{15362}{1215} + 50 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\underline{u}_h = \left( \frac{551}{405}, \frac{299}{243}, \frac{401}{405}, \frac{427}{243}, \frac{259}{45}, 17 \right)^T.$$

Wir vergleichen die analytische Lösung mit der FE-Lösung.

	analytische Lösung $u(x)$	FE-Lösung $u_h(x)$	Fehler $ u(x) - u_h(x) $
$x = 0$	1	1	0
$x = \frac{1}{3}$	$\frac{331}{243}$	$\frac{551}{405}$	$\frac{2}{1215}$
$x = \frac{2}{3}$	$\frac{299}{243}$	$\frac{299}{243}$	0
$x = 1$	1	$\frac{401}{405}$	$\frac{4}{405}$
$x = \frac{4}{3}$	$\frac{427}{243}$	$\frac{427}{243}$	0
$x = \frac{5}{3}$	$\frac{1403}{243}$	$\frac{259}{45}$	$\frac{22}{1215}$
$x = 2$	17	17	0

Tabelle 3.7: Vergleich der analytischen Lösung mit der FE-Näherungslösung

In diesem Beispiel ist die FE-Lösung eine sehr gute Näherung für die analytische Lösung. Aus der Tabelle 3.7 ist ersichtlich, daß in den Intervallenden der Elemente  $[x_{i-1}, x_i]$  der Fehler  $u(x) - u_h(x)$  gleich Null ist. Diese Tatsache haben wir bereits in der Bemerkung 3.10 bewiesen.

Bei beiden vorgestellten Beispielen lag eine sehr gute Approximation der exakten Lösung vor. Dies ist darin begründet, daß die analytischen Lösungen eine besonders einfache Struktur hatten, d.h. daß sie Polynome niedrigen Grades waren. Einige der im Abschnitt 3.9 vorgestellten Beispiele zeigen aber, daß es i.a. notwendig ist, die Diskretisierungsschrittweite bzw. den Polynomgrad der Ansatzfunktionen dem Lösungsverhalten anzupassen. Das ist auch der typische Fall in praktischen Anwendungen.

### 3.9 Das Programm FEM1D

Das Programm FEM1D kann als Lehrprogramm zur Demonstration des algorithmischen Ablaufs der Finite-Elemente-Diskretisierung elliptischer Randwertprobleme in eindimensionalen Gebieten eingesetzt werden (siehe auch [79]). Dabei besteht insbesondere die Möglichkeit, den Aufbau des Finite-Elemente-Gleichungssystems grafisch zu verfolgen sowie die Gestalt der Ansatzfunktionen zu veranschaulichen. Fünf verschiedene im Programm implementierte Beispiele, deren analytische Lösung bekannt ist, erlauben es, den Einfluß der FE-Diskretisierung auf die Approximationsgüte zu untersuchen. Natürlich kann dieses Programm auch zur Bearbeitung eigener Aufgaben eingesetzt werden.

Mit dem Programm FEM1D sind stationäre Wärmeleitprobleme in Gebieten, die aus maximal fünf verschiedenen Materialien bestehen, lösbar. Diese Probleme werden durch die folgende Randwertaufgabe beschrieben (siehe auch Abschnitt 2.1.1) :

In den Teilgebieten  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , mit jeweils gleichem Material und konstanter Wärmequelle gilt die Differentialgleichung:

$$-(k(x)u'(x))' + c(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x).$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Eingangsdaten  $k(x)$ ,  $c(x)$ ,  $b(x)$  und  $f(x)$  stückweise konstant sind, d.h. konstant in jedem der Teilgebiete  $\Omega_i$ .

In den Unstetigkeitspunkten  $z_j$  der Koeffizientenfunktion  $k(x)$  sind die Interfacebedingungen:

$$\begin{aligned} u(z_j - 0) &= u(z_j + 0) \\ -k(z_j - 0)u'(z_j - 0) &= -k(z_j + 0)u'(z_j + 0) \end{aligned}$$

gegeben, und in den Punkten  $x = \xi_j$ , in denen eine Punktquelle bzw. -senke wirkt, gilt

$$-k(\xi_j + 0)u'(\xi_j + 0) + k(\xi_j - 0)u'(\xi_j - 0) = \hat{f}_j \quad (\xi_j \neq z_j)$$

(siehe auch die Bemerkung 2.3).

In den Randpunkten  $x = a$  und  $x = b$  können Randbedingungen

$$u(a) = g_a \quad \text{oder} \quad k(a)u'(a) = g_a \quad \text{sowie} \quad u(b) = g_b \quad \text{oder} \quad -k(b)u'(b) = g_b$$

vorgegeben werden.

Im weiteren stellen wir zwei Beispiele vor, die im Programm FEM1D implementiert sind.

### Beispiel 1

Wir betrachten die folgende Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 6 & \text{für } x \in (0,1) \\ u(x) &= 1 & \text{für } x = 0 \\ -u'(x) &= 4 & \text{für } x = 1. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Die exakte Lösung dieser Aufgabe ist  $u(x) = 1 + 2x - 3x^2$ .

Bei der näherungsweise Lösung der Randwertgabe (3.63) wählen wir die folgenden drei Diskretisierungen:

- *1. Variante*

3 finite Elemente mit stückweise linearen Ansatzfunktionen

- *2. Variante*

9 finite Elemente mit stückweise linearen Ansatzfunktionen

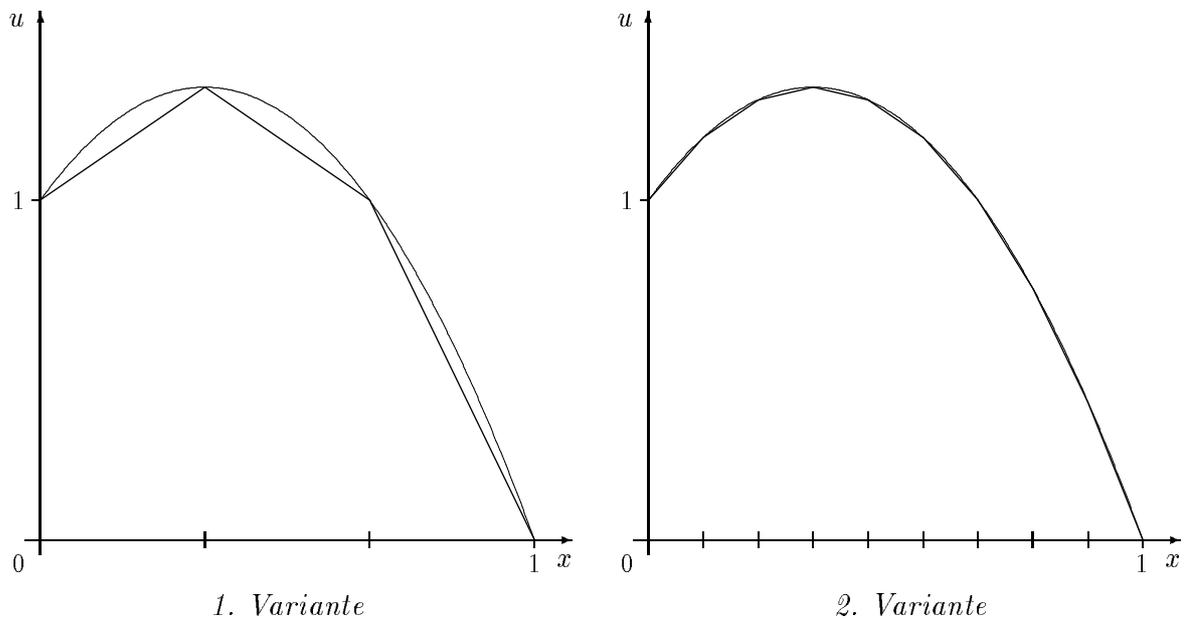


Abbildung 3.16: Vergleich der exakten Lösung mit der FE-Lösung

Es zeigt sich, daß mit der zweiten Variante eine wesentlich bessere Approximation der exakten Lösung erreicht wird als mit der ersten Variante.

- 3. Variante

1 finites Element mit quadratischen Ansatzfunktionen

Die dritte Variante liefert eine exakte Approximation der analytischen Lösung, da diese eine quadratische Funktion ist.

### Beispiel 2

Das folgende Randwertproblem beschreibt die Temperaturverteilung in einem dünnen Draht, der mit einer Geschwindigkeit  $v$  gezogen wird.

$$\begin{aligned} -(k u'(x))' + c \rho v u'(x) &= 0 & \text{für } x \in (0, 1) \\ u(x) &= 0 & \text{für } x = 0 \\ u(x) &= 1 & \text{für } x = 1 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dabei bezeichnen  $u(x)$  die Temperatur,  $\rho$  die Dichte des Drahtes,  $c$  die spezifische Wärmekapazität und  $v$  die Geschwindigkeit.

Die Aufgabe (3.64) ist mit  $p = c\rho v/k$  äquivalent zur Aufgabe

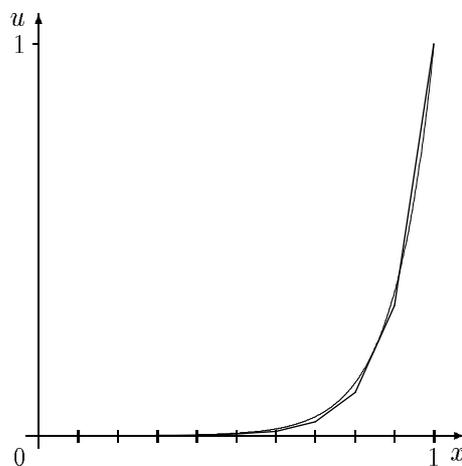
$$\begin{aligned} -u''(x) + p u'(x) &= 0 & \text{für } x \in (0, 1) \\ u(x) &= 0 & \text{für } x = 0 \\ u(x) &= 1 & \text{für } x = 1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Die analytische Lösung der Aufgabe (3.65) ist  $u(x) = \frac{e^{px} - 1}{e^p - 1}$ .

Wir untersuchen für verschiedene Werte des Parameters  $p$ , welche FE-Diskretisierungen durchgeführt werden können, um eine gute Näherungslösung zu erhalten.

Wir wählen die folgenden Diskretisierungen:

- 1. Variante:  $p = 10$ , 10 gleichgroße Elemente mit linearen Ansatzfunktionen



1. Variante

Abbildung 3.17: Analytische und FE-Lösung für  $p = 10$

Es zeigt sich, daß die exakte Lösung bei dieser Diskretisierung gut approximiert wird.

- 2. Variante:  $p = 70$ , 10 gleichgroße Elemente mit linearen Ansatzfunktionen
- 3. Variante:  $p = 70$ , 35 gleichgroße Elemente mit linearen Ansatzfunktionen

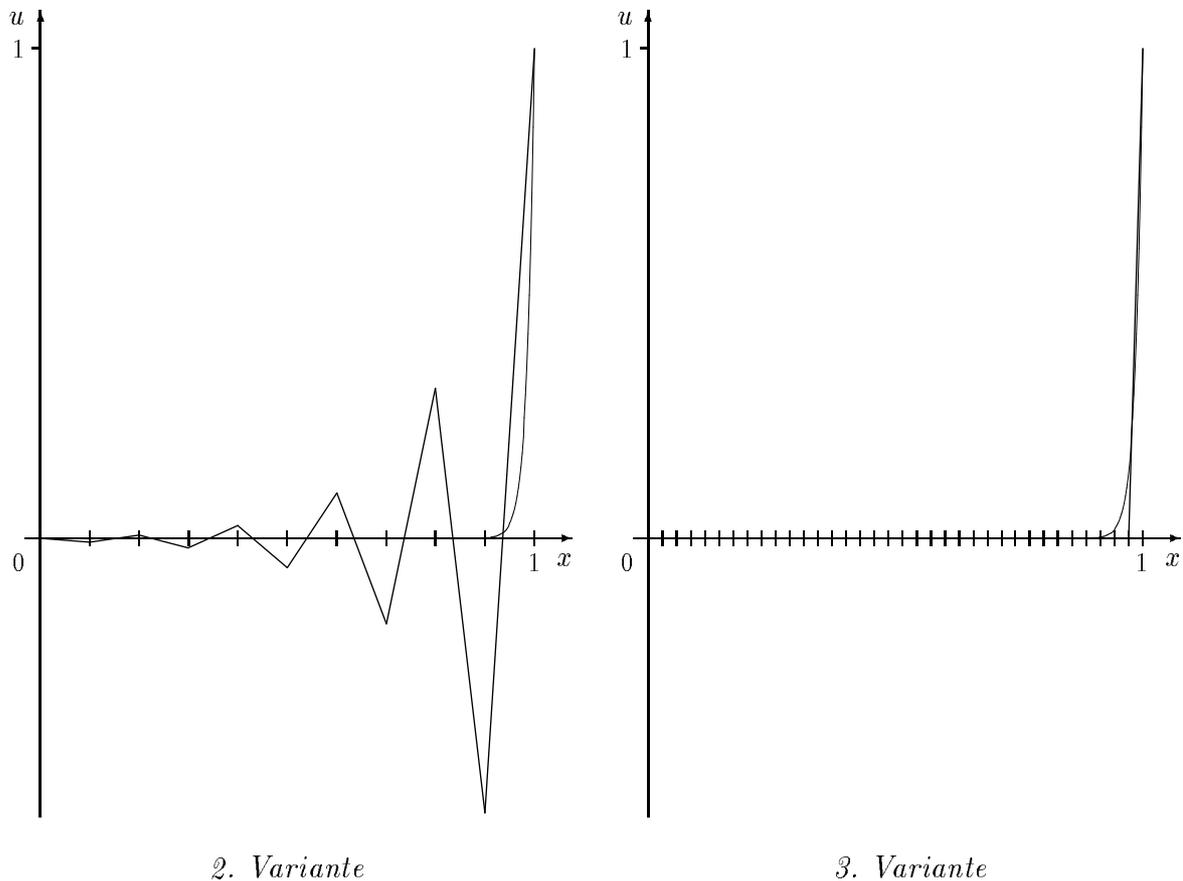


Abbildung 3.18: Analytische und FE-Lösung bei verschiedener Feinheit der Diskretisierung

Die Näherungslösung bei der zweiten Variante weist ein stark oszillierendes Verhalten auf. Sie spiegelt das richtige Lösungsverhalten überhaupt nicht wider. Die dritte Variante liefert eine FE-Lösung, welche die analytische Lösung nur noch in der Nähe des rechten Gebietsrandes schlecht approximiert.

- 4. Variante:  $p = 70$ , 70 gleichgroße Elemente mit linearen Ansatzfunktionen

Diese Variante liefert eine sehr gute Approximation der exakten Lösung. Wie aber bereits die dritte Variante gezeigt hat, ist es eigentlich nur notwendig, die Netzschrittweite in der Umgebung des rechten Gebietsrandes zu verkleinern. Wir zeigen mit der 5. Variante, daß durch eine lokale Netzverfeinerung eine gute Approximation der Lösung erreicht wird. Der Aufwand zur Generierung des FE-Gleichungssystems und zu seiner Auflösung ist auf Grund der niedrigen Anzahl von FE-Knoten natürlich wesentlich geringer als bei der Diskretisierung mit 70 gleichgroßen Elementen.

- 5. Variante:  $p = 70$ , 10 Elemente mit linearen Ansatzfunktionen, wobei  $[0, 1] = [0, 0.5] \cup [0.5, 0.8] \cup [0.8, 0.85] \cup [0.85, 0.9] \cup [0.9, 0.925] \cup [0.925, 0.95] \cup [0.95, 0.9625] \cup [0.9625, 0.975] \cup [0.975, 0.9875] \cup [0.9875, 1]$

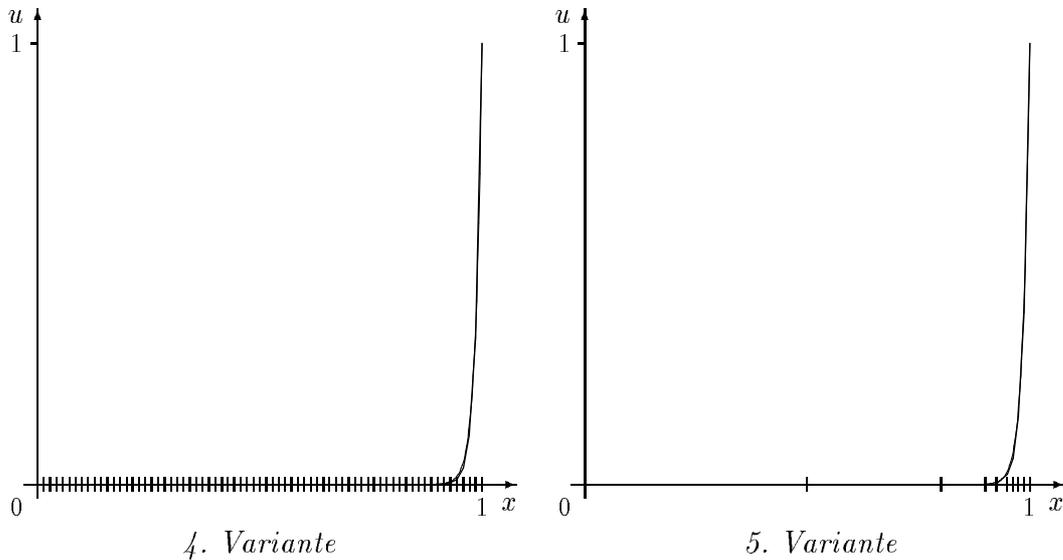


Abbildung 3.19: FE-Diskretisierungen mit gleichmäßiger und lokaler Netzverfeinerung

Eine weitere Möglichkeit zur Anpassung der FE-Diskretisierung an das Lösungsverhalten ist die Erhöhung des Polynomgrades der Ansatzfunktionen. Die folgende Diskretisierung zeigt, daß auf diese Weise ebenfalls eine Näherungslösung mit einem kleinen Diskretisierungsfehler erzeugt werden kann.

- 6. Variante:  $p = 70$ , Element  $[0, 0.5]$  mit linearen Ansatzfunktionen, Elemente  $[0.5, 0.8]$ ,  $[0.8, 0.9]$  und  $[0.9, 0.95]$  mit quadratischen Ansatzfunktionen sowie das Element  $[0.95, 1]$  mit kubischen Ansatzfunktionen

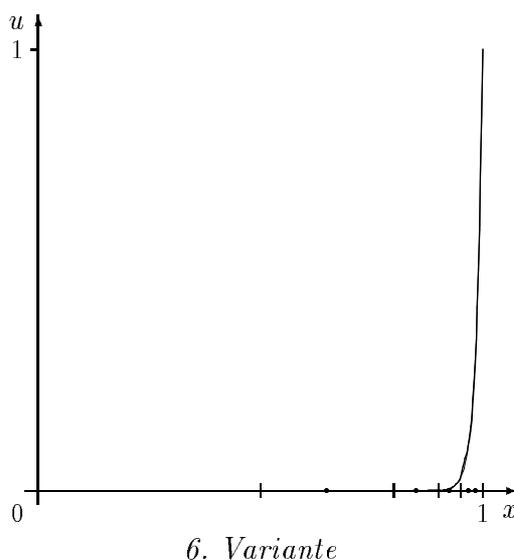


Abbildung 3.20: FE-Diskretisierung mit linearen, quadratischen und kubischen Ansatzfunktionen

## Kapitel 4

# FEM für mehrdimensionale Randwertprobleme

## 2. Ordnung

### 4.1 Modellprobleme

Im Abschnitt 2.1.2 haben wir die stationäre 2D-Wärmeleitgleichung hergeleitet. Wie die Beispiele aus den Abschnitten 1.3.2 und 1.3.3 zeigen, können auch elektrische und magnetische Felder durch eine derartige Gleichung beschrieben werden. Wir geben nochmals die klassische Formulierung dieser Randwertaufgaben an und formulieren anschließend ein weiteres Beispiel.

- *Klassische Formulierung* (siehe auch Abschnitt 2.1.2)

Gesucht ist  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \cap C(\bar{\Omega})$ , so daß

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= f(x) && \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \Omega \\ u(x) &= g_1(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial N} &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i = g_2(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(x)u(x) &= \alpha(x)g_3(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

gilt mit  $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ ,  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

- *Beispiel: Wärmeleitproblem*

Gesucht: Temperatur  $u(x_1, x_2)$

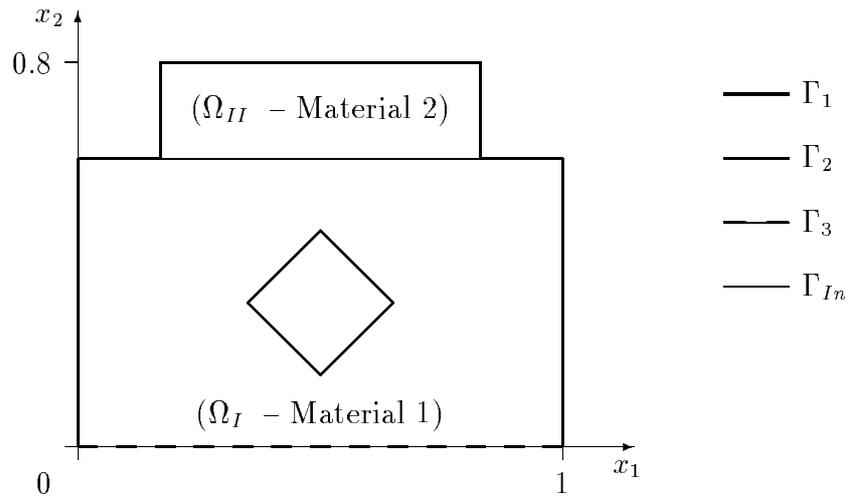
Gegeben:  $f \equiv 0$ ,

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \lambda(x) = \begin{cases} \lambda_I &= 1 \text{ W(mK)}^{-1} & x \in \Omega_I \\ \lambda_{II} &= 371 \text{ W(mK)}^{-1} & x \in \Omega_{II} \end{cases}$$

$$g_1 = \text{const.} = 500 \text{ K}, \quad g_2 = 0 \text{ (Isolation)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \lambda_I \frac{\partial u}{\partial n} = -\lambda_I \frac{\partial u}{\partial x_2} = \alpha(g_3 - u),$$

$$\alpha = 5.6 \text{ W(m}^2\text{K)}^{-1}, \quad g_3 = 300 \text{ K}.$$

Abbildung 4.1: Gebiet  $\Omega$ , bestehend aus zwei verschiedenen Materialien

Da in diesem Beispiel die Wärmeleitkoeffizienten unstetig sind, können wir die Differentialgleichung aus (4.1) nur in den Teilgebieten  $\Omega_I$  und  $\Omega_{II}$  formulieren. Am Rand  $\Gamma_{In}$  müssen zusätzlich noch die Interfacebedingungen gestellt werden. Wir erhalten das folgende Randwertproblem:

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x)$  mit  $u(x) = u_I(x)$  in  $\Omega_I$ ,  $u(x) = u_{II}(x)$  in  $\Omega_{II}$ , für das

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_I \frac{\partial u_I}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_I \frac{\partial u_I}{\partial x_2} \right) = 0 \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \Omega_I$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_{II} \frac{\partial u_{II}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_{II} \frac{\partial u_{II}}{\partial x_2} \right) = 0 \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \Omega_{II}$$

$$u(x) = g_1(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2$$

$$-\lambda_I \frac{\partial u_I}{\partial x_2} + \alpha(x) u_I(x) = \alpha(x) g_3(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_3$$

$$u_I(x) = u_{II}(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_{In}$$

$$\lambda_I \frac{\partial u_I}{\partial x_2} = \lambda_{II} \frac{\partial u_{II}}{\partial x_2} \quad \text{für alle } x \in \Gamma_{In}$$

gilt mit  $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ ,  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

## 4.2 Herleitung der Variationsformulierung

- Die Räume  $L_2(\Omega)$  und  $H^1(\Omega)$

Eine Funktion  $u(x) = u(x_1, x_2)$  ist Element des Raumes  $L_2(\Omega)$ , wenn das Integral

$$\int_{\Omega} (u(x))^2 dx$$

existiert und endlich ist.

Zur Definition des Raumes  $H^1(\Omega)$  benötigen wir zunächst den Begriff der verallgemeinerten Ableitung. Seien die Funktionen  $u$  und  $w$  über  $\Omega$  integrierbar, und es gelte

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx$$

für jede stetig differenzierbare Funktion  $\varphi(x)$ , die auf  $\partial\Omega$  verschwindet. Dann nennen wir  $w$  *verallgemeinerte Ableitung von  $u$  nach  $x_i$*  und schreiben  $w = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

Der Raum  $H^1(\Omega)$  umfaßt alle die Funktionen  $u(x)$ , die zum Raum  $L_2(\Omega)$  gehören und deren verallgemeinerten Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2$ , existieren sowie ebenfalls Elemente des Raumes  $L_2(\Omega)$  sind (siehe auch [1, 86]).

**Bemerkung 4.1** Zum Beispiel gehören die bei der FEM verwendeten stetigen, stückweise polynomialen Ansatzfunktionen zum Raum  $H^1(\Omega)$  (siehe Abschnitt 4.3.3).

- Schritte zur Herleitung der Variationsformulierung

1. Wir multiplizieren die Differentialgleichung (4.1) mit einer Testfunktion  $v(x)$ ,  $v \in V_0 = \{v(x) \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$ , und integrieren über  $\Omega$ , d.h.

$$- \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

2. Wir wenden im Hauptteil (bei den 2. Ableitungen) die Formel der partiellen Integration

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} w \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} w v n_i ds$$

an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx - \int_{\partial\Omega} \left[ \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} v n_1 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} v n_2 \right] ds \\ = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Definition der Konormalenableitung  $\frac{\partial u}{\partial N}$  folgt

$$\int_{\Omega} \left[ \lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} v ds = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

3. Wir arbeiten die auf  $\Gamma_2$  und  $\Gamma_3$  vorgegebenen natürlichen Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds &= \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds}_0 + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds}_{\int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial N} v \, ds}_{\int_{\Gamma_3} \alpha(g_3 - u)v \, ds}. \\ &= 0 + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(g_3 - u)v \, ds. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) u(x) v(x) \, ds \\ = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x) v(x) \, ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) g_3(x) v(x) \, ds. \end{aligned}$$

4. Wir legen unter Beachtung der wesentlichen Randbedingungen die Menge der zulässigen Funktionen, d.h. die Menge, in der wir die Lösung suchen, fest:

$$V_{g_1} = \{u(x) \in H^1(\Omega) : u(x) = g_1(x) \text{ auf } \Gamma_1\}.$$

Die Schritte 1. bis 4. führen zur Variationsformulierung der Aufgabe (4.1):

Gesucht ist  $u(x) \in V_{g_1}$ , so daß

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_0 \quad (4.2)$$

mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left[ \lambda_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) u(x) v(x) \, ds,$$

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x) v(x) \, ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) g_3(x) v(x) \, ds,$$

$$V_{g_1} = \{u(x) \in H^1(\Omega) : u(x) = g_1(x) \text{ auf } \Gamma_1\},$$

$$V_0 = \{v(x) \in H^1(\Omega) : v(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$$

erfüllt ist.

**Bemerkung 4.2** Die linke Seite in der Gleichung (4.2) ist eine Bilinearform, d.h. es gilt

$$a(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2, v) = \nu_1 a(u_1, v) + \nu_2 a(u_2, v) \quad \text{für alle } u_1, u_2 \in V_{g_1}, \text{ für alle } v \in V_0, \\ \text{und für alle } \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^1$$

$$a(u, \nu_1 v_1 + \nu_2 v_2) = \nu_1 a(u, v_1) + \nu_2 a(u, v_2) \quad \text{für alle } u \in V_{g_1}, \text{ für alle } v_1, v_2 \in V_0, \\ \text{und für alle } \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^1$$

**Bemerkung 4.3** Die Variationsformulierung (4.2) ist eine Verallgemeinerung der klassischen Formulierung (4.1). Es werden geringere Glattheitsforderungen an die Eingangsdaten  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, f, g_2$  und  $g_3$  gestellt, z.B. können dies stückweise stetige, beschränkte Funktionen sein. Von der Lösung  $u(x)$  der Aufgabe (4.2) wird auch eine geringere Glattheit gefordert. Es müssen die verallgemeinerten Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2$ , existieren und Elemente des Raumes  $L_2(\Omega)$  sein. Falls die verallgemeinerte Lösung der Aufgabe (4.2) die klassischen Glattheitsforderungen erfüllt, d.h.  $u(x) \in V_{g_1} \cap (C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \cap C(\bar{\Omega}))$ , dann ist sie auch Lösung der klassischen Aufgabe (4.1).

**Bemerkung 4.4** Für theoretische Untersuchungen betrachtet man oft die Variationsformulierung des Randwertproblems mit homogenisierten Randbedingungen 1. Art. Dazu setzen wir die Funktion  $g_1(x)$ , die zunächst nur auf dem Rand  $\Gamma_1$  definiert ist, zu einer Funktion  $\tilde{g}_1(x)$  ins Innere des Gebietes  $\Omega$  und auf die Ränder  $\Gamma_2$  sowie  $\Gamma_3$  fort. Die zur Aufgabe (4.2) äquivalente Aufgabe lautet:

Gesucht ist  $w(x) \in V_0$ , so daß

$$a(w, v) = \langle \tilde{F}, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_0 \quad (4.3)$$

mit

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \left[ \lambda_1(x) \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2(x) \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) w(x) v(x) ds,$$

$$\langle \tilde{F}, v \rangle = \langle F, v \rangle - a(\tilde{g}_1, v),$$

$$V_0 = \{v(x) \in H^1(\Omega) : v(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$$

erfüllt ist.

Die Lösung  $u(x)$  der Aufgabe (4.2) ergibt sich somit aus  $u(x) = w(x) + \tilde{g}_1(x)$ .

**Bemerkung 4.5** Die Variationsformulierung (4.2) bzw. (4.3) ist der Ausgangspunkt für die Finite-Elemente-Diskretisierung.

- *Äquivalenz der Variationsformulierung zu einem Minimumproblem*

Falls die Bilinearform  $a(.,.)$  symmetrisch und positiv ist, d.h.

$$a(w, v) = a(v, w) \quad \text{für alle } w, v \in V_0 \quad \text{und}$$

$$a(w, w) > 0 \quad \text{für alle } w \in V_0, w \neq 0,$$

dann ist das Variationsproblem (4.3) äquivalent zum Minimumproblem:

Gesucht ist  $w \in V_0$ , so daß

$$J(w) = \min_{v \in V_0} J(v) \quad (4.4)$$

mit

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \tilde{F}, v \rangle$$

gilt.

*Beweis:* (geht auf EULER zurück)

- Für beliebige  $w$  und  $v \in V_0$  sowie  $t \in \mathbb{R}^1$  gilt offenbar

$$\begin{aligned} J(w + tv) &= \frac{1}{2}a(w + tv, w + tv) - \langle \tilde{F}, w + tv \rangle & (4.5) \\ &= \frac{1}{2}a(w, w) + \frac{1}{2}t[a(w, v) + a(v, w)] + \frac{1}{2}t^2a(v, v) - \langle \tilde{F}, w \rangle - t\langle \tilde{F}, v \rangle \\ &= J(w) + t[a(w, v) - \langle \tilde{F}, v \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v, v). \end{aligned}$$

- (4.3)  $\implies$  (4.4)

Sei  $w \in V_0$  die Lösung des Variationsproblems (4.3). Aus (4.5) folgt dann für  $t = 1$  wegen der Positivität der Bilinearform

$$J(w + v) = J(w) + \underbrace{[a(w, v) - \langle \tilde{F}, v \rangle]}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{a(v, v)}_{>0} > J(w) \quad \text{für alle } v \in V_0, v \neq 0.$$

Damit ist  $w$  eindeutiger Minimalpunkt von  $J(\cdot)$ .

- (4.4)  $\implies$  (4.3)

Sei  $w \in V_0$  Minimalpunkt von  $J(\cdot)$ . Dann folgt  $\left. \frac{d}{dt}J(w + tv) \right|_{t=0} = 0$  für alle fixierten  $v \in V_0, v \neq 0$ , d.h.

$$a(w, v) = \langle \tilde{F}, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_0, v \neq 0.$$

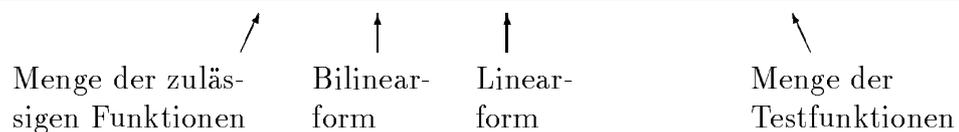
Somit ist  $w \in V_0$  auch Lösung der Aufgabe (4.3).

## 4.3 Galerkin–Ritz–FEM

### 4.3.1 Galerkin–Verfahren

- *Ausgangspunkt:* Variationsformulierung (siehe z.B. Abschnitt 4.2)

Gesucht ist $u \in V_{g_1} : a(u, v) = \langle F, v \rangle$ für alle $v \in V_0$ . <span style="float: right;">(4.6)</span>
--



Die beiden Funktionenmengen  $V_{g_1}$  und  $V_0$  sind Teilmengen der Menge der Grundfunktionen  $V$ .

- *Idee des Galerkin–Verfahrens*

Wir ersetzen die unendlichdimensionalen Mengen  $V, V_{g_1}$  und  $V_0$  durch endlichdimensionale Mengen  $V_h, V_{g_1h}, V_{0h}$

$$V_h = \left\{ v_h(x) = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} v_i p_i(x) \right\} = \text{span} \{ p_i : i \in \bar{\omega}_h \} \subset V$$

↑

frei wählbare  
Koeffizienten

↑

Ansatzfunktionen  
(linear unabhängig)

↑

Indexmenge zur  
„Durchnumerierung“  
der Ansatzfunktionen

Für die Menge  $V_{g_1h}$  gelte

$$V_{g_1h} = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} p_i(x) + \sum_{i \in \omega_h} v_i p_i(x) \right\}$$

mit  $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ . Dabei ist

$$\sum_{i \in \omega_h} v_i p_i(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1$$

und

$$\sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} p_i(x) = g_1(x) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} p_i(x) \approx g_1(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1$$

Der Raum der Testfunktionen  $V_{0h} \subset V_0$  wird durch

$$V_{0h} = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{i \in \omega_h} v_i p_i(x) \right\}$$

definiert. Die Anzahl der Indizes in der Menge  $\bar{\omega}_h$  bezeichnen wir mit  $\bar{N}_h$  und die der Menge  $\omega_h$  mit  $N_h$ .

Ausgehend von der Aufgabe (4.6) erhalten wir die Näherungsaufgabe

Gesucht ist  $u_h \in V_{g_1h} : a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \text{für alle } v_h \in V_{0h} \quad (4.7)$



$$u_h = \sum_{i \in \omega_h} u_i p_i + \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} p_i, \quad v_h = p_k \in V_{0h}, \quad k \in \omega_h$$

$a(.,.)$  bilinear,  $\langle F, . \rangle$  linear

Gesucht ist  $\underline{u}_h = [u_i]_{i \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h} :$

$$\sum_{i \in \omega_h} u_i a(p_i, p_k) = \langle F, p_k \rangle - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} a(p_i, p_k) \quad \text{für alle } k \in \omega_h, \quad (4.8)$$

d.h. gesucht ist  $\underline{u}_h = [u_i]_{i \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h} :$

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \quad (\text{Galerkin-Gleichungssystem}) \quad (4.9)$$

mit

$$K_h = [a(p_i, p_k)]_{i,k \in \omega_h} \quad (\text{Steifigkeitsmatrix})$$

$$\underline{f}_h = [\langle F, p_k \rangle - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} a(p_i, p_k)]_{k \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h} \quad (\text{Lastvektor})$$

### 4.3.2 Ritz–Verfahren

- *Ausgangspunkt:* Minimumproblem

$$\text{Gesucht ist } u = w + \tilde{g}_1 \in V_{g_1} \quad \text{mit} \quad J(w) = \min_{v \in V_0} J(v) \quad (4.10)$$

Im Ritzschen Energiefunktional

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \tilde{F}, v \rangle$$

setzen wir voraus, daß  $a(., .)$  bilinear, positiv und symmetrisch ist.

- *Ansatz*

Analog zum Abschnitt 4.3.1 werden die Mengen  $V_h$ ,  $V_{g_1h}$  und  $V_{0h}$  definiert.

- *Idee des Ritz–Verfahrens*

$$\text{Gesucht ist } u_h = w_h + \tilde{g}_{1h} \in V_{g_1h} \quad \text{mit} \quad J(w_h) = \min_{v_h \in V_{0h}} J(v_h) \quad (4.11)$$

$$u_h = w_h + \tilde{g}_{1h} = \sum_{i \in \omega_h} u_i p_i + \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} p_i$$

$$\frac{\partial J(w_h)}{\partial u_k} = 0 \quad \text{für alle } k \in \omega_h$$

Gesucht ist  $\underline{u}_h = [u_i]_{i \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h}$  :

$$\sum_{i \in \omega_h} u_i a(p_i, p_k) = \langle F, p_k \rangle - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} a(p_i, p_k) \quad \text{für alle } k \in \omega_h, \quad (4.12)$$

d.h. gesucht ist  $\underline{u}_h = [u_i]_{i \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h}$  :

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \quad (\text{Ritzsches Gleichungssystem})$$

mit

$$K_h = [a(p_i, p_k)]_{i,k \in \omega_h}$$

$$\underline{f}_h = [\langle F, p_k \rangle - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} a(p_i, p_k)]_{k \in \omega_h} \in \mathbb{R}^{N_h}$$

**Bemerkung 4.6** Unter der Voraussetzung, daß  $a(., .)$  bilinear, positiv und symmetrisch ist, gilt

$$\text{Ritz–System} = \text{Galerkin–System} \implies \text{Ritz–Galerkin–System}$$

### 4.3.3 FEM = Ritz-Galerkin-Verfahren mit speziellen Ansatzfunktionen

Die grundlegende Idee, Ansatzfunktionen (Testfunktionen)  $p_i = p_i(x)$  mit *lokalem Träger* (finite Funktionen) im Ritz- bzw. Galerkin-Verfahren zu verwenden, stammt von R. COURANT (1943, [14]) und wurde Mitte der 50er Jahre von Ingenieuren (z.B. von TURNER 1956, [81]) neu entdeckt.

Bei der Finite-Elemente-Methode wird das Gebiet  $\Omega$  in „kleine“, nichtüberlappende Teilgebiete  $\delta^{(r)}$  (Dreiecke oder Vierecke) zerlegt. Die Eckpunkte dieser Teilgebiete bezeichnen wir als *Knoten*. Als Ansatzfunktionen wählen wir Funktionen, die nur über sehr wenigen Dreiecken bzw. Vierecken von Null verschieden sind. Eine derartige Ansatzfunktion ist in der Abbildung 4.2 dargestellt.

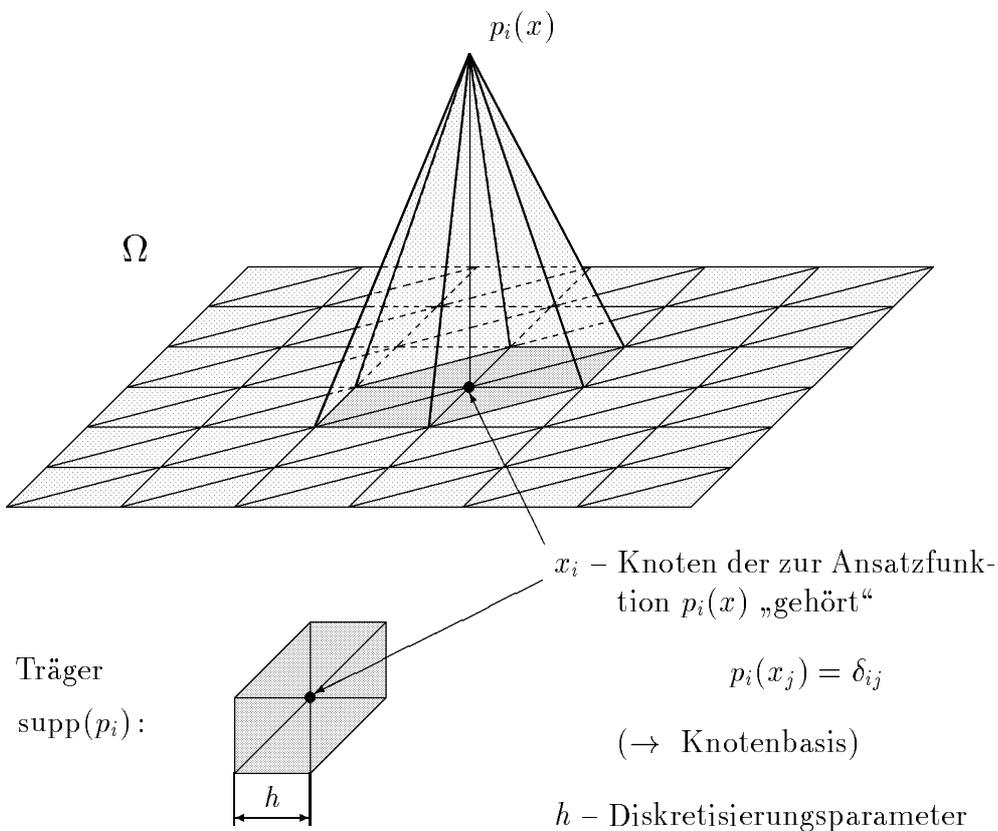


Abbildung 4.2: Darstellung einer Ansatzfunktion mit lokalem Träger

Unter Verwendung derartiger Ansatzfunktionen wird die Näherungslösung in der Form

$$u_h(x) = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i p_i(x) \in V_h$$

gesucht. Dabei ist  $u_h(x)$  eine stetige, aber keine stetig differenzierbare Funktion. Bei einer Knotenbasis gilt

$$u_h(x_i) = u_i$$

für alle Knoten  $x_i \in \bar{\Omega}$ .

• *Vorteile der Wahl von Ansatzfunktionen mit lokalem Träger*

1. Es wird eine große Flexibilität bei der Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen erreicht.
2. Auf Grund der Lokalität der Träger der Ansatzfunktionen (Testfunktionen) gilt offenbar

$$a(p_i, p_j) = 0, \quad \text{falls} \quad \text{int}(\text{supp}(p_i)) \cap \text{int}(\text{supp}(p_j)) = \emptyset,$$

wobei  $\text{int}(\text{supp}(p_i))$  das Innere des Trägers der Funktion  $p_i$  bezeichnet. Folglich ist die Steifigkeitsmatrix schwach besetzt.

3. Die Integrale in der Definition der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors können elementweise berechnet werden. Es gilt

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_h = \bigcup_r \bar{\delta}^{(r)}, \quad \delta^{(r)} \cap \delta^{(r')} = \emptyset \quad \text{für} \quad r \neq r',$$

und somit

$$\int_{\Omega} (\cdot) dx = \sum_r \int_{\delta^{(r)}} (\cdot) dx = \sum_r \int_{\Delta} (\cdot) |J_{\delta^{(r)}}| d\xi.$$

Element der Vernetzung
 $\xrightleftharpoons[x = x(\xi)]{\xi = \xi(x)}$ 
Basiselement

4.  $V_h \rightarrow V$  ( $V_{g_1 h} \rightarrow V_{g_1}$ ,  $V_{0h} \rightarrow V_0$ ) für  $h \rightarrow 0$ , d.h. die Funktionen aus  $V$  lassen sich für feiner werdende Vernetzungen immer besser durch Funktionen aus  $V_h$  approximieren.

**Bemerkung 4.7** Approximation krummliniger Ränder

- (a) Approximation des Randes durch einen Polygonzug, d.h. Vernetzung des Gebietes mit geradlinig begrenzten Elementen.

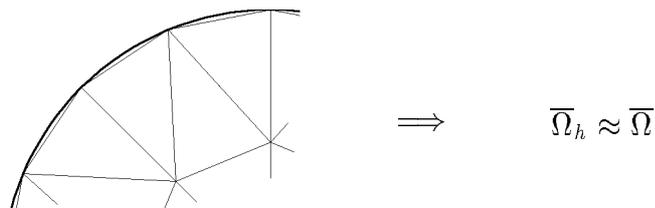


Abbildung 4.3: Approximation krummliniger Ränder durch einen Polygonzug

(b) Verwendung krummlinig berandeter Dreieckselemente (siehe z.B. [27, 91])

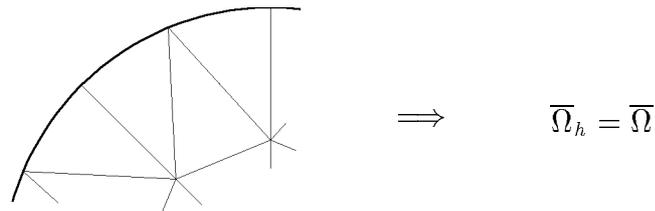


Abbildung 4.4: Approximation krummliniger Ränder durch krummlinig berandete Elemente

**Bemerkung 4.8** Ansatzfunktionen höherer Ordnung auf Dreieckselementen

Wir werden uns im weiteren nur mit stückweise linearen Ansatzfunktionen beschäftigen. Ein Beispiel solch einer Funktion ist in der Abbildung 4.2 dargestellt. Häufig werden bei FE-Diskretisierungen aber auch Ansatzfunktionen höherer Ordnung genutzt. Die Abbildung 4.5 zeigt als Beispiel eine quadratische Ansatzfunktion. Weitere Beispiele kann der Leser in [27] und [91] finden

(a) quadratisches Element

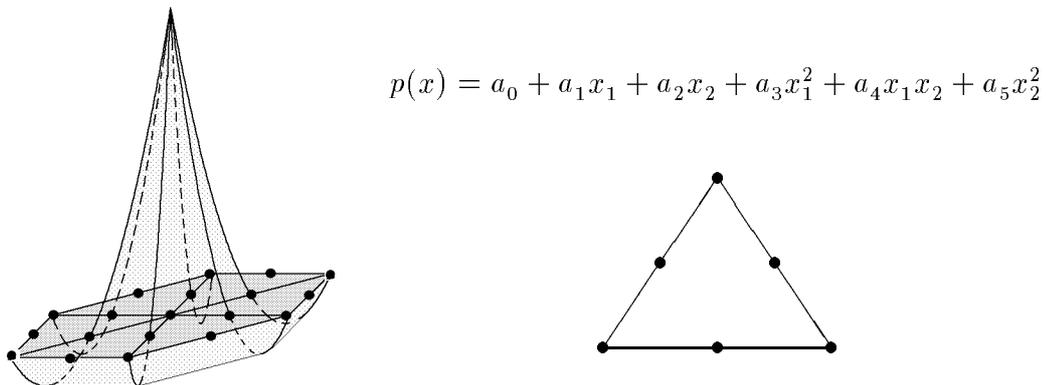


Abbildung 4.5: Eine quadratische Ansatzfunktion

(b) kubisches Element

$$p(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 + a_6x_1^3 + a_7x_1^2x_2 + a_8x_1x_2^2 + a_9x_2^3$$

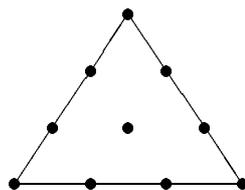


Abbildung 4.6: Ein Dreieckselement mit kubischen Ansatzfunktionen

**Bemerkung 4.9** Andere Elemente, z.B. Viereckselemente

Neben den in den folgenden Abschnitten verwendeten linearen Dreieckselementen können eine Vielzahl anderer Elementtypen bei der FE-Diskretisierung von Randwertproblemen eingesetzt werden. Häufig genutzte Elemente sind z.B. das Viereckselement mit bilinearen Ansatzfunktionen, das 8-Knoten Element mit Ansatzfunktionen der Gestalt  $p(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2 + a_6x_1^2x_2 + a_7x_1x_2^2$  (SERENDIPITY-Element) und isoparametrische Viereckselemente zur Approximation krummliniger Ränder (siehe auch [91]).

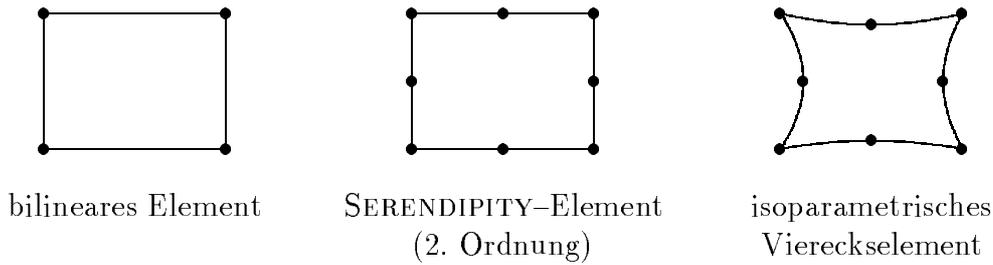


Abbildung 4.7: Beispiele von Viereckselementen

**Bemerkung 4.10** 3D-Elemente

Zur FE-Diskretisierung von Randwertproblemen in 3D-Gebieten werden Tetraederelemente und Quaderelemente genutzt (siehe z.B. [91]).

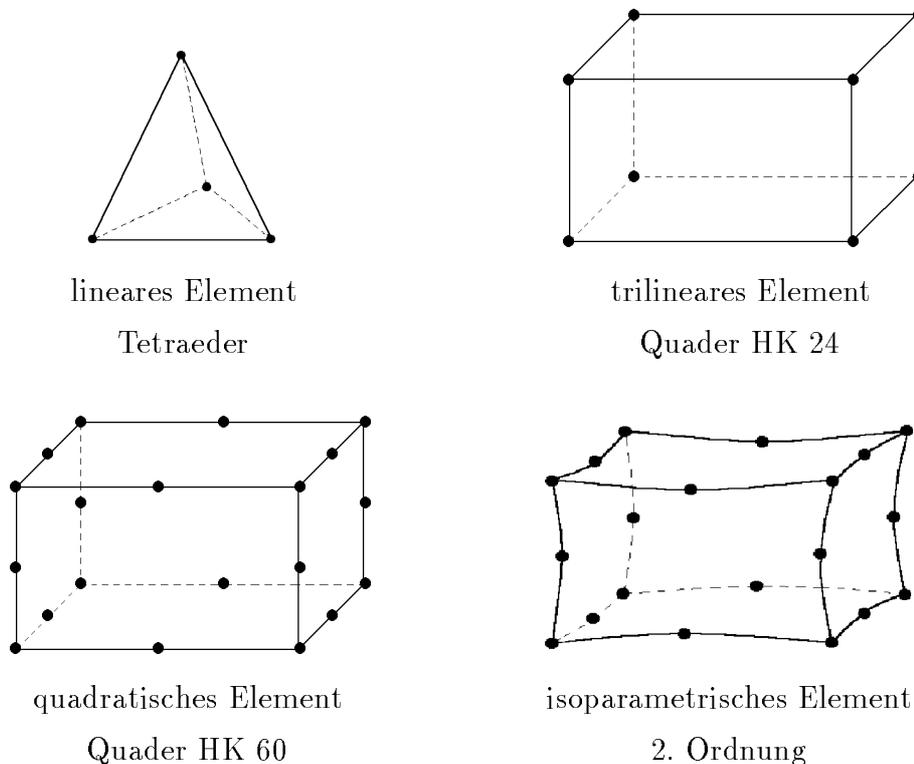


Abbildung 4.8: Beispiele für 3D-Elemente

## 4.4 FEM mit linearen Dreieckselementen

### 4.4.1 Gebietsdiskretisierung (Triangularisierung)

Wir zerlegen das Gebiet  $\Omega$ , in dem die Lösung des betrachteten Randwertproblems gesucht wird, in finite Elemente  $\delta^{(r)}$ , z.B. in „kleine“ Dreiecke. Als Resultat erhalten wir eine Triangularisierung  $\mathcal{T}_h = \{\delta^{(r)} : r \in \mathbb{R}_h\}$ ,  $\mathbb{R}_h = \{1, 2, \dots, R_h\}$ . Für die Triangularisierung  $\mathcal{T}_h$  soll gelten:

1.  $\bar{\Omega} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}^{(r)}$     bzw.     $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}^{(r)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \bar{\Omega}$
2. Für alle  $r, r' \in \mathbb{R}_h$ ,  $r \neq r'$ , sei

$$\bar{\delta}^{(r)} \cap \bar{\delta}^{(r')} = \begin{cases} \emptyset & \text{oder} \\ \text{eine gemeinsame Dreiecksseite} & \text{oder} \\ \text{ein gemeinsamer Eckknoten} \end{cases}$$

Die Art der Zerlegung von  $\Omega$  ist u.a. abhängig von

- der Geometrie des Gebietes (polygonal oder krummlinig berandetes Gebiet, Existenz überstumpfer Ecken im Gebietsrand, ...),
- den Eingangsdaten des Randwertproblems (z.B. unstetige Koeffizienten  $\rightarrow$  Interfacelinien, rechte Seite, gemischte Randbedingungen  $\rightarrow$  Punkte, in denen der Typ der Randbedingungen wechselt, ...),
- der gewünschten Genauigkeit der Näherungslösung ( $\rightarrow$  Wahl der Feinheit der Vernetzung bzw. des Polynomgrades der Ansatzfunktionen)
- *Generelle Hinweise für die Generierung einer Vernetzung*
- unzulässige Vernetzungen

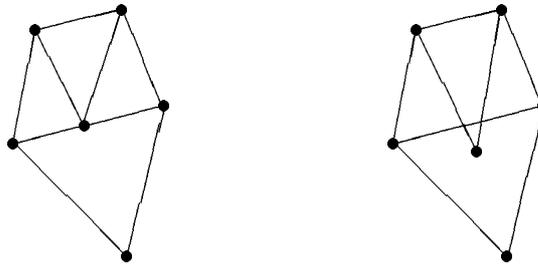


Abbildung 4.9: Beispiele für unzulässige Vernetzungen

- Vernetzung bei Wechsel des Typs der Randbedingungen

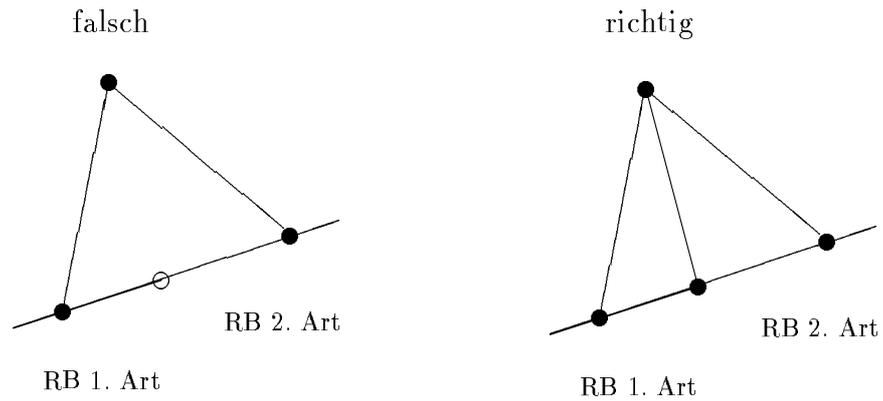


Abbildung 4.10: Beachtung des Wechsels des Typs der Randbedingung

- Vernetzung am Interface

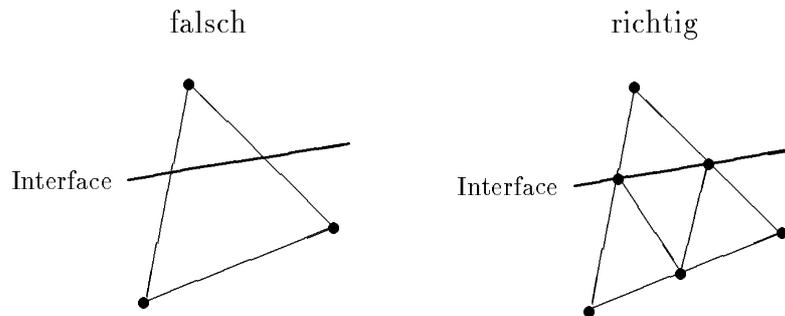
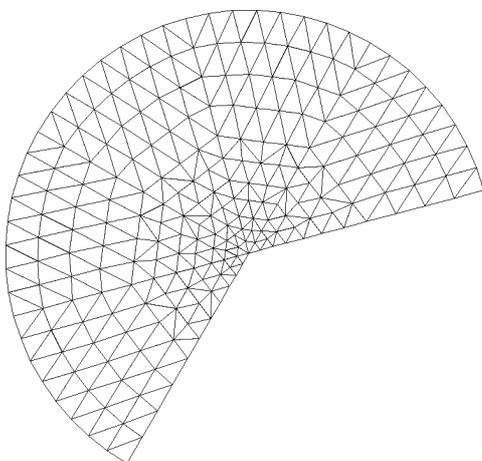


Abbildung 4.11: Beachtung von Interfacelinien in der Vernetzung

- Netzverfeinerung bei sich stark änderndem Lösungsgradienten (Lösungssingularitäten in der Umgebung von überstumpfen Ecken, Interfaceecken, Punkten mit Wechsel des Typs der Randbedingungen u.a.)



Netzverfeinerung in Richtung der Ecke, wobei die Netzverdichtung vom Öffnungswinkel abhängt (siehe z.B. [63]).

Abbildung 4.12: Netzverfeinerung in der Umgebung einer überstumpfen Ecke

- Vermeidung zu spitzer und zu stumpfer Dreiecke, insbesondere von Dreiecken der Gestalt

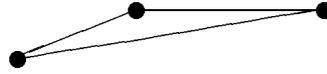


Abbildung 4.13: Dreieck mit einem sehr stumpfen Innenwinkel

- Generierung einer regulären Triangularisierung, d.h.

für alle  $r \in \mathbb{R}_h$  und für alle Diskretisierungsschrittweiten  $h$  existieren Konstanten  $\alpha_0$  und  $\theta_0$  mit  $\alpha_0 > 0$  und  $\theta_0 > 0$ , so daß

$$\alpha_0 h \leq h_1^{(r)}, h_2^{(r)}, h_3^{(r)} \leq h$$

$$0 < \theta_0 \leq \theta_1^{(r)}, \theta_2^{(r)}, \theta_3^{(r)} \leq \pi - \theta_0$$

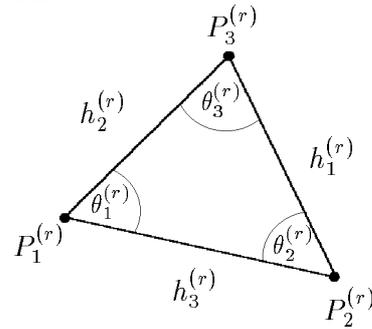
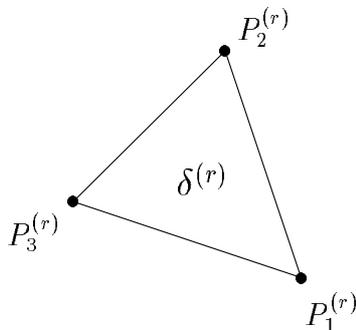


Abbildung 4.14: Darstellung eines Dreiecks einer regulären Vernetzung

Die Vernetzung des Gebietes  $\bar{\Omega}$  wird bei der algorithmischen Realisierung durch die Festlegung einer *globalen* und einer *lokalen* Numerierung einschließlich deren *Verknüpfung* beschrieben.

global: Numerierung aller Knoten und Elemente  
 $\bar{\omega}_h = \{1, 2, \dots, \bar{N}_h\}$ ,  $\bar{N}_h$  die Anzahl der Knoten  
 $\mathbb{R}_h = \{1, 2, \dots, R_h\}$ ,  $R_h$  die Anzahl der Elemente  
 Festlegung der Knotenkoordinaten  $x_i = (x_{1,i}, x_{2,i})$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, \bar{N}_h$

lokal: Numerierung der Knoten in jedem Dreieck



Knotenkoordinaten der Knoten  $P_\alpha^{(r)}$ :

$$x_\alpha^{(r)} = (x_{1,\alpha}^{(r)}, x_{2,\alpha}^{(r)})$$

$$\alpha \in A = A^{(r)} = \{1, 2, 3\}$$

Abbildung 4.15: Lokale Knotennumerierung eines Dreiecks

Verknüpfung: Festlegung der Zuordnungsvorschrift zwischen lokaler und globaler Knotennumerierung für jedes Dreieck  $\delta^{(r)}$ ,  $r \in \mathbb{R}_h$

$$r : \alpha \leftrightarrow i = i(r, \alpha), \alpha \in A^{(r)}, i \in \bar{\omega}_h$$

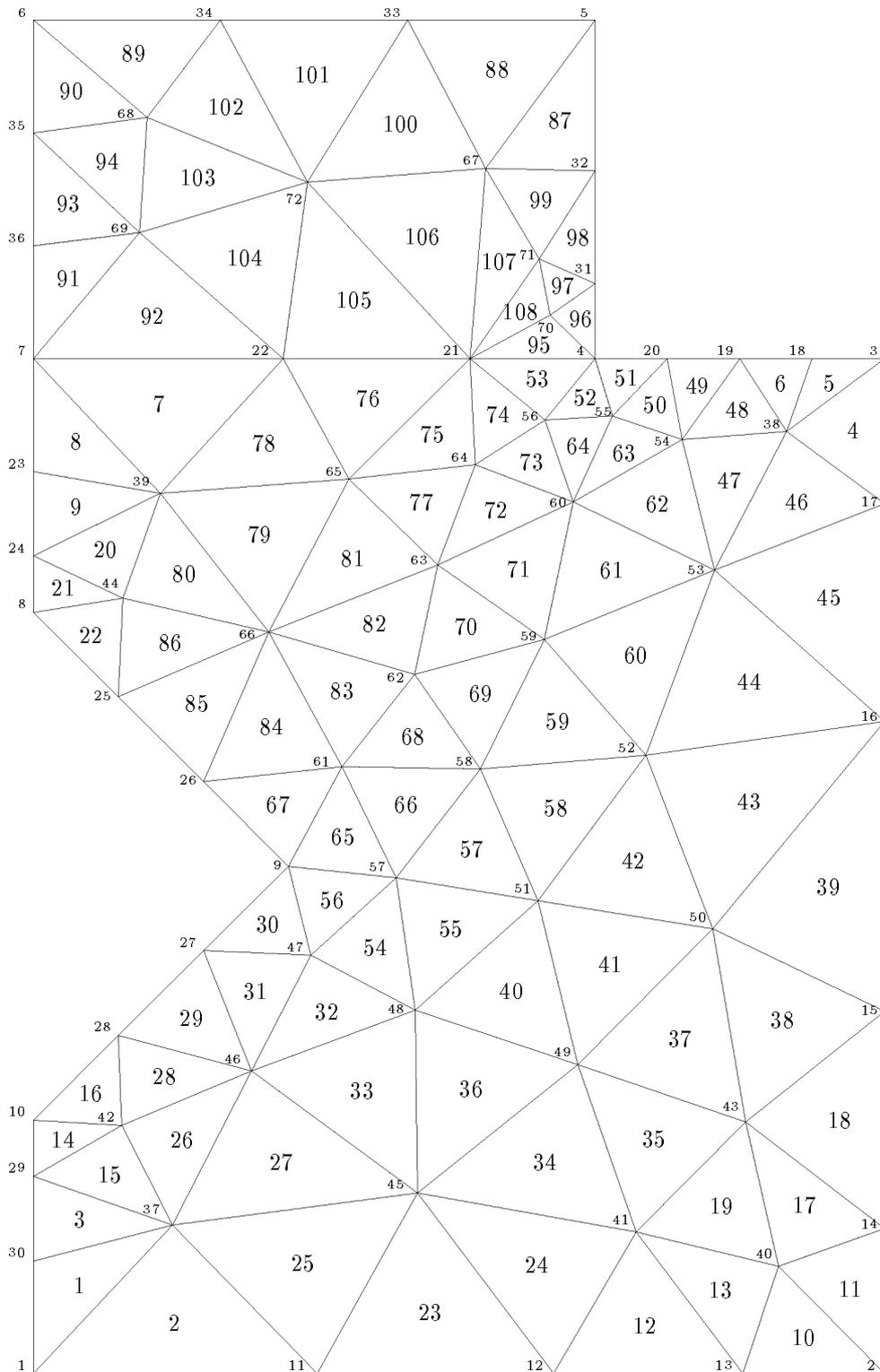


Abbildung 4.16: Beispiel einer Vernetzung mit Numerierung der Knoten und Elemente

Alle FE-Programme benötigen deshalb mindestens die folgenden zwei Felder, deren Aufbau wir am Beispiel der in der Abbildung 4.16 dargestellten Vernetzung des Gebietes  $\Omega$  (siehe das Beispiel im Abschnitt 4.1) erläutern.

- $r : \alpha \leftrightarrow i, r \in \mathbb{R}_h, \alpha \in A^{(r)} = A, i \in \bar{\omega}_h$

Element- nummer	globale Knotennummern der lokalen Knoten			Elementkennzahl z.B. Material- bereichsnummer
	$P_1^{(r)}$	$P_2^{(r)}$	$P_3^{(r)}$	
1	1	37	30	1
2	1	11	37	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
86	25	66	44	1
87	67	32	5	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R_h = 108$	21	70	71	2

Tabelle 4.1: Zuordnungstabelle zwischen lokaler und globaler Knotennummerierung

- $i : (x_{1,i}, x_{2,i})$

$i$	1	2	3	$\dots$	$\bar{N}_h = 72$
$x_{1,i}$	0.5	1.0	1.0	$\dots$	0.66
$x_{2,i}$	0.0	0.0	0.6	$\dots$	0.7

Tabelle 4.2: Tabelle der Knotenkoordinaten

**Bemerkung 4.11** Weitere Felder zur Charakterisierung von Knoten sind möglich, z.B. zur Randbeschreibung und zur Randbedingungskodierung.

- *Methoden zur Generierung der Netzdaten*

1. Erzeugung der Felder für die Zuordnung zwischen der lokalen und der globalen Knotennummerierung ( $r : \alpha \leftrightarrow i$ ) und der Knotenkoordinaten ( $i : (x_{1,i}, x_{2,i})$ ) von „Hand“.
2. Halbautomatische Erzeugung der Daten, d.h. zum Beispiel Zerlegung des Gebietes  $\Omega$  in Teilgebiete. Für die Vernetzung der Teilgebiete werden in Programm Bibliotheken vorhandene Vernetzungen von Standardgebieten genutzt. Die Vernetzungen der Standardgebiete werden auf die konkreten Teilgebiete abgebildet. Hierbei muß beachtet werden, daß die gesamte Vernetzung des Gebietes  $\Omega$  eine zulässige Vernetzung ist.

$$\bar{\Omega} = \bigcup_e \bar{\Pi}_e$$

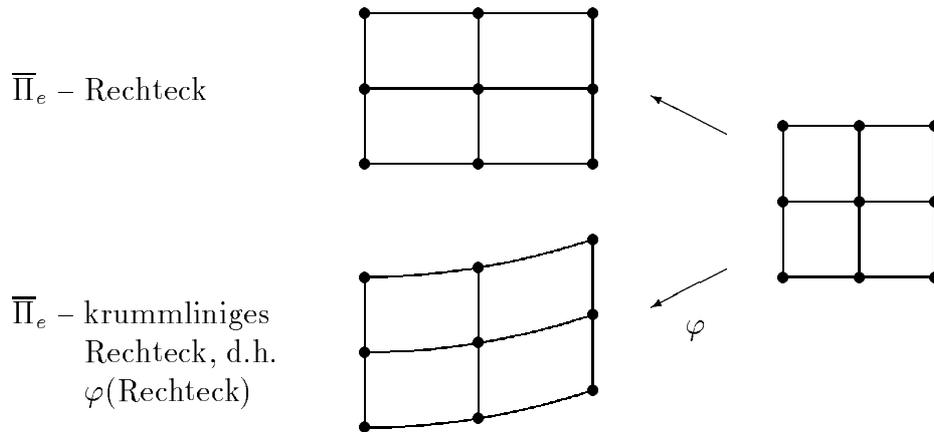


Abbildung 4.17: Abbildung der Vernetzung eines Quadrates auf ein Viereck

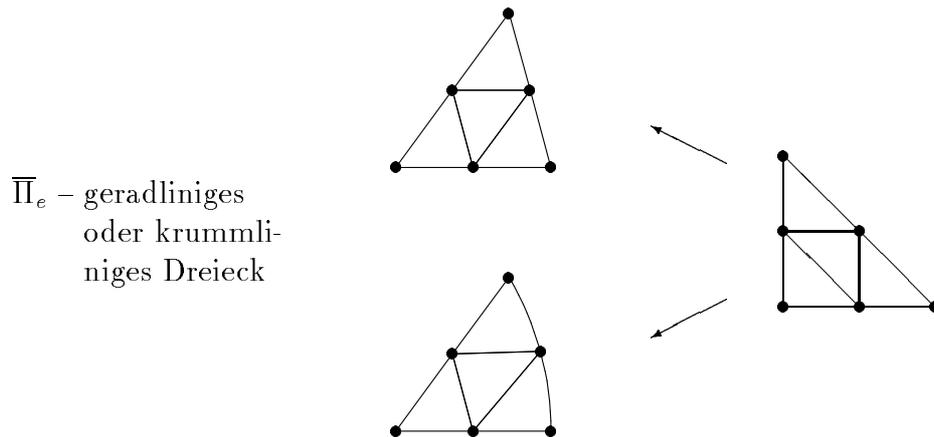
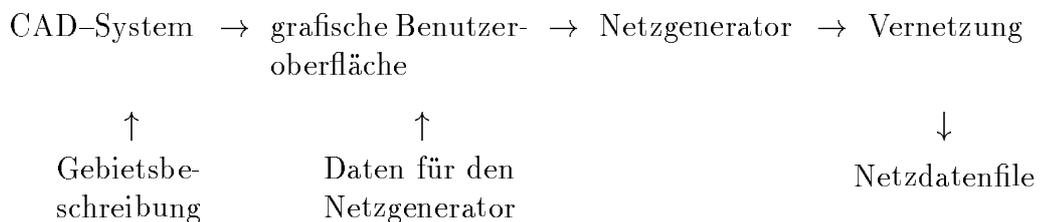


Abbildung 4.18: Abbildung der Vernetzung eines Standarddreiecks auf ein beliebiges Dreieck

3. Einsatz von automatischen Vernetzungsgeneratoren. Als Eingangsdaten werden i.a. entweder eine Beschreibung des Gebietsrandes  $\partial\Omega$  (z.B. [67]) oder eine Zerlegung des Gebietes  $\Omega$  in Teilgebiete  $\Omega_e$  mit  $\bar{\Omega} = \bigcup_e \bar{\Omega}_e$  und die Beschreibung der Teilgebietsränder  $\partial\Omega_e$  ([15]) gefordert. Zusätzlich müssen an den Netzgenerator noch Informationen über die gewünschte Feinheit der Vernetzung, z.B. durch die Vorgabe einer Knotenverteilung auf  $\partial\Omega_e$ , übergeben werden.

Es werden folgende Schritte ausgeführt:



Wir beschreiben diese Vorgehensweise am Beispiel der Generierung der Vernetzung des Gebietes  $\Omega$  aus dem Abschnitt 4.1. Das Gebiet  $\Omega$  wird in zwei Basisteilgebiete (BTG) zerlegt. Die Ränder der Basisteilgebiete werden durch Basislinien beschrieben. Die Basislinien  $\overline{P_1P_2}$ ,  $\overline{P_2P_3}$ ,  $\overline{P_3P_4}$ ,  $\overline{P_4P_7}$ ,  $\overline{P_7P_8}$ ,  $\overline{P_8P_9}$ ,  $\overline{P_9P_{10}}$  sowie  $\overline{P_{10}P_1}$  bilden den Rand des Teilgebietes 1 und der Rand des Teilgebietes 2 wird in die Basislinien  $\overline{P_4P_5}$ ,  $\overline{P_5P_6}$ ,  $\overline{P_6P_7}$  sowie  $\overline{P_7P_4}$  unterteilt. Durch die Vorgabe der mit  $\circ$  gekennzeichneten Punkte wird die gewünschte Feinheit der Diskretisierung auf den Basislinien festgelegt.

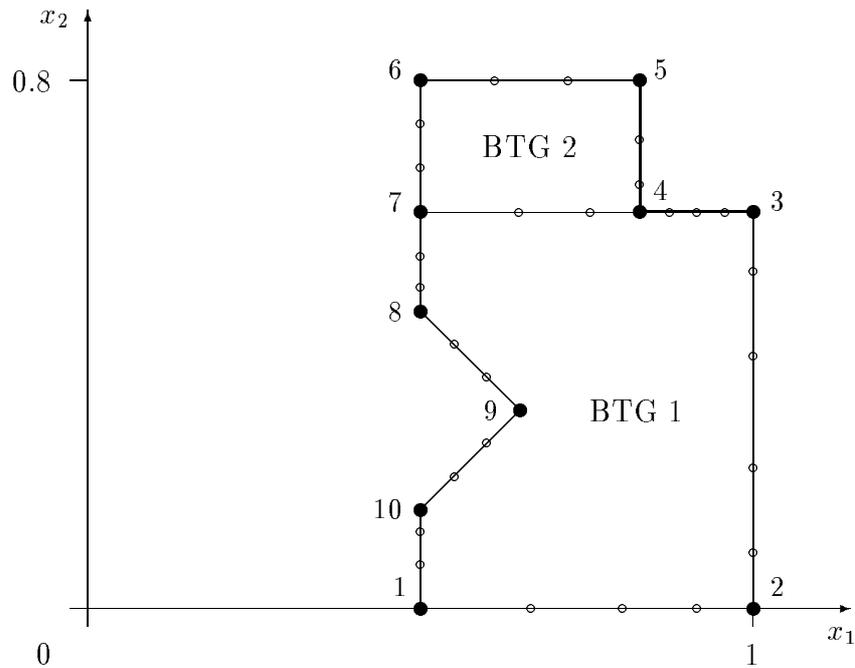


Abbildung 4.19: Zerlegung des Gebietes  $\Omega$  in Teilgebiete

Ausgehend von der Vorgabe der Verfeinerungspunkte auf den Basislinien wird die in der Abbildung 4.20 dargestellte FE-Vernetzung automatisch erzeugt.

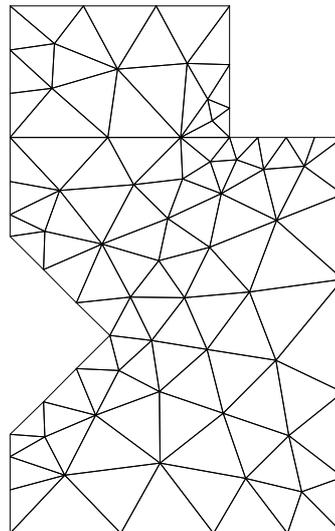
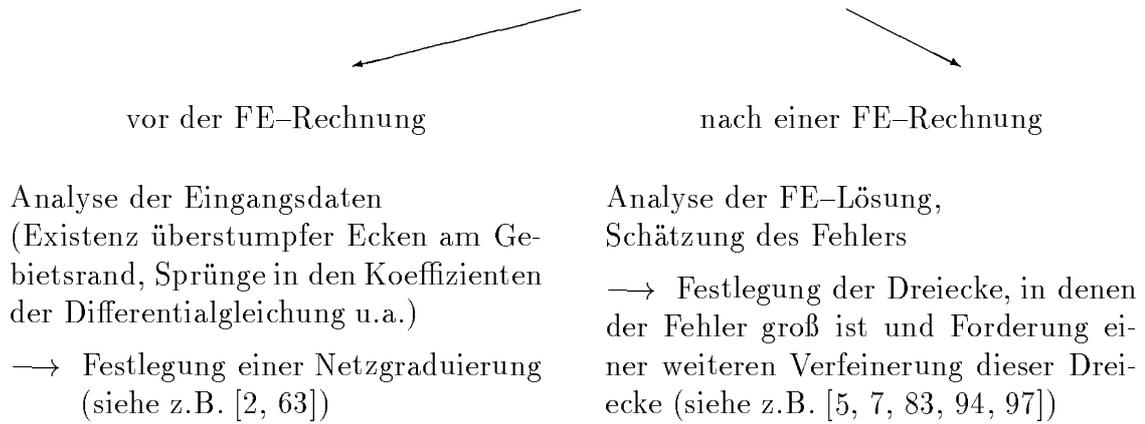


Abbildung 4.20: Automatisch generierte FE-Vernetzung

4. Netzgenerierung unter Nutzung von *a priori* bzw. *a posteriori* Informationen

Die Netzverfeinerung erfolgt durch

Dreiecksviertelung

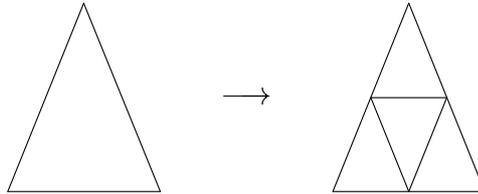


Abbildung 4.21: Viertelung eines Dreiecks

Dreieckshalbierung

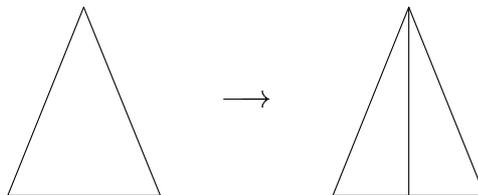


Abbildung 4.22: Halbierung eines Dreiecks

#### 4.4.2 Definition der Ansatz- und Testfunktionen

- *Prinzip*

Lokale Definition der Basisfunktionen (Ansatz-, Testfunktionen) über die Formfunktionen, die ihrerseits durch Abbildung der Formfunktionen des Referenzdreiecks (Masterelement, Basiselement, Einheitselement) erhalten werden.

- *Abbildung*

Mittels der Transformationsvorschrift

$$x = J_{\delta(r)} \xi + x_i : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,j} - x_{1,i} & x_{1,k} - x_{1,i} \\ x_{2,j} - x_{2,i} & x_{2,k} - x_{2,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{pmatrix}$$

wird die Abbildung des Referenzdreiecks auf ein beliebiges Dreieck der Vernetzung realisiert (vgl. auch die Abbildung 4.23). Es gilt

$$|\det J_{\delta^{(r)}}| = 2 \operatorname{meas} \delta^{(r)},$$

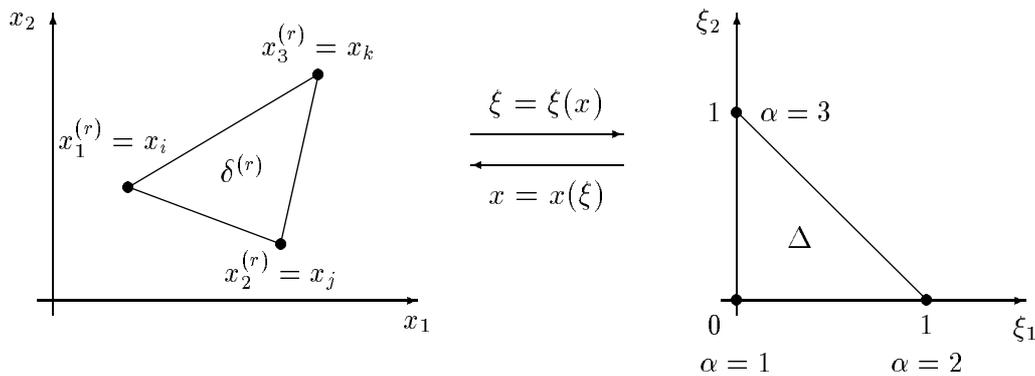
wobei  $\operatorname{meas} \delta^{(r)}$  den Flächeninhalt des Elements  $\delta^{(r)}$  bezeichnet. Diese Beziehung folgt aus der folgenden Überlegung

$$\operatorname{meas} \delta^{(r)} = \int_{\delta^{(r)}} dx = \int_{\Delta} |\det J_{\delta^{(r)}}| d\xi = |\det J_{\delta^{(r)}}| \int_{\Delta} d\xi = \frac{1}{2} |\det J_{\delta^{(r)}}|.$$

Die Umkehrabbildung  $\xi = J_{\delta^{(r)}}^{-1}(x - x_i)$  wird durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J_{\delta^{(r)}}} \begin{pmatrix} x_{2,k} - x_{2,i} & -(x_{1,k} - x_{1,i}) \\ -(x_{2,j} - x_{2,i}) & x_{1,j} - x_{1,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{1,i} \\ x_2 - x_{2,i} \end{pmatrix}$$

beschrieben.



beliebiges Dreieck  $\delta^{(r)} \in \mathcal{T}_h$

Referenzdreieck  $\Delta$

Abbildung 4.23: Abbildungen zwischen einem beliebigen Dreieck der Vernetzung und dem Referenzdreieck

• *Definition der Basisfunktionen*  $\longrightarrow$  *Ansatz- und Testfunktionen*

Mittels der Zuordnungsvorschrift

$$r : \alpha \leftrightarrow i$$

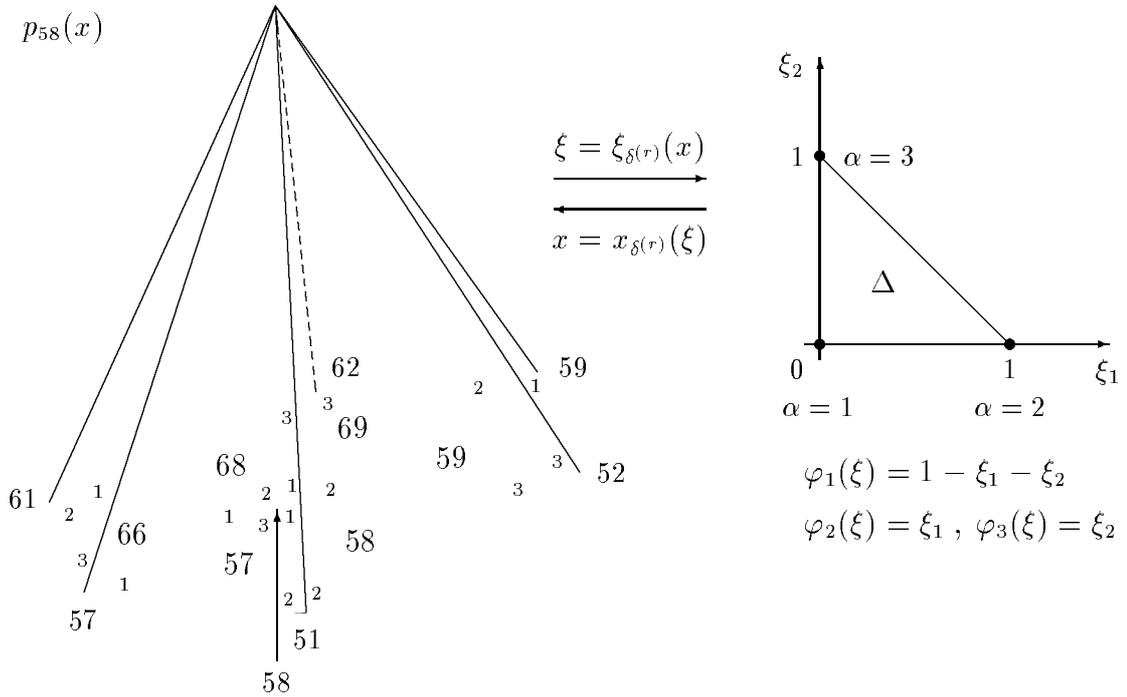
definieren wir

$$p_i(x) = \begin{cases} p_\alpha^{(r)}(x) & x \in \bar{\delta}^{(r)}, r \in B_i \quad (\text{Formfunktion}) \\ 0 & \text{sonst, d.h. für } x \in \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{r \in B_i} \bar{\delta}^{(r)} \end{cases} \quad (4.13)$$

mit  $B_i = \{r \in \mathbb{R}_h : x_i \in \bar{\delta}^{(r)}\}$  und  $p_\alpha^{(r)}(x) = \varphi_\alpha(\xi_{\delta^{(r)}}(x))$ ,  $x \in \bar{\delta}^{(r)}$ .

Die Funktion  $\varphi_\alpha$  ist die über die Verknüpfung zwischen der globalen und der lokalen Knotennummerierung zugeordnete Formfunktion auf dem Referenzelement.

Für die im Abschnitt 4.4.1 vorgestellte Vernetzung gilt beispielsweise  $B_{58} = \{57, 58, 59, 66, 68, 69\}$ .



$$p_{58}(x)|_{\delta(59)} = p_2^{(59)}(x) = \varphi_2(\xi_{\delta(59)}(x))$$

Abbildung 4.24: Definition der Ansatzfunktion  $p_{58}(x)$

Mit

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in \bar{\omega}_h \longrightarrow \text{Knotenbasis,}$$

$$V_h = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} v_i p_i(x) \right\} \subset V = H^1(\Omega),$$

$$V_{0h} = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{i \in \omega_h} v_i p_i(x) \right\} \subset V_0,$$

$$V_{g_1h} = \left\{ v_h(x) : v_h(x) = \sum_{i \in \omega_h} v_i p_i(x) + \sum_{i \in \gamma_h} g_1(x_i) p_i(x) \right\}$$

folgt für die Koeffizienten  $v_i$  in der Darstellung der Funktionen  $v_h(x)$

$$v_h(x_i) = v_i \quad \text{für alle } i \in \bar{\omega}_h.$$

In dem Beispiel aus dem Abschnitt 4.4.1 haben wir

$$\bar{\omega}_h = \{1, 2, \dots, 72\} \quad \text{und} \quad \omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \gamma_h, \quad \gamma_h = \{8, 9, 10, 25, 26, 27, 28\}.$$

### 4.4.3 Aufbau des FE–Gleichungssystems

Wir beschreiben im weiteren den elementweisen Aufbau des Finite–Elemente–Gleichungssystems, d.h. des Ritz–Galerkin–Systems (siehe auch Abschnitt 4.3):

Gesucht ist  $\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ , so daß

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \quad (4.14)$$

mit

$$\begin{aligned} K_h &= [a(p_i, p_k)]_{i,k \in \omega_h} \\ \underline{f}_h &= [\langle F, p_k \rangle - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i} a(p_i, p_k)]_{k \in \omega_h} \end{aligned}$$

gilt, wobei die Bilinearform  $a(.,.)$  und die Linearform  $\langle F, . \rangle$  wie folgt definiert sind :

$$\begin{aligned} a(p_i, p_k) &= \int_{\Omega} \left[ \lambda_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} \frac{\partial p_k}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \frac{\partial p_k}{\partial x_2} \right] dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) p_i(x) p_k(x) ds \\ \langle F, p_k \rangle &= \int_{\Omega} f(x) p_k(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x) p_k(x) ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(x) g_3(x) p_k(x) ds. \end{aligned}$$

Zuerst generieren wir eine Steifigkeitsmatrix und einen Lastvektor, in denen die Randterme noch nicht berücksichtigt sind.

#### Aufbau des FE–Gleichungssystems ohne Berücksichtigung der Randbedingungen

Beim Aufbau des FE–Gleichungssystems ohne Berücksichtigung der Randbedingungen werden die Matrix  $\bar{K}_h$

$$\bar{K}_h = [\bar{a}(p_i, p_k)]_{i,k \in \bar{\omega}_h} = \left[ \int_{\Omega} \left[ \lambda_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} \frac{\partial p_k}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \frac{\partial p_k}{\partial x_2} \right] dx \right]_{i,k \in \bar{\omega}_h}$$

und die rechte Seite  $\bar{f}_h$

$$\bar{f}_h = [\langle \bar{F}, p_k \rangle]_{k \in \bar{\omega}_h} = \left[ \int_{\Omega} f(x) p_k(x) dx \right]_{k \in \bar{\omega}_h}$$

berechnet. Den Ausgangspunkt unserer weiteren Überlegungen bilden die Beziehungen

$$(\bar{K}_h \underline{u}_h, \underline{v}_h) = \bar{a}(u_h, v_h) \quad \text{für alle } u_h \leftrightarrow \underline{u}_h, v_h \leftrightarrow \underline{v}_h, u_h, v_h \in V_h, \underline{u}_h, \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{\bar{N}_h}$$

und

$$(\bar{f}_h, \underline{v}_h) = \langle \bar{F}, v_h \rangle \quad \text{für alle } v_h \leftrightarrow \underline{v}_h, v_h \in V_h, \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{\bar{N}_h}.$$

• *Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen*

Es gilt für beliebige  $u_h, v_h \in V_h$  mit  $u_h = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i p_i(x)$  und  $v_h = \sum_{k \in \bar{\omega}_h} v_k p_k(x)$ :

$$\begin{aligned} \bar{a}(u_h, v_h) &= \bar{a}\left(\sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i p_i(x), \sum_{k \in \bar{\omega}_h} v_k p_k(x)\right) \\ &= \int_{\Omega} \left[ \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i p_i(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{k \in \bar{\omega}_h} v_k p_k(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i p_i(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \sum_{k \in \bar{\omega}_h} v_k p_k(x) \right) \right] dx \\ &= \sum_{r \in \mathbb{R}_h} \sum_{i \in \bar{\omega}_h} \sum_{k \in \bar{\omega}_h} u_i v_k \int_{\delta^{(r)}} \left[ \lambda_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} \frac{\partial p_k}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \frac{\partial p_k}{\partial x_2} \right] dx. \end{aligned}$$

Führen wir die Indexmenge  $\bar{\omega}_h^{(r)} = \{j : x_j = (x_{1,j}, x_{2,j}) \in \bar{\delta}^{(r)}\}$  ein, und beachten wir, daß

$$\int_{\delta^{(r)}} \left[ \lambda_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} \frac{\partial p_k}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \frac{\partial p_k}{\partial x_2} \right] dx = 0$$

gilt, falls  $x_i \notin \bar{\delta}^{(r)}$  oder  $x_k \notin \bar{\delta}^{(r)}$ , so folgt

$$\bar{a}(u_h, v_h) = \sum_{r \in \mathbb{R}_h} \sum_{i \in \bar{\omega}_h^{(r)}} \sum_{k \in \bar{\omega}_h^{(r)}} u_i v_k \int_{\delta^{(r)}} \left[ \lambda_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} \frac{\partial p_k}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \frac{\partial p_k}{\partial x_2} \right] dx.$$

Mit der Zuordnungsvorschrift  $r : i \leftrightarrow \alpha, k \leftrightarrow \beta, \alpha, \beta \in A^{(r)} = \{1, 2, 3\}$ , erhalten wir (siehe auch die Beziehung (4.13))

$$\begin{aligned} \bar{a}(u_h, v_h) &= \sum_{r \in \mathbb{R}_h} \sum_{\alpha \in A^{(r)}} \sum_{\beta \in A^{(r)}} u_{\alpha}^{(r)} v_{\beta}^{(r)} \int_{\delta^{(r)}} \left[ \lambda_1 \frac{\partial p_{\alpha}^{(r)}}{\partial x_1} \frac{\partial p_{\beta}^{(r)}}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_{\alpha}^{(r)}}{\partial x_2} \frac{\partial p_{\beta}^{(r)}}{\partial x_2} \right] dx \\ &= \sum_{r \in \mathbb{R}_h} (v_1^{(r)} \ v_2^{(r)} \ v_3^{(r)}) K^{(r)} \begin{pmatrix} u_1^{(r)} \\ u_2^{(r)} \\ u_3^{(r)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die Elementsteifigkeitsmatrix  $K^{(r)}$  wie folgt definiert ist

$$K^{(r)} = \left[ \int_{\delta^{(r)}} \left[ \lambda_1 \frac{\partial p_{\alpha}^{(r)}}{\partial x_1} \frac{\partial p_{\beta}^{(r)}}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_{\alpha}^{(r)}}{\partial x_2} \frac{\partial p_{\beta}^{(r)}}{\partial x_2} \right] dx \right]_{\beta, \alpha=1}^3.$$

Die Elemente der Matrizen  $K^{(r)}$  berechnen wir, indem wir in den auftretenden Integralen eine Koordinatentransformation durchführen, so daß Integrale über dem Referenzelement  $\Delta = \{(\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1 \leq 1, 0 \leq \xi_2 \leq 1, \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}$  zu berechnen sind.

Wir haben die Transformationsvorschrift  $x_{\delta(r)} = x_{\delta(r)}(\xi)$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,j} - x_{1,i} & x_{1,k} - x_{1,i} \\ x_{2,j} - x_{2,i} & x_{2,k} - x_{2,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{pmatrix} = J_{\delta(r)} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{pmatrix},$$

wobei  $P_i(x_{1,i}, x_{2,i})$ ,  $P_j(x_{1,j}, x_{2,j})$ ,  $P_k(x_{1,k}, x_{2,k})$  die Eckknoten des Dreiecks  $\delta^{(r)}$  sind, und die Zuordnung  $i \leftrightarrow 1$ ,  $j \leftrightarrow 2$ ,  $k \leftrightarrow 3$  zwischen der globalen und der lokalen Knotennummerierung besteht. Für die Abbildung  $\xi_{\delta(r)} = \xi_{\delta(r)}(x)$  gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= J_{\delta(r)}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - x_{1,i} \\ x_2 - x_{2,i} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det J_{\delta(r)}} \begin{pmatrix} x_{2,k} - x_{2,i} & -(x_{1,k} - x_{1,i}) \\ -(x_{2,j} - x_{2,i}) & x_{1,j} - x_{1,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{1,i} \\ x_2 - x_{2,i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{1,i} \\ x_2 - x_{2,i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen werden nach der Vorschrift

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}$$

berechnet, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{\det J_{\delta(r)}} \left[ (x_{2,k} - x_{2,i}) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - (x_{2,j} - x_{2,i}) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{\det J_{\delta(r)}} \left[ -(x_{1,k} - x_{1,i}) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + (x_{1,j} - x_{1,i}) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right]. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir unter Beachtung der Beziehung (4.13)

$$\begin{aligned} K_{\beta\alpha}^{(r)} &= \int_{\delta^{(r)}} \left[ \lambda_1 \frac{\partial p_\alpha^{(r)}}{\partial x_1} \frac{\partial p_\beta^{(r)}}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial p_\alpha^{(r)}}{\partial x_2} \frac{\partial p_\beta^{(r)}}{\partial x_2} \right] dx \\ &= \int_{\Delta} \left[ \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) \left( \frac{\partial p_\alpha^{(r)}(x_{\delta(r)}(\xi))}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_\alpha^{(r)}(x_{\delta(r)}(\xi))}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial p_\beta^{(r)}(x_{\delta(r)}(\xi))}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_\beta^{(r)}(x_{\delta(r)}(\xi))}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) \left( \frac{\partial p_\alpha^{(r)}(x_{\delta(r)}(\xi))}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_\alpha^{(r)}(x_{\delta(r)}(\xi))}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial p_\beta^{(r)}(x_{\delta(r)}(\xi))}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p_\beta^{(r)}(x_{\delta(r)}(\xi))}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \right] |\det J_{\delta(r)}| d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Delta} \left[ \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) \left( \frac{\partial \varphi_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial \varphi_{\beta}(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{\beta}(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) \left( \frac{\partial \varphi_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial \varphi_{\beta}(\xi)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_{\beta}(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \right] |\det J_{\delta(r)}| d\xi
\end{aligned}$$

Bei linearen Formfunktionen gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\xi) &= 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} = -1 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} = -1 \quad , \\
\varphi_2(\xi) &= \xi_1 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} = 0 \quad , \\
\varphi_3(\xi) &= \xi_2 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} = 1 \quad ,
\end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(r)} &= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \int_{\Delta} [\lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi))(-(x_{2,k} - x_{2,i}) + (x_{2,j} - x_{2,i}))^2 + \\
&\quad \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi))((x_{1,k} - x_{1,i}) - (x_{1,j} - x_{1,i}))^2] d\xi \\
&= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \left( (x_{2,j} - x_{2,k})^2 \int_{\Delta} \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi + (x_{1,k} - x_{1,j})^2 \int_{\Delta} \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi \right) \\
K_{22}^{(r)} &= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \int_{\Delta} [\lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi))(x_{2,k} - x_{2,i})^2 + \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi))(-(x_{1,k} - x_{1,i}))^2] d\xi \\
&= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \left( (x_{2,k} - x_{2,i})^2 \int_{\Delta} \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi + (x_{1,i} - x_{1,k})^2 \int_{\Delta} \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi \right) \\
K_{33}^{(r)} &= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \int_{\Delta} [\lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi))(-(x_{2,j} - x_{2,i}))^2 + \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi))(x_{1,j} - x_{1,i})^2] d\xi \\
&= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \left( (x_{2,i} - x_{2,j})^2 \int_{\Delta} \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi + (x_{1,j} - x_{1,i})^2 \int_{\Delta} \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi \right) \\
K_{12}^{(r)} &= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \int_{\Delta} [\lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi))(x_{2,k} - x_{2,i})(-(x_{2,k} - x_{2,i}) + (x_{2,j} - x_{2,i})) + \\
&\quad \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi))(-(x_{1,k} - x_{1,i}))((x_{1,k} - x_{1,i}) - (x_{1,j} - x_{1,i}))] d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \left( (x_{2,k} - x_{2,i})(x_{2,j} - x_{2,k}) \int_{\Delta} \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi + \right. \\
&\quad \left. (x_{1,i} - x_{1,k})(x_{1,k} - x_{1,j}) \int_{\Delta} \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi \right) \\
K_{13}^{(r)} &= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \int_{\Delta} [\lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi))(-(x_{2,j} - x_{2,i})(-(x_{2,k} - x_{2,i}) + (x_{2,j} - x_{2,i}))) + \\
&\quad \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi))(x_{1,j} - x_{1,i})((x_{1,k} - x_{1,i}) - (x_{1,j} - x_{1,i}))] d\xi \\
&= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \left( (x_{2,i} - x_{2,j})(x_{2,j} - x_{2,k}) \int_{\Delta} \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi + \right. \\
&\quad \left. (x_{1,j} - x_{1,i})(x_{1,k} - x_{1,j}) \int_{\Delta} \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi \right) \\
K_{23}^{(r)} &= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \int_{\Delta} [\lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi))(-(x_{2,j} - x_{2,i})(x_{2,k} - x_{2,i})) + \\
&\quad \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi))(x_{1,j} - x_{1,i})(-(x_{1,k} - x_{1,i}))] d\xi \\
&= \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \left( (x_{2,i} - x_{2,j})(x_{2,k} - x_{2,i}) \int_{\Delta} \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi + \right. \\
&\quad \left. (x_{1,j} - x_{1,i})(x_{1,i} - x_{1,k}) \int_{\Delta} \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi \right)
\end{aligned}$$

Es müssen noch die Integrale  $\int_{\Delta} \lambda_1 d\xi$  und  $\int_{\Delta} \lambda_2 d\xi$  berechnet werden. Falls  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  konstant sind, ist dies trivial. Es gilt dann  $\int_{\Delta} \lambda_1 d\xi = \frac{1}{2}\lambda_1$  und  $\int_{\Delta} \lambda_2 d\xi = \frac{1}{2}\lambda_2$ . Anderenfalls benutzen wir die Mittelpunktsformel

$$\int_{\Delta} w(\xi) d\xi \approx \frac{1}{2}w(\xi_s) \quad , \quad \xi_s = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

d.h.

$$\int_{\Delta} \lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi \approx \frac{1}{2}\lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi_s)) \quad , \quad \xi_s = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

und

$$\int_{\Delta} \lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi)) d\xi \approx \frac{1}{2}\lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi_s)) \quad , \quad \xi_s = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) .$$

Mit  $k_1 = \frac{1}{2}\lambda_1$  bzw.  $k_1 = \frac{1}{2}\lambda_1(x_{\delta(r)}(\xi_s))$  und  $k_2 = \frac{1}{2}\lambda_2$  bzw.  $k_2 = \frac{1}{2}\lambda_2(x_{\delta(r)}(\xi_s))$  hat die Elementsteifigkeitsmatrix die Gestalt

$$K^{(r)} = \frac{1}{|\det J_{\delta(r)}|} \cdot \begin{pmatrix} k_1(x_{2,j} - x_{2,k})^2 & k_1(x_{2,k} - x_{2,i})(x_{2,j} - x_{2,k}) & k_1(x_{2,i} - x_{2,j})(x_{2,j} - x_{2,k}) \\ +k_2(x_{1,k} - x_{1,j})^2 & +k_2(x_{1,i} - x_{1,k})(x_{1,k} - x_{1,j}) & +k_2(x_{1,j} - x_{1,i})(x_{1,k} - x_{1,j}) \\ & k_1(x_{2,k} - x_{2,i})^2 & k_1(x_{2,i} - x_{2,j})(x_{2,k} - x_{2,i}) \\ & +k_2(x_{1,i} - x_{1,k})^2 & +k_2(x_{1,j} - x_{1,i})(x_{1,i} - x_{1,k}) \\ \text{symmetrisch} & & \\ & & k_1(x_{2,i} - x_{2,j})^2 \\ & & +k_2(x_{1,j} - x_{1,i})^2 \end{pmatrix},$$

wobei vorausgesetzt wurde, daß zwischen der globalen und der lokalen Knotennummerierung die Zuordnung  $i \leftrightarrow 1$ ,  $j \leftrightarrow 2$ ,  $k \leftrightarrow 3$  gilt.

**Bemerkung 4.12** Zur Berechnung der Matrixelemente der Elementsteifigkeitsmatrix haben wir nur die Abbildungsvorschrift  $x = J_{\delta(r)}\xi + x_i$  und die Ableitungen der über dem Referenzelement definierten Formfunktionen genutzt. Eine explizite Darstellung der Formfunktionen über dem Element  $\delta^{(r)}$  wurde nicht benötigt. Dies gilt allgemein, d.h. auch bei der Verwendung von Ansatzfunktionen höherer Ordnung.

- *Berechnung der Elementlastvektoren*

Die Elementlastvektoren  $\underline{f}^{(r)}$  werden auf analoge Weise wie die Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(r)}$  berechnet, d.h.

$$\begin{aligned} (\underline{\bar{f}}_h, \underline{v}_h) &= \langle \bar{F}, v_h \rangle = \int_{\Omega} f(x)v_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \sum_{k \in \bar{\omega}_h} v_k p_k(x) dx \\ &= \sum_{r \in \mathbb{R}_h} \sum_{k \in \bar{\omega}_h} v_k \int_{\delta^{(r)}} f(x)p_k(x) dx. \end{aligned}$$

Führen wir wiederum die Indexmenge  $\bar{\omega}_h^{(r)} = \{k : x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}) \in \bar{\delta}^{(r)}\}$  ein, und beachten wir, daß  $p_k(x)|_{\delta^{(r)}} = 0$ , falls  $x_k \notin \bar{\delta}^{(r)}$ , dann erhalten wir

$$(\underline{\bar{f}}_h, \underline{v}_h) = \sum_{r \in \mathbb{R}_h} \sum_{k \in \bar{\omega}_h^{(r)}} v_k \int_{\delta^{(r)}} f(x)p_k(x) dx.$$

Mit der Zuordnungsvorschrift  $r : k \leftrightarrow \beta$  folgt

$$(\underline{\bar{f}}_h, \underline{v}_h) = \sum_{r \in \mathbb{R}_h} \sum_{\beta \in A^{(r)}} v_{\beta}^{(r)} \int_{\delta^{(r)}} f(x)p_{\beta}^{(r)}(x) dx = \sum_{r \in \mathbb{R}_h} (v_1^{(r)} \ v_2^{(r)} \ v_3^{(r)}) \underline{f}^{(r)},$$

wobei der Elementlastvektor  $\underline{f}^{(r)}$  durch

$$\underline{f}^{(r)} = \left[ \int_{\delta^{(r)}} f(x)p_{\beta}^{(r)}(x) dx \right]_{\beta=1}^3$$

definiert ist. Diese Integrale werden wieder auf Integrale über dem Referenzelement zurückgeführt. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\delta^{(r)}} f(x) p_\beta^{(r)}(x) dx &= \int_{\Delta} f(x_{\delta^{(r)}}(\xi)) p_\beta^{(r)}(x_{\delta^{(r)}}(\xi)) |\det J_{\delta^{(r)}}| d\xi \\ &= \int_{\Delta} f(x_{\delta^{(r)}}(\xi)) \varphi_\beta(\xi) |\det J_{\delta^{(r)}}| d\xi. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Integrale kann beispielsweise die Mittelpunktsformel eingesetzt werden, d.h.

$$\int_{\Delta} f(x_{\delta^{(r)}}(\xi)) \varphi_\beta(\xi) |\det J_{\delta^{(r)}}| d\xi \approx \frac{1}{2} f(x_{\delta^{(r)}}(\xi_s)) \varphi_\beta(\xi_s) |\det J_{\delta^{(r)}}| \quad \text{mit} \quad \xi_s = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

**Bemerkung 4.13** Die Mittelpunktsformel integriert Polynome ersten Grades, d.h. Polynome der Gestalt  $\varphi(\xi) = a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ , exakt.

• *Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrizen und der Elementlastvektoren*

Zur Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrizen bzw. der Elementlastvektoren benötigen wir die Zuordnungsvorschrift  $r : i \leftrightarrow \alpha$ , d.h. die Tabelle für die Zuordnung zwischen der lokalen und der globalen Knotennummerierung. Wir schreiben diese für unser Beispiel aus dem Abschnitt 4.4.1 auf.

Elementnummer	globale Knotennummern der lokalen Knoten			Elementkennzahl z.B. Materialbereichsnummer
	$P_1^{(r)}$	$P_2^{(r)}$	$P_3^{(r)}$	
1	1	37	30	1
2	1	11	37	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	2	40	13	1
11	2	14	40	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	72	67	33	2
101	72	33	34	2
102	72	34	68	2
103	72	68	69	2
104	72	69	22	2
105	72	22	21	2
106	72	21	67	2

Tabelle 4.3: Zuordnungstabelle

Es seien die Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, \dots, R_h$ , berechnet. Wir setzen zunächst die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\bar{K}_h$  identisch Null und bauen dann nacheinander die Matrizen  $K^{(r)}$  ein. Nach dem Einbau von  $K^{(1)}$  erhalten wir



Werden auf analoge Weise alle weiteren Elementsteifigkeitsmatrizen eingebaut, dann entsteht die globale Steifigkeitsmatrix  $\bar{K}_h$  ohne Berücksichtigung der Randbedingungen.

Für die Assemblierung der rechten Seite  $\bar{f}_h$  nutzen wir den gleichen Algorithmus, d.h. zunächst setzen wir  $\bar{f}_h$  identisch Null. Nach dem Einbau von  $f^{(1)}$  erhalten wir

$$\bar{f}_h = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & f_3^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & f_2^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$$

1      2    ... 29 30 31    ... 36 37 38    ... 72

und nach der Addition von  $f^{(2)}$

$$\bar{f}_h = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} + f_1^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & f_2^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & f_3^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & f_2^{(1)} + f_3^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T .$$

1            2    ... 10 11 12    ... 29 30 31    ... 36            37        38    ... 72

Die Fortsetzung dieses Assemblierungsprozesses für alle  $r = 3, 4, \dots, R_h$ , liefert den globalen Lastvektor  $\bar{f}_h$ . Für das Element  $\bar{f}_{72}$  gilt z.B.

$$\bar{f}_{72} = f_1^{(100)} + f_1^{(101)} + f_1^{(102)} + f_1^{(103)} + f_1^{(104)} + f_1^{(105)} + f_1^{(106)} .$$

**Bemerkung 4.14** Zur Darstellung der Matrix  $\bar{K}_h$  und der rechten Seite  $\bar{f}_h$  können auch die Connectivity-Matrizen  $C^{(r)}$  genutzt werden. Dabei ist  $C^{(r)}$  wie folgt definiert

$$C_{ij}^{(r)} = \begin{cases} 1 & i \text{ globale Knotennummer eines Eckknotens des Dreiecks } \delta^{(r)} \\ & \text{und } j \text{ die zugehörige lokale Knotennummer} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, \bar{N}_h, j = 1, 2, 3$ . Damit gilt

$$\bar{K}_h = \sum_{r \in \mathbb{R}_h} C^{(r)} K^{(r)} (C^{(r)})^T \quad \text{und} \quad \bar{f}_h = \sum_{r \in \mathbb{R}_h} C^{(r)} f^{(r)} .$$

Die Matrix  $C^{(1)}$  hat beispielsweise die Gestalt

$$(C^{(1)})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1 2    ... 29 30 31    ... 36 37 38    ... 72

## Einarbeitung der Randbedingungen

Bisher wurden beim Aufbau des FE-Gleichungssystems die Terme

$$\int_{\Gamma_2} g_2(x)v_h(x) ds, \quad \int_{\Gamma_3} \alpha(x)g_3(x)v_h(x) ds \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_3} \alpha(x)u_h(x)v_h(x) ds,$$

die aus den Randbedingungen 2. und 3. Art resultieren, sowie die Randbedingungen 1. Art nicht berücksichtigt.

Im weiteren arbeiten wir diese Randbedingungen in das FE-Gleichungssystem ein.

- *Berücksichtigung der Randbedingungen 2. und 3. Art im FE-Gleichungssystem*

Wir setzen voraus, daß das vernetzte Gebiet  $\Omega$  polygonal berandet ist. Auf Grund der Forderungen an die Vernetzung des Gebietes (siehe Abschnitt 4.4.1) gilt

$$\bar{\Gamma}_2 = \bigcup_{e_2 \in E_h^{(2)}} \bar{\Gamma}_2^{(e_2)} \quad \text{und} \quad \bar{\Gamma}_3 = \bigcup_{e_3 \in E_h^{(3)}} \bar{\Gamma}_3^{(e_3)},$$

wobei  $\Gamma_2^{(e_2)}$  bzw.  $\Gamma_3^{(e_3)}$  Dreiecksseiten sind, die auf  $\Gamma_2$  bzw.  $\Gamma_3$  liegen. Analog wie bei den Dreiecken numerieren wir alle Dreiecksseiten, die auf  $\Gamma_2$  bzw.  $\Gamma_3$  liegen, so daß wir die Indexmengen  $E_h^{(2)} = \{1, 2, \dots, N_h^{(2)}\}$  und  $E_h^{(3)} = \{1, 2, \dots, N_h^{(3)}\}$  erhalten. Außerdem definieren wir eine Zuordnungsvorschrift  $e : i \leftrightarrow \alpha$ ,  $\alpha \in A^{(e)} = \{1, 2\}$ , zwischen der globalen und der lokalen Knotennumerierung, d.h. in unserem Beispiel

Nummer der Dreiecksseite, die auf $\Gamma_3$ liegt	globale Knotennummern der lokalen Knoten	
	$P_1^{(e_3)}$	$P_2^{(e_3)}$
1	1	11
2	11	12
3	12	13
4	13	2

Tabelle 4.4: Zuordnungstabelle für die Randseiten auf  $\Gamma_3$

Die Integrale über  $\Gamma_2$  bzw.  $\Gamma_3$  werden wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \alpha(x)u_h(x)v_h(x) ds &= \sum_{e_3 \in E_h^{(3)}} \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x)u_h(x)v_h(x) ds \\ &= \sum_{e_3 \in E_h^{(3)}} \sum_{i \in \bar{\omega}_h} \sum_{k \in \bar{\omega}_h} u_i v_k \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x)p_i(x)p_k(x) ds. \end{aligned}$$

Führen wir die Indexmenge  $\bar{\omega}_h^{(e_3)} = \{j : x_j = (x_{1,j}, x_{2,j}) \in \bar{\Gamma}_3^{(e_3)}\}$  ein, und beachten wir, daß  $p_j(x)|_{\Gamma_3^{(e_3)}} = 0$  für  $x_j \notin \bar{\Gamma}_3^{(e_3)}$  gilt, dann folgt

$$\int_{\Gamma_3} \alpha(x) u_h(x) v_h(x) ds = \sum_{e_3 \in E_h^{(3)}} \sum_{i \in \bar{\omega}_h^{(e_3)}} \sum_{k \in \bar{\omega}_h^{(e_3)}} u_i v_k \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) p_i(x) p_k(x) ds$$

und mit der Zuordnungsvorschrift  $e : i \leftrightarrow \alpha, e : k \leftrightarrow \beta$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \alpha(x) u_h(x) v_h(x) ds &= \sum_{e_3 \in E_h^{(3)}} \sum_{\alpha \in A^{(e_3)}} \sum_{\beta \in A^{(e_3)}} u_\alpha^{(e_3)} v_\beta^{(e_3)} \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) p_\alpha^{(e_3)}(x) p_\beta^{(e_3)}(x) ds \\ &= \sum_{e_3 \in E_h^{(3)}} (v_1^{(e_3)} \ v_2^{(e_3)}) K^{(e_3)} \begin{pmatrix} u_1^{(e_3)} \\ u_2^{(e_3)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$K^{(e_3)} = \left[ \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) p_\alpha^{(e_3)}(x) p_\beta^{(e_3)}(x) ds \right]_{\beta, \alpha=1}^2.$$

Die Elemente der Matrizen  $K^{(e_3)}$  berechnen wir, indem wir in den Kurvenintegralen eine Koordinatentransformation durchführen. Dazu bilden wir die jeweilige Dreiecksseite  $\Gamma_3^{(e_3)}$  auf das Intervall  $[0, 1]$  ab. Es gilt

$$x = x(\xi_1) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k} - x_{1,i} \\ x_{2,k} - x_{2,i} \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{pmatrix}.$$

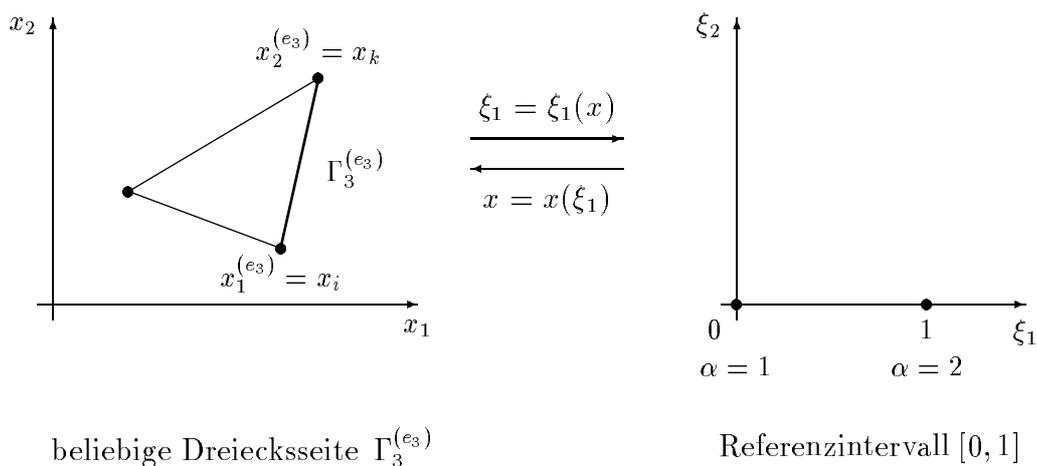


Abbildung 4.25: Abbildung einer Dreiecksseite auf das Intervall  $[0, 1]$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) p_\alpha^{(e_3)}(x) p_\beta^{(e_3)}(x) ds \\
&= \int_0^1 \alpha(x(\xi_1)) p_\alpha^{(e_3)}(x(\xi_1)) p_\beta^{(e_3)}(x(\xi_1)) \sqrt{\left(\frac{dx_1(\xi_1)}{d\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(\xi_1)}{d\xi_1}\right)^2} d\xi_1 \\
&= \int_0^1 \alpha(x(\xi_1)) \varphi_\alpha(\xi_1) \varphi_\beta(\xi_1) \sqrt{(x_{1,k} - x_{1,i})^2 + (x_{2,k} - x_{2,i})^2} d\xi_1.
\end{aligned}$$

Für stückweise lineare Ansatzfunktionen gilt

$$\varphi_1(\xi_1) = 1 - \xi_1 \quad \text{und} \quad \varphi_2(\xi_1) = \xi_1.$$

Die Integrale

$$\int_{\Gamma_3} \alpha(x) g_3(x) v_h(x) ds \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_2} g_2(x) v_h(x) ds$$

werden auf völlig analoge Weise berechnet, d.h.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} \alpha(x) g_3(x) v_h(x) ds &= \sum_{e_3 \in E_h^{(3)}} \sum_{k \in \bar{\omega}_h^{(e_3)}} v_k \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) g_3(x) p_k(x) ds \\
&= \sum_{e_3 \in E_h^{(3)}} \sum_{\beta \in A^{(e_3)}} v_\beta^{(e_3)} \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) g_3(x) p_\beta^{(e_3)}(x) ds \\
&= \sum_{e_3 \in E_h^{(3)}} (v_1^{(e_3)} \ v_2^{(e_3)}) \underline{f}^{(e_3)}
\end{aligned}$$

mit

$$\underline{f}^{(e_3)} = \left[ \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) g_3(x) p_\beta^{(e_3)}(x) ds \right]_{\beta=1}^2$$

und nach einer gleichartigen Herleitung

$$\underline{f}^{(e_2)} = \left[ \int_{\Gamma_2^{(e_2)}} g_2(x) p_\beta^{(e_2)}(x) ds \right]_{\beta=1}^2.$$

Die Matrizen  $K^{(e_3)}$  sowie die Vektoren  $\underline{f}^{(e_3)}$  und  $\underline{f}^{(e_2)}$ ,  $e_3 = 1, 2, \dots, N_h^{(3)}$ ,  $e_2 = 1, 2, \dots, N_h^{(2)}$ , werden genauso wie die Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(r)}$  und die Elementlastvektoren  $\underline{f}^{(r)}$  assembliert.

Abschließend sind noch die Randbedingungen 1. Art in das FE-Gleichungssystem einzuarbeiten.

- *Berücksichtigung der Randbedingungen 1. Art im FE-Gleichungssystem*

1. Variante : Homogenisieren im Diskreten

Wir setzen  $u_j = g_1(x_j)$  für alle  $j \in \gamma_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$ , d.h. für alle Indizes  $j$ , die zu Knoten auf dem Rand  $\Gamma_1$  gehören, und korrigieren die rechte Seite durch

$$f_i := f_i - \sum_{j \in \gamma_h} K_{ij} u_j \quad \text{für alle } i \in \omega_h,$$

wobei  $K_{ij}$  die Matrixelemente der globalen Steifigkeitsmatrix  $K_h$  nach Einbau der Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(r)}$  und der Matrizen  $K^{(e_3)}$  sowie  $f_i$  die Komponenten des globalen Lastvektors nach Einbau der Elementlastvektoren  $\underline{f}^{(r)}$  und der Vektoren  $\underline{f}^{(e_2)}$  bzw.  $\underline{f}^{(e_3)}$  sind. Anschließend streichen wir die Spalten  $j$ ,  $j \in \gamma_h$ , und die Zeilen  $i$ ,  $i \in \gamma_h$ , aus der Steifigkeitsmatrix sowie die Zeilen  $i$ ,  $i \in \gamma_h$ , aus dem Lastvektor.

2. Variante:

Wir gehen analog wie in der Variante 1 vor, nur anstelle des Streichens der Spalten  $j$  und der Zeilen  $i$  mit  $i, j \in \gamma_h$  setzen wir

$$K_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{sowie} \quad f_i = g_1(x_i)$$

für alle  $i, j \in \gamma_h$ .

3. Variante: Straftechnik (siehe auch [44])

Für alle  $i \in \gamma_h$  setzen wir

$$K_{ii} := K_{ii} + \hat{K}, \quad \hat{K} = 10^p \cdot \max_{j=1,2,\dots,\bar{N}_h} |K_{ij}| \cdot \bar{N}_h, \quad p \text{ hinreichend groß}$$

$$f_i := f_i + \hat{K} g_1(x_i).$$

## Zusammenfassung zum Aufbau des FE-Gleichungssystems

1. Triangularisierung des Gebietes  $\Omega$ , d.h.

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_h = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}^{(r)} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Omega} \approx \bar{\Omega}_h = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}^{(r)}$$

2. Für alle  $r \in \mathbb{R}_h$

- Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen

$$K^{(r)} = \left[ \int_{\delta^{(r)}} \left[ \lambda_1(x) \frac{\partial p_\alpha^{(r)}}{\partial x_1} \frac{\partial p_\beta^{(r)}}{\partial x_1} + \lambda_2(x) \frac{\partial p_\alpha^{(r)}}{\partial x_2} \frac{\partial p_\beta^{(r)}}{\partial x_2} \right] dx \right]_{\beta, \alpha=1}^3$$

sowie der Elementlastvektoren

$$\underline{f}^{(r)} = \left[ \int_{\delta^{(r)}} f(x) p_\beta^{(r)}(x) dx \right]_{\beta=1}^3$$

- Einbau der Matrizen  $K^{(r)}$  und der Vektoren  $\underline{f}^{(r)}$  in die globale Steifigkeitsmatrix bzw. den globalen Lastvektor

3. Für alle  $e_3 \in E_h^{(e_3)}$  (Beachtung der Randbedingungen 3. Art)

- Berechnung der Matrizen  $K^{(e_3)}$

$$K^{(e_3)} = \left[ \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) p_\alpha^{(e_3)}(x) p_\beta^{(e_3)}(x) ds \right]_{\beta, \alpha=1}^2$$

sowie der Vektoren

$$\underline{f}^{(e_3)} = \left[ \int_{\Gamma_3^{(e_3)}} \alpha(x) g_3(x) p_\beta^{(e_3)}(x) ds \right]_{\beta=1}^2$$

- Einbau der Matrizen  $K^{(e_3)}$  und der Vektoren  $\underline{f}^{(e_3)}$  in die globale Steifigkeitsmatrix und den globalen Lastvektor

4. Für alle  $e_2 \in E_h^{(e_2)}$  (Beachtung der Randbedingungen 2. Art)

- Berechnung der Vektoren

$$\underline{f}^{(e_2)} = \left[ \int_{\Gamma_2^{(e_2)}} g_2(x) p_\beta^{(e_2)}(x) ds \right]_{\beta=1}^2$$

- Einbau der Vektoren  $\underline{f}^{(e_2)}$  in den globalen Lastvektor

5. Berücksichtigung der Randbedingungen 1. Art im FE-Gleichungssystem

**Bemerkung 4.15** Die Integrale in den Schritten 2, 3 und 4 werden auf Integrale über dem Referenzdreieck bzw. dem Referenzintervall zurückgeführt.

#### 4.4.4 Ein Konvergenzresultat

Für jede Diskretisierungsschrittweite  $h$  sei eine zulässige Triangularisierung des Gebietes  $\Omega$  gegeben. Wir setzen voraus, daß das Gebiet  $\Omega$  polygonal berandet ist, so daß

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_h} \bar{\delta}^{(r)}$$

gilt. Für alle Dreiecke  $\delta^{(r)}$  seien die Bedingungen:

$$\text{es existiert ein } \alpha_0 = \text{const.} > 0 : \alpha_0 h \leq h_1^{(r)}, h_2^{(r)}, h_3^{(r)} \leq h \quad \text{und}$$

$$\text{es existiert ein } \theta_0 = \text{const.} > 0 : \theta_0 \leq \theta_1^{(r)}, \theta_2^{(r)}, \theta_3^{(r)} \leq \pi - \theta_0$$

erfüllt, wobei  $h_i^{(r)}$  die Längen der Dreiecksseiten und  $\theta_i^{(r)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , die Dreiecksinnenwinkel sind (siehe auch Abschnitt 4.4.1, Abbildung 4.14).

Weiterhin sei die Bilinearform  $V_0$ -beschränkt und  $V_0$ -elliptisch, d.h.

$$\text{es existiert ein } \mu_2 = \text{const.} > 0 : |a(u, v)| \leq \mu_2 \|u\|_{1,2,\Omega} \|v\|_{1,2,\Omega} \quad \text{und} \quad (4.15)$$

$$\text{es existiert ein } \mu_1 = \text{const.} > 0 : a(v, v) \geq \mu_1 \|v\|_{1,2,\Omega}^2$$

für alle  $u, v \in V_0$ .

Für die Linearform  $\langle F, \cdot \rangle$  gelte

$$|\langle F, v \rangle| \leq c(f, g_2, g_3) \|v\|_{1,2,\Omega}.$$

Falls die Lösung  $u$  des Variationsproblems zum Raum  $H^2(\Omega) \cap V_{g_1}$  gehört, d.h. falls  $u$  sowie alle ersten und zweiten verallgemeinerten partiellen Ableitungen von  $u$  Elemente des Raumes  $L_2(\Omega)$  sind, dann gelten die Konvergenzaussagen

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq ch \|u\|_{2,2,\Omega}$$

$$\|u - u_h\|_{0,2,\Omega} \leq ch^2 \|u\|_{2,2,\Omega}$$

mit

$$\|w\|_{0,2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} w^2 dx$$

$$\|w\|_{1,2,\Omega}^2 = \|w\|_{0,2,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx$$

$$\|w\|_{2,2,\Omega}^2 = \|w\|_{1,2,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx$$

(siehe z.B. auch [13, 27, 30]).

#### 4.4.5 Ein Beispiel

Wir betrachten folgendes Randwertproblem:

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2) \cap C(\bar{\Omega})$ , so daß

$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= 0 & x \in \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\
 u(x_1, x_2) &= x_2 & x \in \Gamma_{11} &= \{x \in \partial\Omega : x_1 = 1, 0 < x_2 \leq 1\} \\
 u(x_1, x_2) &= 0 & x \in \Gamma_{12} &= \{x \in \partial\Omega : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\} \\
 \frac{\partial u}{\partial n} &= -x_2 & x \in \Gamma_{21} &= \{x \in \partial\Omega : x_1 = 0, 0 < x_2 < 1\} \\
 \frac{\partial u}{\partial n} &= x_1 & x \in \Gamma_{22} &= \{x \in \partial\Omega : 0 < x_1 < 1, x_2 = 1\}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

gilt.

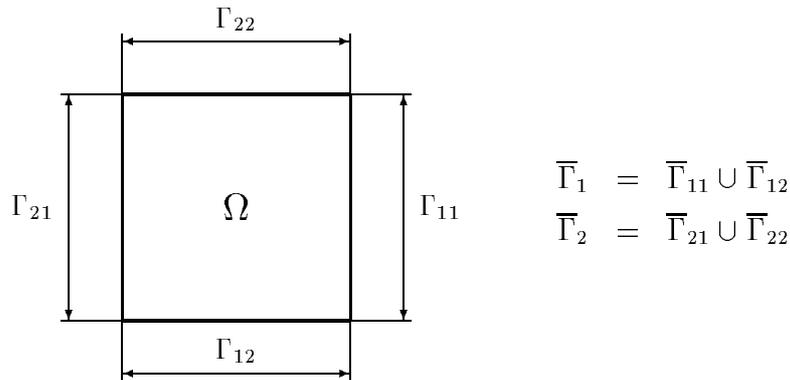


Abbildung 4.26: Darstellung des Gebietes  $\Omega$

Die exakte Lösung dieser Aufgabe ist  $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ , denn

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = -\frac{\partial u}{\partial x_1} = -x_2 \quad \text{auf } \Gamma_{21},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \quad \text{auf } \Gamma_{22}.$$

Den Ausgangspunkt für die Finite-Elemente-Diskretisierung bildet die Variationsformulierung der Aufgabe (4.16). Um diese zu erhalten, multiplizieren wir die Differentialgleichung aus der Aufgabe (4.16) mit einer Testfunktion  $v(x) \in V_0$ ,  $V_0 = \{v(x) \in H^1(\Omega) : v(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}\}$  und integrieren über  $\Omega$ , so daß wir

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} 0 v(x) dx$$

erhalten. Nach der partiellen Integration ergibt sich

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = 0.$$

Beachten wir die vorgegebenen Randbedingungen, so folgt

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx - \int_{\Gamma_{11}} \frac{\partial u}{\partial n} v ds - \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial u}{\partial n} v ds - \int_{\Gamma_{21}} -x_2 v ds - \int_{\Gamma_{22}} x_1 v ds = 0.$$

Die Variationsformulierung der Aufgabe (4.16) lautet somit:

Gesucht ist  $u(x) \in V_{g_1} = \{u(x) \in H^1(\Omega) : u(x) = x_2 \text{ für alle } x \in \Gamma_{11} \text{ und } u(x) = 0 \text{ für alle } x \in \Gamma_{12}\}$ , so daß

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx = - \int_{\Gamma_{21}} x_2 v ds + \int_{\Gamma_{22}} x_1 v ds \tag{4.17}$$

für alle  $v(x) \in V_0 = \{v(x) \in H^1(\Omega) : v(x) = 0 \text{ für alle } x \in \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}\}$  gilt.

Im weiteren führen wir die FE-Diskretisierung durch. Dazu vernetzen wir zuerst das Gebiet  $\Omega$ .

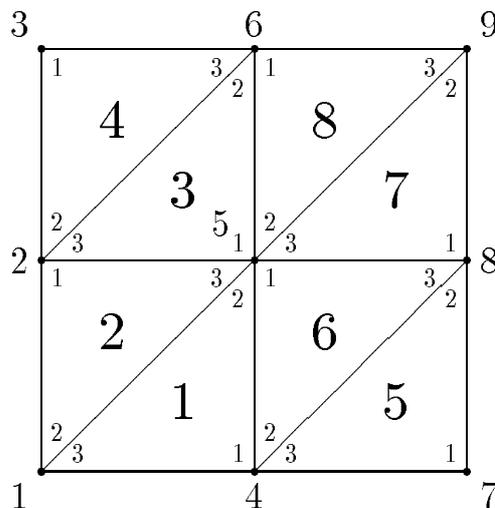


Abbildung 4.27: Vernetzung des Gebietes  $\Omega$

Als Ansatzfunktionen wählen wir die im Abschnitt 4.4.2 eingeführten, stückweise linearen Funktionen.

Zunächst generieren wir das FE-Gleichungssystem ohne Berücksichtigung der Randbedingungen. Dazu stellen wir die Zuordnungstabelle zwischen der globalen und der lokalen Knotennumerierung auf.

Elementnummer	globale Knotennummern der lokalen Knoten		
	$P_1^{(r)}$	$P_2^{(r)}$	$P_3^{(r)}$
1	4	5	1
2	2	1	5
3	5	6	2
4	3	2	6
5	7	8	4
6	5	4	8
7	8	9	5
8	6	5	9

Tabelle 4.5: Zuordnungstabelle

Die allgemeine Gestalt der Elementsteifigkeitsmatrizen im Fall stückweise linearer Ansatzfunktionen haben wir bereits im Abschnitt 4.4.3 hergeleitet. In unserem Beispiel gilt  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Die Elementsteifigkeitsmatrizen  $K^{(r)}$ ,  $r = 1, 2, \dots, 8$ , sind somit die Matrizen

$$\begin{aligned}
 K^{(r)} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 & 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) & 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

für  $r = 1, 3, 5, 7$  und

$$\begin{aligned}
 K^{(r)} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 & 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) & 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

für  $r = 2, 4, 6, 8$ .

Damit erhalten wir die globale Steifigkeitsmatrix  $\bar{K}_h$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\bar{K}_h = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Der globale Lastvektor  $\underline{f}_h$  ist identisch Null, da die rechte Seite der Differentialgleichung identisch Null ist. Im folgenden werden die Anteile aus den Randbedingungen 2. Art berechnet, d.h.

$$-\int_{\Gamma_{21}} x_2 v_h ds \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_{22}} x_1 v_h ds .$$

Der Rand  $\Gamma_{21}$  wird durch die zwei Dreiecksseiten  $\Gamma_2^{(1)} = \overline{P_1 P_2}$  und  $\Gamma_2^{(2)} = \overline{P_2 P_3}$  sowie der Rand  $\Gamma_{22}$  durch die Dreiecksseiten  $\Gamma_2^{(3)} = \overline{P_6 P_3}$  und  $\Gamma_2^{(4)} = \overline{P_9 P_6}$  gebildet. Für die Randseiten haben wir die folgende Zuordnung zwischen der lokalen und der globalen Knotennummerierung.

Nummer der Dreiecksseite, die auf $\Gamma_2$ liegt	globale Knotennummern der lokalen Knoten	
	$P_1^{(e_2)}$	$P_2^{(e_2)}$
1	1	2
2	2	3
3	6	3
4	9	6

Tabelle 4.6: Zuordnungstabelle für die Randseiten auf dem Rand  $\Gamma_2$

Zu berechnen sind somit die Vektoren

$$\underline{f}^{(1)} = \left[ \int_{\Gamma_2^{(1)}} -x_2 p_1^{(1)}(x) ds \quad \int_{\Gamma_2^{(1)}} -x_2 p_2^{(1)}(x) ds \right]^T$$

$$\underline{f}^{(2)} = \left[ \int_{\Gamma_2^{(2)}} -x_2 p_1^{(2)}(x) ds \quad \int_{\Gamma_2^{(2)}} -x_2 p_2^{(2)}(x) ds \right]^T$$

$$\underline{f}^{(3)} = \left[ \int_{\Gamma_2^{(3)}} x_1 p_1^{(3)}(x) ds \quad \int_{\Gamma_2^{(3)}} x_1 p_2^{(3)}(x) ds \right]^T$$

$$\underline{f}^{(4)} = \left[ \int_{\Gamma_2^{(4)}} x_1 p_1^{(4)}(x) ds \quad \int_{\Gamma_2^{(4)}} x_1 p_2^{(4)}(x) ds \right]^T .$$

Bei der Berechnung dieser Integrale führen wir eine Abbildung auf das Intervall  $[0, 1]$  durch. Es gilt mit der Abbildungsvorschrift

$$x = x(\xi_1) : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k} - x_{1,i} \\ x_{2,k} - x_{2,i} \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2^{(1)}} -x_2 p_1^{(1)}(x) ds &= \int_0^1 \left\{ [-(x_{2,k} - x_{2,i})\xi_1 - x_{2,i}](1 - \xi_1) \frac{1}{2} \right\} d\xi_1 \\ &= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2} \xi_1 (1 - \xi_1) \frac{1}{2} \right\} d\xi_1 = -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2^{(1)}} -x_2 p_2^{(1)}(x) ds &= \int_0^1 \left\{ [-(x_{2,k} - x_{2,i})\xi_1 - x_{2,i}] \xi_1 \frac{1}{2} \right\} d\xi_1 \\ &= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{1}{2} \right\} d\xi_1 = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

und somit

$$\underline{f}^{(1)} = \left[ -\frac{1}{24} \quad -\frac{1}{12} \right]^T.$$

Auf analoge Weise erhalten wir

$$\underline{f}^{(2)} = \left[ -\frac{1}{6} \quad -\frac{5}{24} \right]^T, \quad \underline{f}^{(3)} = \left[ \frac{1}{12} \quad \frac{1}{24} \right]^T \quad \text{und} \quad \underline{f}^{(4)} = \left[ \frac{5}{24} \quad \frac{1}{6} \right]^T.$$

Damit ergibt sich der Lastvektor

$$\begin{aligned} &\left[ -\frac{1}{24} \quad -\frac{1}{12} - \frac{1}{6} \quad -\frac{5}{24} + \frac{1}{24} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{5}{24} \right]^T = \\ &\left[ -\frac{1}{24} \quad -\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{5}{24} \right]^T. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen 1. Art arbeiten wir gemäß der ersten Variante (siehe auch Abschnitt 4.4.3) in das FE-Gleichungssystem ein. So erhalten wir schließlich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

In der folgenden Tabelle vergleichen wir die analytische Lösung der Aufgabe (4.16) mit der ermittelten FE-Lösung.

	analytische Lösung	FE-Lösung
$u_1$	0	0
$u_2$	0	$\frac{1}{24}$
$u_3$	0	$\frac{1}{8}$
$u_4$	0	0
$u_5$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{48}$
$u_6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{24}$
$u_7$	0	0.0
$u_8$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$u_9$	1	1

Tabelle 4.7: Vergleich der FE-Lösung mit der analytischen Lösung

Der Vergleich zeigt, daß mit der verwendeten, sehr groben Vernetzung noch keine gute Approximation der analytischen Lösung erreicht wurde. Insbesondere ist der Fehler in der Komponente  $u_3$  noch sehr groß. Eine weitere Verfeinerung der Vernetzung, d.h. eine Halbierung aller Dreiecksseiten, liefert im Knoten  $P_3$  bereits den Näherungswert 0.0407.

#### 4.4.6 Das Programm FEM2D

Mittels des Programms FEM2D können Randwertprobleme 2. Ordnung in ebenen und axialsymmetrischen Gebieten gelöst werden. Es ist möglich, dieses Programm als Demonstrationsprogramm zur Veranschaulichung des Prozesses der Finite-Elemente-Diskretisierung einzusetzen bzw. zur Lösung eigener Aufgabenstellungen zu nutzen. Eine ausführliche Dokumentation des Programms kann der Leser in [65] finden.

Für den Einsatz als Demonstrationsprogramm ist ein Beispiel fest programmiert, d.h. alle notwendigen Eingaben werden vom Programm selbst erzeugt. Im Verlaufe des Demonstrationsprozesses wird die Vernetzung des Gebietes angezeigt, und es können die Ansatzfunktionen über den Dreiecken dargestellt werden. Weiterhin werden die Assemblierung der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors sowie der Einbau der Randbedingungen in das FE-Gleichungssystem grafisch veranschaulicht.

Als Rechenprogramm kann das Programm FEM2D zur Lösung von physikalischen Problemen eingesetzt werden, welche durch die folgende Randwertaufgabe modelliert werden.

Gesucht ist das Feld  $u(x, y)$ , für das

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega$$

gilt und die Randbedingungen

$$u(x, y) = g_1(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Gamma_1$$

$$k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} n_y = g_2(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Gamma_2$$

$$k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} n_y + k_0(x, y)u(x, y) = k_0(x, y)g_3(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Gamma_3$$

erfüllt werden.

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Materialkoeffizienten  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$ ,  $k_0$  sowie die Funktionen  $g_2(x, y)$  und  $g_3(x, y)$  stückweise konstant sind. Die rechte Seite  $f(x, y)$  muß in der Form  $f(x, y) = k_1 + k_2x + k_3y + k_4x^2 + k_5y^2 + k_6xy$  darstellbar sein. Die maximal mögliche Anzahl von Materialbereichen ist 10.

Wir können somit alle die stationären Randwertprobleme lösen, die wir in den Kapiteln 2 und 4 betrachtet haben. Bei der Beschreibung des Randwertproblems haben wir hier nur die Bezeichnungen verwendet, die auch im Demonstrationsprogramm genutzt werden.

Die Demonstration des FE-Prozesses erfolgt an Hand der Lösung eines Wärmeleitproblems in dem im folgenden Bild dargestellten Gebiet.

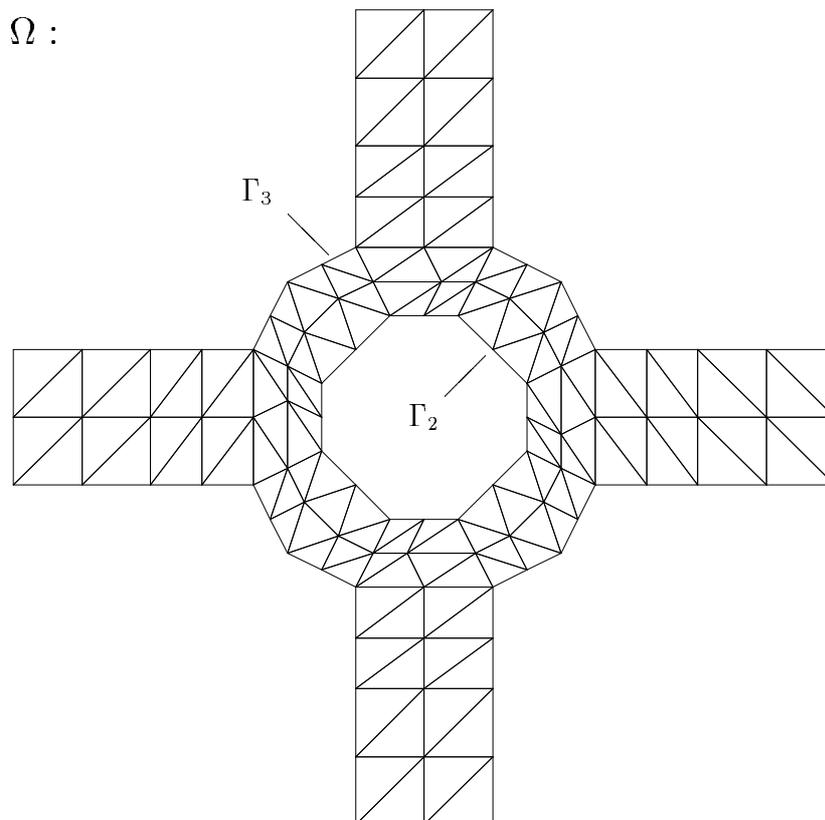


Abbildung 4.28: Darstellung der Vernetzung aus dem Demonstrationsbeispiel

Für die Koeffizienten in der Differentialgleichung und die Randbedingungen gilt

$$k_{xx} = k_{yy} = 200, \quad f = 0, \quad g_2 = 200, \quad k_0 = 50, \quad g_3 = 300 \quad \text{und} \quad \Gamma_1 = \emptyset.$$

Soll das Programm zur Lösung eigener Aufgabenstellungen eingesetzt werden, dann muß zunächst ein die Vernetzung beschreibendes Datenfile erzeugt werden. Dieses File hat die folgende Struktur:

- NN – Anzahl der Knoten, NE – Anzahl der Dreiecke
- Feld der Knotenkoordinaten, d.h. Eingabe der Koordinaten  $(x_i, y_i)$ , für alle  $i = 1, 2, \dots, \text{NN}$  (siehe auch Abschnitt 4.4.1)
- Feld der Zuordnung zwischen der lokalen und der globalen Knotennumerierung, d.h. Eingabe der globalen Nummern der drei Eckknoten jedes Dreiecks sowie einer Materialbereichsnummer. Die Eingabe muß in der Reihenfolge

Nummer des 1. Eckknotens, Nummer des 2. Eckknotens,  
Nummer des 3. Eckknotens, Materialbereichsnummer

für jedes Dreieck erfolgen.

- Eingabe der Randbeschreibung.
  - NB – Anzahl der geschlossenen Ränder (im Beispiel: NB = 2)
  - Anzahl der Knoten auf jedem der NB Teilränder (im Beispiel: Eingabe von 16 und 56, denn 16 Knoten liegen auf dem 1. geschlossenen Rand ( $\Gamma_2$ ) und 56 Knoten liegen auf dem 2. geschlossenen Rand ( $\Gamma_3$ ))
  - Eingabe der Knotennummern der Knoten, die auf dem jeweiligen geschlossenen Randstück liegen, d.h.

Eingabe der Knoten, die auf dem ersten geschlossenen Randstück liegen,  
Eingabe der Knoten, die auf dem zweiten geschlossenen Randstück liegen,

⋮

Eingabe der Knoten, die auf dem NB–ten geschlossenen Randstück liegen.

Dabei ist zu beachten, daß die Eingabe der Knotennummern auf dem jeweiligen Randstück in fortlaufender Reihenfolge entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt.

Im Verlaufe der Abarbeitung des Programms FEM2D werden folgende Eingaben angefordert:

- Titel (Kennwort für die Aufgabe)
- Ebenes (e) oder axialsymmetrisches Problem (a) ?
- 0 : Geschwindigkeitspotential, Temperatur oder Druck als zu bestimmende Größe  
1 : Stromfunktion oder Spannungsfunktion als zu bestimmende Größe
- Eingabe der Vernetzungsdaten über Bildschirm oder File (B/F) ?

- Gibt es Knoten mit Randbedingungen 1. Art (J/N) ?
- Gibt es Randkanten mit Randbedingungen 2. Art (J/N) ?
- Gibt es Randkanten mit Randbedingungen 3. Art (J/N) ?
- Gibt es globale Quellen oder Senken (J/N) ?
- Gibt es Punktquellen oder –senken (J/N) ?
- Anzahl der Materialbereiche
- Eingabe der Materialwerte  $k_{xx}$  und  $k_{yy}$  aus der Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y)$$

- Falls die Vernetzungsdaten in einem File abgespeichert wurden, Eingabe des Namens dieses Files, sonst
  - Soll das Vernetzungsdatenfile unter dem Namen *fem.dat* abgespeichert werden (J/N) ?  
Falls (N), Eingabe eines Filenamens.
  - Anzahl der Knoten, Anzahl der Elemente
  - $x$ - und  $y$ -Koordinaten für alle Knoten
  - Für jedes Dreieck: globale Knotennummern der Eckknoten, Materialbereichsnummer
  - Anzahl der geschlossenen Ränder
  - Anzahl der Knoten auf jedem geschlossenem Rand
  - Eingabe der Nummern der Knoten auf den geschlossenen Rändern (entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn)
- Bei Vorhandensein globaler Quellen oder Senken, die im Programm durch eine Funktion der Gestalt

$$f(x, y) = k_1 + k_2x + k_3y + k_4x^2 + k_5y^2 + k_6xy$$

modelliert werden, Eingabe der Werte für  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  und  $k_6$

- Bei Vorhandensein von Punktquellen oder –senken
  - Anzahl der Punktquellen/–senken
  - Knotennummern und Stärke der Punktquelle/–senke
- Bei Vorhandensein von Knoten mit Randbedingungen 1. Art
  - Anzahl der Knoten mit Randbedingungen 1. Art
  - Penalty-Parameter (Parameter  $\hat{K}$  bei der Einarbeitung der Randbedingungen 1. Art mittels Straftechnik – siehe Abschnitt 4.4.3)
  - Knotennummern, vorgegebener Wert

- Bei Vorhandensein von Randbedingungen 2. Art
  - Wieviele Randkanten mit Randbedingungen 2. Art ?
  - Für jede Randkante Eingabe von Anfangsknoten, Endknoten und  $g_2$  aus der Randbedingung

$$k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} n_y = g_2$$

- Bei Vorhandensein von Randbedingungen 3. Art
  - Wieviele Randkanten mit Randbedingungen 3. Art ?
  - Für jede Randkante Eingabe von Anfangsknoten, Endknoten,  $k_0$  und  $g_3$  aus der Randbedingung

$$k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} n_x + k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} n_y + k_0 u = k_0 g_3$$

- Ausgabe der Ergebnisse über Drucker (J/N) ?
- Speichern der Ergebnisse auf Diskette (J/N) ?  
Falls (J), Eingabe eines Filenamens
- Ausgabe der Eingangsdaten (J/N) ?
- Falls (J), Drucken der Eingangsdaten (J/N) ?

**Bemerkung 4.16** Bei der Anforderung der Eingabe der Randbedingungen 1., 2. bzw. 3. Art wird nach einer Option für die Eingabe gefragt. Es stehen zur Verfügung:

B – Blockeingabe oder E – Einzeleingabe.

Sind die Randbedingungsdaten über mehrere Randkanten gleich, dann ist die Eingabeform „B“ empfehlenswert, da nur der Anfangsknoten der ersten Randkante und der Endknoten der letzten Randkante sowie die entsprechenden Daten eingegeben werden müssen.

## Kapitel 5

# Auflösung von Finite-Elemente-Gleichungssystemen

Als Resultat des Diskretisierungsprozesses haben wir ein lineares Gleichungssystem

$$K\underline{u} = \underline{f} \quad (5.1)$$

mit  $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\underline{f} \in \mathbb{R}^N$  und einer  $(N \times N)$ -Matrix erhalten. Im Unterschied zu den vorangegangenen Kapiteln lassen wir in diesem Kapitel den Index  $h$  zur Kennzeichnung der Abhängigkeit des FE-Gleichungssystems vom jeweiligen Diskretisierungsparameter weg.

Zur Lösung der FE-Gleichungssysteme wollen wir sowohl direkte als auch iterative Verfahren einsetzen. *Direkte Auflösungsverfahren* sind Algorithmen, die den Lösungsvektor  $\underline{u}$  in endlich vielen Schritten liefern. *Iterative Verfahren* bestimmen den Vektor  $\underline{u}$  ausgehend von einer Startnäherung  $\underline{u}^{(0)}$  als Grenzwert einer Folge von Näherungslösungen  $\underline{u}^{(k)}$ .

Im weiteren beschäftigen wir uns nur mit der Lösung von linearen Gleichungssystemen, deren Systemmatrix  $K$  symmetrisch und positiv definit ist. Derartige Gleichungssysteme entstehen bei der in den Kapiteln 3 und 4 beschriebenen FE-Diskretisierung von Randwertproblemen mit symmetrischer und positiver Bilinearform.

*Zur Wiederholung:*

Eine Matrix heißt *symmetrisch*, wenn

$$(K\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{u}, K\underline{v}) \quad \text{für alle } \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^N$$

gilt. Die Matrix  $K$  ist *positiv definit*, wenn

$$(K\underline{u}, \underline{u}) > 0 \quad \text{für alle } \underline{u} \in \mathbb{R}^N, \underline{u} \neq 0$$

erfüllt ist. Dabei wird mit  $(\cdot, \cdot)$  das euklidische Skalarprodukt bezeichnet, d.h.

$$(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^N u_i v_i \quad \text{für alle } \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Die FE-Gleichungssysteme besitzen eine Reihe spezieller Eigenschaften. Die Gleichungssysteme sind großdimensioniert. Ihre Dimension  $N$  wächst mit der Verfeinerung des Diskretisierungsparameters (Schrittweite)  $h$ . Das Wachstum verhält sich wie  $h^{-m}$  bei Aufgaben in  $m$ -dimensionalen Gebieten. Das bedeutet bei 2D-Randwertproblemen ein Anwachsen wie  $h^{-2}$ . Die Systemmatrix  $K$  ist auf Grund der Wahl der Ansatzfunktionen mit lokalem Träger schwach besetzt (siehe auch Abschnitt 4.3.3), d.h. in jeder Matrixzeile sind nur sehr wenige Matrixelemente von Null verschieden. Bei einer geeigneten Knotennumerierung besitzen die FE-Matrizen eine Bandstruktur. Die Bandweite, d.h. der größte Abstand, den ein Nicht-Null-Element einer Zeile vom entsprechenden Hauptdiagonalelement hat, hängt von der Knotennumerierung ab. Dies werden wir im Abschnitt 5.1 demonstrieren. Man kann erreichen, daß die Bandweite in der Größenordnung von  $h^{-(m-1)}$  liegt, d.h. daß sie kleiner oder gleich  $ch^{-(m-1)}$  mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c$  ist.

## 5.1 Direkte Verfahren

Als direktes Auflösungsverfahren ist der Gauß-Algorithmus allgemein bekannt (siehe z.B. [27]). Wir stellen hier das Cholesky-Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen mit einer symmetrischen Systemmatrix vor. Beim Cholesky-Verfahren wird die Matrix  $K$  in das Produkt einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix zerlegt. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten, wir berechnen entweder

$$K = S^T S$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix  $S$  oder

$$K = R R^T$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix  $R$ . Seien

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{NN} \end{pmatrix}$$

und

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix}.$$

Dann ergeben sich die folgenden beiden Zerlegungsverfahren.

*Algorithmus I:*  $K = S^T S$

$$s_{11} = \sqrt{k_{11}}$$

$$s_{1j} = k_{1j}/s_{11} \quad \text{für } j = 2, 3, \dots, N$$

für  $i = 2, 3, \dots, N$

$$s_{ii} = \sqrt{k_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li}^2}$$

$$s_{ij} = \left( k_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{li}s_{lj} \right) / s_{ii} \quad \text{für } j = i+1, i+2, \dots, N$$

*Algorithmus II:*  $K = R R^T$

$$r_{NN} = \sqrt{k_{NN}}$$

$$r_{iN} = k_{iN}/r_{NN} \quad \text{für } i = N-1, N-2, \dots, 1$$

für  $j = N-1, N-2, \dots, 1$

$$r_{jj} = \sqrt{k_{jj} - \sum_{l=j+1}^N r_{jl}^2}$$

$$r_{ij} = \left( k_{ij} - \sum_{l=j+1}^N r_{il}r_{jl} \right) / r_{jj} \quad \text{für } i = j-1, j-2, \dots, 1$$

Die Lösung des Gleichungssystems  $K\underline{u} = \underline{f}$  ist somit der Lösung des Gleichungssystems

$$S^T S \underline{u} = \underline{f} \quad \text{bzw.} \quad R R^T \underline{u} = \underline{f} \quad (5.2)$$

äquivalent. Die Gleichungssysteme (5.2) lösen wir in zwei Etappen durch die Prozesse des Vor- und Rückwärtseinsetzens, d.h. wir lösen zunächst

$$S^T \underline{y} = \underline{f} \quad \text{bzw.} \quad R \underline{y} = \underline{f} \quad (5.3)$$

und dann das System

$$S \underline{u} = \underline{y} \quad \text{bzw.} \quad R^T \underline{u} = \underline{y}. \quad (5.4)$$

Die Gleichungssysteme (5.3) und (5.4) sind Gleichungssysteme, deren Systemmatrix eine Dreiecksgestalt hat. Derartige Gleichungssysteme sind besonders einfach lösbar. Wir demonstrieren dies am Beispiel von  $S^T S \underline{u} = \underline{f}$ .

Vorwärtseinsetzen :  $S^T \underline{y} = \underline{f}$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1N} & s_{2N} & \cdots & s_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

$$y_1 = f_1/s_{11}$$

$$y_i = \left( f_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ji} y_j \right) / s_{ii} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, N$$

Rückwärtseinsetzen :  $S \underline{u} = \underline{y}$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$u_N = y_N/s_{NN}$$

$$u_i = \left( y_i - \sum_{j=i+1}^N s_{ij} u_j \right) / s_{ii} \quad \text{für } i = N-1, N-2, \dots, 1$$

Bei der Lösung des Gleichungssystems  $RR^T \underline{u} = \underline{f}$  verlaufen die Schritte des Rückwärts- und Vorwärtseinsetzens analog.

Wir wollen diese beiden Varianten der Faktorisierung für die schwach besetzten FE-Matrizen analysieren. Bei der Durchführung der Faktorisierung bleiben nämlich gewisse Besetztheitsstrukturen erhalten. Die Kenntnis dieser Tatsache können wir bei der Abspeicherung der Systemmatrix  $K$  ausnutzen. Bei der Faktorisierung  $K = S^T S$  gilt

$$s_{lj} = 0 \quad \text{für alle } l \leq l_0 < j, \text{ falls } k_{lj} = 0 \quad \text{für alle } l \leq l_0 < j, k_{(l_0+1)j} \neq 0,$$

denn

$$s_{1j} = k_{1j}/s_{11} = 0, \quad \text{falls } k_{1j} = 0$$

$$s_{2j} = (k_{2j} - s_{12}s_{1j})/s_{22} = 0, \quad \text{falls } k_{lj} = 0, \quad l = 1, 2$$

$$s_{3j} = (k_{3j} - s_{13}s_{1j} - s_{23}s_{2j})/s_{33} = 0, \quad \text{falls } k_{lj} = 0, \quad l = 1, 2, 3$$

$\vdots$

$$s_{l_0 j} = \left( k_{l_0 j} - \sum_{t=1}^{l_0-1} s_{tl_0} s_{tj} \right) / s_{l_0 l_0} = 0, \quad \text{falls } k_{lj} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, l_0,$$

d.h. wenn in der  $j$ -ten Spalte der Matrix  $K$  alle Elemente  $k_{lj}$  mit  $l \leq l_0 < j$  identisch Null sind, dann bleiben diese Nullen auch in der Matrix  $S$  erhalten. An Positionen, an denen Matrixelemente  $k_{lj}$  mit  $l_0+1 < l < j$  identisch Null sind, entstehen in der Matrix  $S$  im allgemeinen von Null verschiedene Elemente. Das Entstehen dieser Nicht-Null-Elemente wird auch als „fill-in“ bezeichnet. Auf Grund der obigen Tatsache können wir die Matrizen  $K$  und  $S$  auf den gleichen Speicherplätzen folgendermaßen abspeichern.

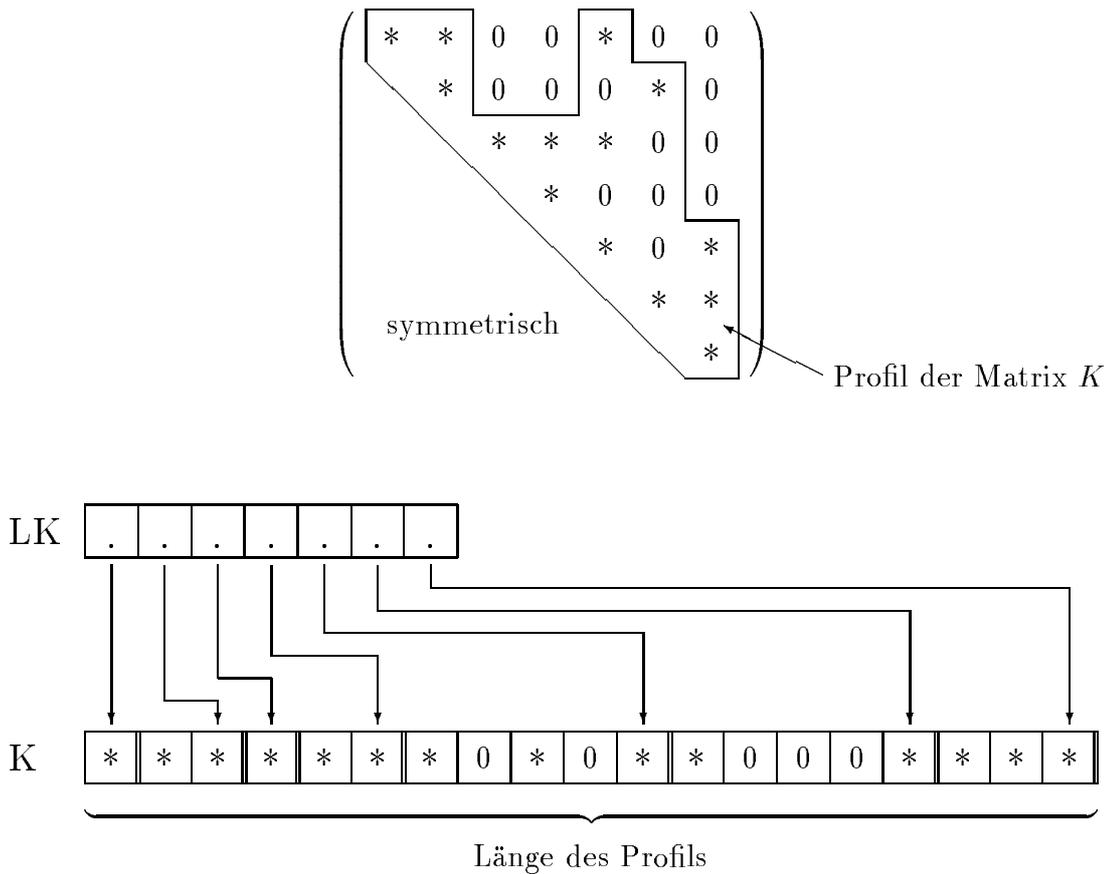


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung der VBS-Speichertechnik

Es wird ein Vektor  $K$  aufgebaut, auf dem nacheinander die Spalten des oberen Dreiecks der Matrix  $K$  stehen jeweils beginnend mit dem ersten Nicht-Null-Element der Spalte. Zusätzlich wird ein Hilfsvektor  $LK$  generiert, dessen Elemente auf die Position der Hauptdiagonalelemente der Matrix im Vektor  $K$  zeigen. Eine derartige Speichertechnik bezeichnen wir als „variable Bandweite spaltenweise (VBS)“.

Bei der Faktorisierung  $K = RR^T$  gilt eine ähnliche Eigenschaft wie bei der Faktorisierung  $K = S^T S$ , nämlich

$$r_{il} = 0 \quad \text{für alle } l \geq l_0 > i, \text{ falls } k_{il} = 0 \quad \text{für alle } l \geq l_0 > i, k_{i(l_0-1)} \neq 0,$$

denn

$$\begin{aligned}
 r_{iN} &= k_{iN}/r_{NN} = 0, && \text{falls } k_{iN} = 0 \\
 r_{i(N-1)} &= (k_{i(N-1)} - r_{iN}r_{(N-1)N})/r_{(N-1)(N-1)} = 0, \\
 &&& \text{falls } k_{il} = 0, \quad l = N, N-1 \\
 r_{i(N-2)} &= (k_{i(N-2)} - r_{i(N-1)}r_{(N-2)(N-1)} - r_{iN}r_{(N-2)N})/r_{(N-2)(N-2)} = 0, \\
 &&& \text{falls } k_{il} = 0, \quad l = N, N-1, N-2 \\
 &\vdots \\
 r_{il_0} &= \left( k_{il_0} - \sum_{t=l_0+1}^N r_{it}r_{l_0t} \right) / r_{l_0l_0} = 0, \\
 &&& \text{falls } k_{il} = 0, \quad l = N, N-1, \dots, N-l_0+1,
 \end{aligned}$$

d.h. wenn in der  $i$ -ten Zeile der Matrix  $K$  alle Elemente  $k_{il}$  mit  $l \geq l_0 > i$  identisch Null sind, dann bleiben diese Nullen auch in der Matrix  $R$  erhalten. An Positionen, an denen Matricelemente  $k_{il}$  mit  $i < l < l_0 - 1$  identisch Null sind, entstehen in der Matrix  $R$  im allgemeinen von Null verschiedene Elemente. Im Fall der Faktorisierung  $RR^T$  können wir somit die Matrizen  $K$  und  $R$  auf den gleichen Speicherplätzen folgendermaßen abspeichern.

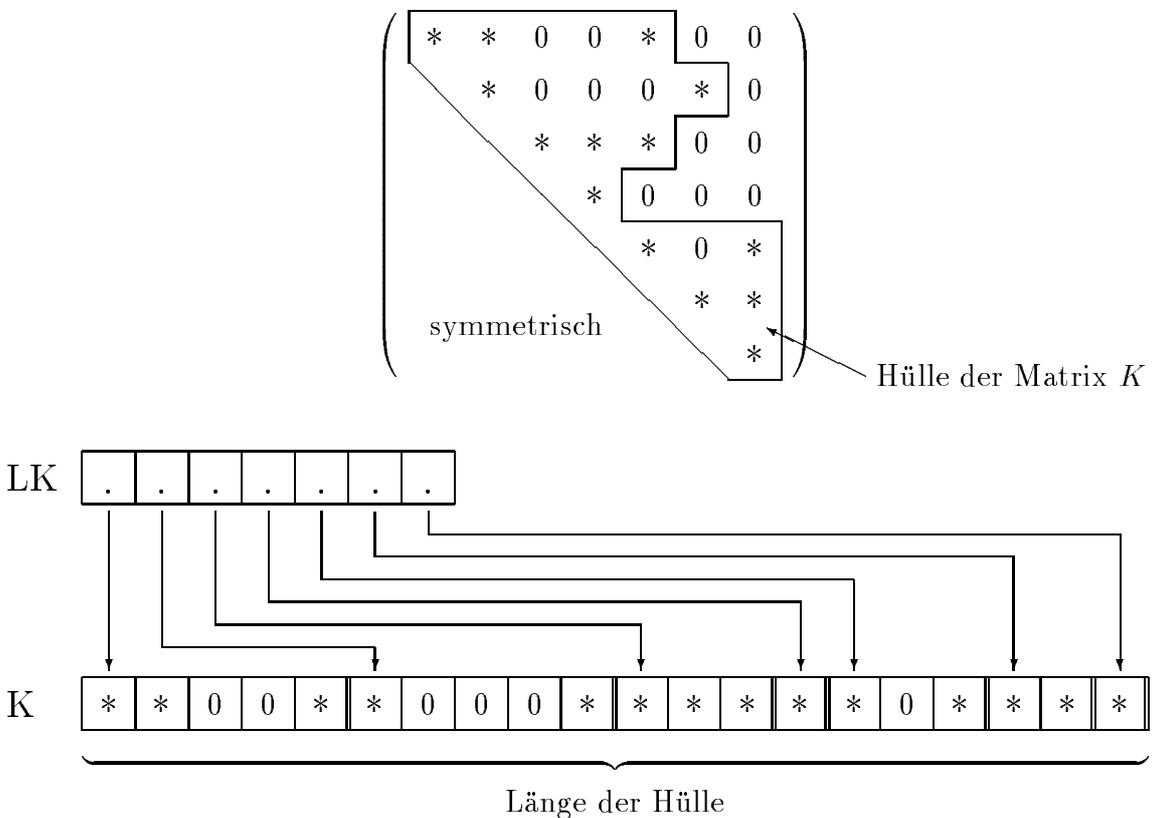


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der VBZ-Speichertechnik

Es werden hintereinander auf einem Vektor  $K$  die Matrixzeilen beginnend mit dem Hauptdiagonalelement bis zum letzten Nicht-Null-Element der jeweiligen Zeile abgespeichert. Gleichzeitig wird ein Hilfsvektor  $LK$  eingeführt, dessen Elemente auf die Position der Hauptdiagonalelemente der Matrix im Vektor  $K$  zeigen. Diese Speicherform wird auch als „variable Bandweite zeilenweise (VBZ)“ bezeichnet.

Der Aufwand an notwendigen arithmetischen Operationen bei der Durchführung des Cholesky-Verfahrens hängt offenbar von der Länge des Profils bzw. der Hülle der Matrix ab. Er verhält sich bei der Faktorisierung wie  $Nb^2$  und beim Vor- bzw. Rückwärtseinsetzen wie  $Nb$  ( $b$  – Bandweite). Da die Cholesky-Faktoren  $S$  bzw.  $R$  auf den Speicherplätzen der Matrix  $K$  abgespeichert werden können, wird Speicherplatz in der Größenordnung von  $Nb$  Speicherplätzen benötigt.

Wir können den Aufwand an arithmetischen Operationen und den Speicherplatzbedarf reduzieren, wenn wir die Bandweite verringern. Die Größe der Bandweite hängt von der Knotennumerierung ab. Betrachten wir zum Beispiel die folgende Vernetzung.

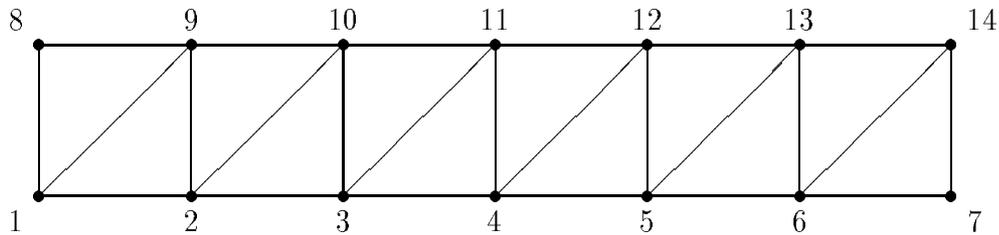


Abbildung 5.3: Eine Vernetzung mit einer ungeeigneten Knotennumerierung

Bei dieser Knotennumerierung hat die FE-Matrix die folgende Besetztheitsstruktur

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

und somit die Bandweite  $b = 8$ . Die Länge des Profils bzw. der Hülle ist 75.

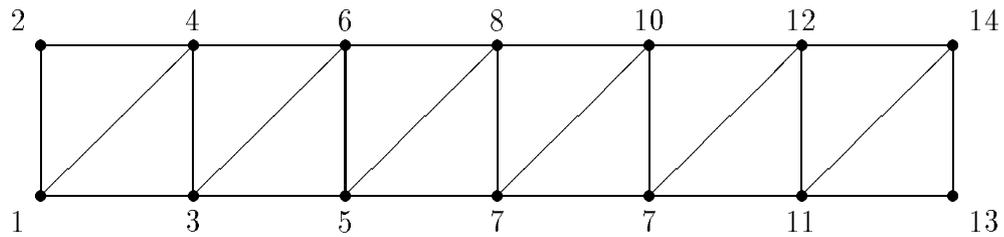


Abbildung 5.4: Eine Vernetzung mit einer geeigneten Knotennumerierung

Bei der in der Abbildung 5.4 angegebenen Knotennumerierung erhalten wir die folgende Besetztheitsstruktur.

$$\begin{pmatrix}
 * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & * & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & * & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *
 \end{pmatrix}$$

Die Bandweite bei dieser Knotennumerierung ist  $b = 3$ . Für die Länge des Profils bzw. der Hülle erhalten wir 45.

Es existieren Algorithmen, die für eine gegebene Vernetzung eine Neunummerierung der Knoten erzeugen, um die Länge des Profils bzw. der Hülle zu reduzieren (z.B. Algorithmus von CUTHILL-MCKEE, Algorithmus von ROSEN [23]). Es kann erreicht werden, daß die Bandweite in der Größenordnung von  $h^{-(m-1)}$  liegt und sich somit der Aufwand an arithmetischen Operationen des Cholesky-Verfahren bei 2D-Problemen wie  $N^2$  verhält.

## 5.2 Iterative Verfahren

Iterationsverfahren erzeugen ausgehend von einer Startnäherung  $\underline{u}^{(0)}$  eine Folge von Näherungslösungen  $\underline{u}^{(k)}$  für die exakte Lösung  $\underline{u}$  des Gleichungssystems  $K\underline{u} = \underline{f}$ . Bei iterativen Verfahren sind die folgenden Fragestellungen zu untersuchen:

- Konvergieren die Näherungslösungen  $\underline{u}^{(k)}$  gegen die Lösung  $\underline{u}$  für  $k \rightarrow \infty$  ?
- Für welches  $k$  haben wir eine hinreichend gute Näherungslösung ?

Zur Beantwortung dieser Fragen analysieren wir das Verhalten des Fehlers

$$\underline{e}^{(k)} = \underline{u} - \underline{u}^{(k)}.$$

Wir messen den Fehler in einer Norm, z.B.

$$\|\underline{e}^{(k)}\|_K^2 = (K\underline{e}^{(k)}, \underline{e}^{(k)}). \quad (5.5)$$

Somit ist zu untersuchen, ob  $\|\underline{e}^{(k)}\|_K \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt, d.h. ob das Iterationsverfahren konvergiert. Im Fall eines konvergenten Verfahrens brechen wir die Iteration zum Beispiel dann ab, wenn

$$\|\underline{e}^{(k)}\|_K \leq \varepsilon \|\underline{e}^{(0)}\|_K \quad (5.6)$$

erfüllt ist mit einer vorgegebenen relativen Genauigkeit  $\varepsilon$ .

Die Güte eines Iterationsverfahrens hängt davon ab, wieviele Iterationen notwendig sind, um eine vorgegebene relative Genauigkeit zu erreichen, und wieviele arithmetische Operationen je Iterationsschritt durchgeführt werden müssen.

Im weiteren stellen wir einige Iterationsverfahren vor.

### 5.2.1 Das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren

Das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren sind zwei besonders einfache Iterationsverfahren. Ihr Nachteil ist die sehr langsame Konvergenz (siehe z.B. [72]).

Beim Jacobi-Verfahren wird die folgende Iterationsvorschrift durchgeführt.

#### *Jacobi-Verfahren*

Ausgehend von einer Startnäherung  $\underline{u}^{(0)}$  werden die Näherungen  $\underline{u}^{(k)} = [u_i^{(k)}]_{i=1}^N$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , wie folgt berechnet:

$$u_i^{(k)} = \left( - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N k_{ij} u_j^{(k-1)} + f_i \right) / k_{ii} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.7)$$

Das Gauß-Seidel-Verfahren läuft wie folgt ab.

#### *Gauß-Seidel-Verfahren*

Gegeben sei eine Startnäherung  $\underline{u}^{(0)}$ . Die neuen Näherungen  $\underline{u}^{(k)} = [u_i^{(k)}]_{i=1}^N$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , werden nach der folgenden Vorschrift berechnet:

$$\begin{aligned} u_1^{(k)} &= \left( - \sum_{j=2}^N k_{1j} u_j^{(k-1)} + f_1 \right) / k_{11} \\ &\vdots \\ u_i^{(k)} &= \left( - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} u_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N k_{ij} u_j^{(k-1)} + f_i \right) / k_{ii} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, N-1 \\ &\vdots \\ u_N^{(k)} &= \left( - \sum_{j=1}^{N-1} k_{Nj} u_j^{(k)} + f_N \right) / k_{NN}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Da die FE-Matrix  $K$  schwach besetzt ist, d.h. da pro Matrixzeile unabhängig von der Feinheit der Diskretisierung nur sehr wenige Elemente von Null verschieden sind, ist der Aufwand an arithmetischen Operationen pro Iterationsschritt bei beiden Verfahren proportional zur Anzahl der Unbekannten  $N$ . Um allerdings eine Näherungslösung  $\underline{u}^{(k)}$  mit einer relativen Genauigkeit  $\varepsilon$  zu erhalten, d.h. eine Näherungslösung, für die

$$\|\underline{u} - \underline{u}^{(k)}\|_K \leq \varepsilon \|\underline{u} - \underline{u}^{(0)}\|_K \quad (5.9)$$

gilt, müssen bei FE-Gleichungssystemen, die aus der Diskretisierung von Randwertproblemen 2. Ordnung resultieren, sehr viele Iterationen durchgeführt werden. Die Anzahl notwendiger Iterationen verhält sich wie  $h^{-2} \ln \varepsilon^{-1}$ , d.h. wie  $N \ln \varepsilon^{-1}$  bei 2D-Problemen. Damit liegt der Gesamtaufwand an arithmetischen Operationen, der notwendig ist, um eine Näherungslösung mit einer vorgegebenen relativen Genauigkeit  $\varepsilon$  zu erhalten, in der Größenordnung von  $h^{-4} \ln \varepsilon^{-1}$ .

Ein wesentlich besser konvergierendes Verfahren ist die Methode der konjugierten Gradienten.

### 5.2.2 Die Methode der konjugierten Gradienten ohne Vorkonditionierung

Das Verfahren der konjugierten Gradienten wurde 1952 von HESTENES und STIEFEL [40] entwickelt. Seit Beginn der 70er Jahre hat das Verfahren mit der Bereitstellung von Vorkonditionierungen [4, 9, 36] enorm an Bedeutung gewonnen.

Der Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist die Tatsache, daß die Lösung des Gleichungssystems  $K\underline{u} = \underline{f}$  der Minimierung eines quadratischen Funktionals äquivalent ist. Man kann den folgenden Satz beweisen (siehe auch [9]).

**Satz 5.1** Der Vektor  $\underline{u}$  ist genau dann Lösung des Gleichungssystems  $K\underline{u} = \underline{f}$ , wenn

$$F(\underline{u}) = \min_{\underline{v} \in \mathbb{R}^N} F(\underline{v}) \quad \text{mit} \quad F(\underline{v}) = \frac{1}{2}(K\underline{v}, \underline{v}) - (\underline{f}, \underline{v}) \quad (5.10)$$

gilt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Matrix  $K$  symmetrisch und positiv definit ist.

Die Grundidee des Verfahrens der konjugierten Gradienten besteht darin, das Minimum des Funktionals (5.10) iterativ zu bestimmen. Dabei wird in jedem Iterationsschritt von der Richtung des Gradienten

$$\underline{r} := \text{grad } F(\underline{v}) = K\underline{v} - \underline{f}$$

Gebrauch gemacht. Der Gradient weist in Richtung der lokal stärksten Zunahme des zu minimierenden Funktionals. Als Relaxationsrichtung  $\underline{s}^{(k)}$ , in welcher das Minimum von  $F(\cdot)$  in jedem Iterationsschritt  $k$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , zu suchen ist, wählen wir eine Linearkombination aus der negativen Gradientenrichtung  $\underline{f} - K\underline{u}^{(k-1)}$  und der vorhergehenden Relaxationsrichtung  $\underline{s}^{(k-1)}$ , so daß  $(K\underline{s}^{(k-1)}, \underline{s}^{(k)}) = 0$  gilt. Im ersten Iterationsschritt wird als Relaxationsrichtung  $-\underline{r}^{(0)}$  genutzt. Wir erhalten den folgenden Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems  $K\underline{u} = \underline{f}$ .

*CG-Verfahren (conjugate gradient method)*

Start: Wahl von  $\underline{u}^{(0)}$

$$\underline{r}^{(0)} = K\underline{u}^{(0)} - \underline{f}$$

$$\underline{s}^{(1)} = -\underline{r}^{(0)}$$

Iteration: ( $k = 1, 2, \dots$ )

$$\left. \begin{aligned} \beta^{(k-1)} &= (\underline{r}^{(k-1)}, \underline{r}^{(k-1)}) / (\underline{r}^{(k-2)}, \underline{r}^{(k-2)}) \\ \underline{s}^{(k)} &= -\underline{r}^{(k-1)} + \beta^{(k-1)} \underline{s}^{(k-1)} \end{aligned} \right\} k \geq 2$$

$$\alpha^{(k)} = (\underline{r}^{(k-1)}, \underline{r}^{(k-1)}) / (K\underline{s}^{(k)}, \underline{s}^{(k)})$$

$$\underline{u}^{(k)} = \underline{u}^{(k-1)} + \alpha^{(k)} \underline{s}^{(k)}$$

$$\underline{r}^{(k)} = \underline{r}^{(k-1)} + \alpha^{(k)} K\underline{s}^{(k)}$$

$$(\underline{r}^{(k)}, \underline{r}^{(k)}) \leq \varepsilon^2 (\underline{r}^{(0)}, \underline{r}^{(0)}) \longrightarrow \text{STOP}$$

( $\varepsilon$  – vorgegebene Abbruchschranke)

Es gilt die folgende Konvergenzaussage (siehe auch [4, 9, 36, 72]).

**Satz 5.2** Es sei  $K$  symmetrisch und positiv definit sowie

$$\gamma_1(\underline{v}, \underline{v}) \leq (K\underline{v}, \underline{v}) \leq \gamma_2(\underline{v}, \underline{v}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in \mathbb{R}^N, \gamma_1 > 0.$$

Dann sind nicht mehr als

$$I(\varepsilon) = \lceil [\ln(\varepsilon^{-1} + (\varepsilon^{-2} + 1)^{0.5}) / \ln \rho^{-1}] \rceil$$

Iterationen notwendig, um den Anfangsfehler  $\|\underline{u} - \underline{u}^{(0)}\|_K$  auf das  $\varepsilon$ -fache zu reduzieren ( $0 < \varepsilon < 1$ ). Außerdem gilt

$$\|\underline{u} - \underline{u}^{(k)}\|_K \leq \eta^{(k)} \|\underline{u} - \underline{u}^{(0)}\|_K$$

mit

$$\eta^{(k)} = 2\rho^k / (1 + \rho^{2k}), \quad \rho = (1 - \sqrt{\xi}) / (1 + \sqrt{\xi}), \quad \xi = \gamma_1 / \gamma_2.$$

Es bezeichnet  $\lceil x \rceil$  die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich  $x$  ist. Die energetische Norm  $\|\underline{v}\|_K$  ist durch  $\|\underline{v}\|_K = \sqrt{(K\underline{v}, \underline{v})}$  definiert.

Führen wir die Konditionszahl  $\kappa(K) = \gamma_2 / \gamma_1$  ein, dann gilt

$$\rho = (\sqrt{\kappa(K)} - 1) / (\sqrt{\kappa(K)} + 1).$$

Bei FE-Matrizen, die aus der Diskretisierung von Randwertproblemen 2. Ordnung resultieren, verhält sich die Konditionszahl  $\kappa(K)$  wie  $h^{-2}$ . Folglich wächst beim CG-Verfahren die Iterationszahl, die notwendig ist, um das Gleichungssystem mit einer vorgegebenen relativen Genauigkeit  $\varepsilon$  zu lösen, wie  $h^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$ . Da pro Iterationsschritt

eine Matrix \* Vektor-Multiplikation, drei Vektoradditionen und zwei Skalarprodukte zu berechnen sind, ist der Aufwand an arithmetischen Operationen pro Iterationsschritt proportional zur Anzahl der Unbekannten  $N$ . Damit verhält sich der Gesamtaufwand bei 2D-Problemen wie  $h^{-3} \ln \varepsilon^{-1} (N^{1.5} \ln \varepsilon^{-1})$ .

Eine schnellere Konvergenz würde man erhalten, wenn die Konditionszahl  $\kappa(K)$  schwächer von  $h$  abhängen würde. Zur Verbesserung der Kondition betrachten wir im nächsten Abschnitt die Methode der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung.

### 5.2.3 Die Methode der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung

Wir betrachten anstelle des zu lösenden Gleichungssystems  $K\underline{u} = \underline{f}$  das äquivalente Gleichungssystem

$$\tilde{K}\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{f}} \quad (5.11)$$

mit  $\tilde{K} = L^{-1}KL^{-T}$ ,  $\tilde{\underline{u}} = L^T\underline{u}$  und  $\tilde{\underline{f}} = L^{-1}\underline{f}$ , wobei  $C = LL^T$  eine symmetrische, positiv definite Matrix ist. Dabei wird die *Vorkonditionierungsmatrix*  $C$  so gewählt, daß  $\kappa(\tilde{K}) \ll \kappa(K)$  gilt. Das Gleichungssystem (5.11) lösen wir mittels des im Abschnitt 5.2.2 beschriebenen CG-Verfahrens. Wir formulieren die Teilschritte aber so um, daß mit der Matrix  $K$  und der rechten Seite  $\underline{f}$  gerechnet werden kann. Damit ergibt sich der folgende Algorithmus der Methode der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung.

*PCCG-Verfahren (preconditioned conjugate gradient method)*

Start: Wahl von  $\underline{u}^{(0)}$

$$\begin{aligned} \underline{r}^{(0)} &= K\underline{u}^{(0)} - \underline{f} \\ C\underline{w}^{(0)} &= \underline{r}^{(0)} \\ \underline{d}^{(1)} &= -\underline{w}^{(0)} \end{aligned}$$

Iteration: ( $k = 1, 2, \dots$ )

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\beta}^{(k-1)} &= (\underline{w}^{(k-1)}, \underline{r}^{(k-1)}) / (\underline{w}^{(k-2)}, \underline{r}^{(k-2)}) \\ \underline{d}^{(k)} &= -\underline{w}^{(k-1)} + \tilde{\beta}^{(k-1)} \underline{d}^{(k-1)} \\ \tilde{\alpha}^{(k)} &= (\underline{w}^{(k-1)}, \underline{r}^{(k-1)}) / (K\underline{d}^{(k)}, \underline{d}^{(k)}) \\ \underline{u}^{(k)} &= \underline{u}^{(k-1)} + \tilde{\alpha}^{(k)} \underline{d}^{(k)} \\ \underline{r}^{(k)} &= \underline{r}^{(k-1)} + \tilde{\alpha}^{(k)} K\underline{d}^{(k)} \\ C\underline{w}^{(k)} &= \underline{r}^{(k)} \end{aligned} \right\} k \geq 2$$

$$(\underline{w}^{(k)}, \underline{r}^{(k)}) \leq \varepsilon^2 (\underline{w}^{(0)}, \underline{r}^{(0)}) \longrightarrow \text{STOP}$$

( $\varepsilon$  – vorgegebene Abbruchschranke)

Es gilt der folgende Konvergenzsatz (siehe auch [4, 9, 36, 72]).

**Satz 5.3** Es seien  $K$  sowie  $C$  symmetrisch und positiv definit. Weiterhin gelte

$$\tilde{\gamma}_1(C\underline{v}, \underline{v}) \leq (K\underline{v}, \underline{v}) \leq \tilde{\gamma}_2(C\underline{v}, \underline{v}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in \mathbb{R}^N, \tilde{\gamma}_1 > 0.$$

Dann sind nicht mehr als

$$I(\varepsilon) = \lceil \lceil \ln(\varepsilon^{-1} + (\varepsilon^{-2} + 1)^{0.5}) / \ln \tilde{\rho}^{-1} \rceil \rceil$$

Iterationen notwendig, um den Anfangsfehler  $\|\underline{u} - \underline{u}^{(0)}\|_K$  auf das  $\varepsilon$ -fache zu reduzieren ( $0 < \varepsilon < 1$ ). Außerdem gilt

$$\|\underline{u} - \underline{u}^{(k)}\|_K \leq \tilde{\eta}^{(k)} \|\underline{u} - \underline{u}^{(0)}\|_K$$

mit

$$\tilde{\eta}^{(k)} = 2\tilde{\rho}^k / (1 + \tilde{\rho}^{2k}), \quad \tilde{\rho} = (1 - \sqrt{\tilde{\xi}}) / (1 + \sqrt{\tilde{\xi}}), \quad \tilde{\xi} = \tilde{\gamma}_1 / \tilde{\gamma}_2.$$

Für eine schnelle Konvergenz des Verfahren muß offenbar  $\tilde{\xi} = \tilde{\gamma}_1 / \tilde{\gamma}_2 = \kappa(\tilde{K})^{-1}$  nahe bei 1 liegen. Um dies zu erreichen, wäre  $C = K$  die günstigste Wahl, denn dann wäre  $\tilde{\xi} = 1$ . Somit hätten wir aber im PCCG-Algorithmus das Gleichungssystem  $K\underline{w}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$  zu lösen, d.h. wiederum ein Gleichungssystem mit der Systemmatrix  $K$ . Wir müssen also Matrizen  $C$  finden, so daß  $\tilde{\xi} = \tilde{\gamma}_1 / \tilde{\gamma}_2$  nahe bei 1 liegt, und daß die Gleichungssysteme  $C\underline{w}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$  sehr leicht lösbar sind, möglichst mit einem Aufwand an arithmetischen Operationen, der proportional zur Anzahl der Unbekannten  $N$  ist. Im weiteren stellen wir einige Möglichkeiten zur Wahl der Vorkonditionierungsmatrix  $C$  vor.

(a) *Vorkonditionierung mit der Hauptdiagonale der Systemmatrix*

Als Vorkonditionierungsmatrix  $C$  wählen wir die Diagonale  $\text{diag}(K)$  der Systemmatrix  $K$ . Die Konditionszahl  $\kappa((\text{diag}(K))^{-0.5} K (\text{diag}(K))^{-0.5})$  wächst genauso wie die Konditionszahl  $\kappa(K)$ , d.h. sie wächst auch wie  $h^{-2}$ . Dies hat zur Folge, daß sich auch beim PCCG-Verfahren mit der Diagonalvorkonditionierung die Anzahl der notwendigen Iterationen wie  $h^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$  verhält. Bei Gleichungssystemen, die aus FE-Diskretisierungen von Randwertproblemen mit stark veränderlichen Koeffizienten resultieren, führt diese Vorkonditionierung aber zu einer Reduzierung der Iterationszahl im Vergleich zum CG-Verfahren ohne Vorkonditionierung (siehe auch Abschnitt 5.3). Ein Beispiel für ein Randwertproblem mit stark veränderlichen Koeffizienten ist beispielsweise das im Abschnitt 4.1 vorgestellte Wärmeleitproblem, bei dem die Wärmeleitfähigkeiten zwischen 1 und 371 variieren.

(b) *IC-Vorkonditionierung (incomplete Cholesky factorization)*

Wir berechnen  $C = RR^T$  mit einer oberen Dreiecksmatrix  $R$ , wobei  $R$  genau dort Nicht-Null-Elemente hat, wo auch das obere Dreieck der Matrix  $K$  besetzt ist. Die Matrixelemente von  $R$  werden in Analogie zum Cholesky-Verfahren nach folgender Vorschrift berechnet (siehe auch [31, 32, 69]).

$$\begin{aligned}
r_{NN} &= \sqrt{k_{NN}} \\
r_{iN} &= k_{iN}/r_{NN} \quad \text{für } i = N-1, N-2, \dots, 1 \\
&\text{für } j = N-1, N-2, \dots, 1 \\
r_{jj} &= \sqrt{k_{jj} - \sum_{l=j+1}^N r_{jl}^2} \\
r_{ij} &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k_{ij} = 0 \\ \left(k_{ij} - \sum_{l=j+1}^N r_{il}r_{jl}\right) / r_{jj} & \text{falls } k_{ij} \neq 0 \end{cases} \\
&\text{für } i = j-1, j-2, \dots, 1,
\end{aligned}$$

d.h. die Cholesky-Zerlegung wird nur auf den Nicht-Null-Elementen der Matrix  $K$  durchgeführt. Die Konvergenzaussagen für den PCCG-Algorithmus mit IC-Vorkonditionierung bleiben dieselben wie beim Algorithmus ohne Vorkonditionierung, d.h.  $\kappa(R^{-1}KR^{-T})$  und  $\kappa(K)$  wachsen beide wie  $h^{-2}$  und damit die Iterationszahl wie  $h^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$ . Es ist allerdings zu beobachten, daß bei Anwendung dieser Vorkonditionierung die zum Erreichen einer vorgegebenen relativen Genauigkeit notwendige Anzahl an Iterationen meist wesentlich niedriger ist als beim CG-Verfahren (siehe auch 5.3).

(c) *MIC-Vorkonditionierung (modified incomplete Cholesky factorization)*

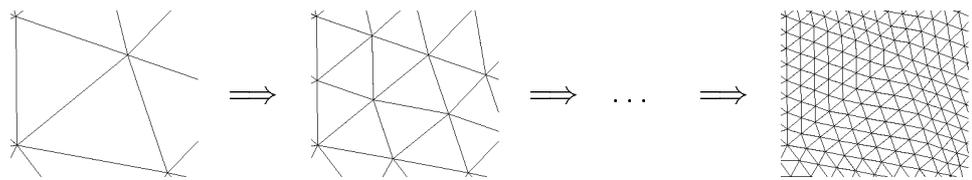
Wir wählen die Vorkonditionierungsmatrix  $C$  in der Form  $C = S^T S$  mit einer oberen Dreiecksmatrix  $S$ . Die Elemente der Matrix  $S$  werden nach folgender Vorschrift berechnet (siehe auch [32, 69]).

$$\begin{aligned}
1. \quad s_{ij} &= k_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = i, i+1, \dots, N \\
2. \quad &\text{für } i = 1, 2, \dots, N-1 \\
& \quad s_{ii} = \sqrt{s_{ii}} \\
& \quad \text{für } j = i+1, i+2, \dots, N \\
& \quad \quad s_{ij} = s_{ij}/s_{ii} \\
& \quad \quad s_{jj} = s_{jj} - s_{ij}^2 \\
& \quad \quad \text{für } l = i+1, i+2, \dots, j-1 \\
& \quad \quad \quad \text{für } m = l+1, l+2, \dots, N \\
& \quad \quad \quad \quad t = s_{il}s_{im} \\
& \quad \quad \quad \quad \text{falls } s_{lm} \neq 0 : s_{lm} = s_{lm} - t \\
& \quad \quad \quad \quad \text{falls } s_{lm} = 0 : s_{ll} = s_{ll} - t \quad \text{und} \quad s_{mm} = s_{mm} - t \\
3. \quad s_{NN} &= \sqrt{s_{NN}}
\end{aligned}$$

Der Algorithmus der MIC-Zerlegung unterscheidet sich von dem der IC-Zerlegung im wesentlichen darin, daß die Hauptdiagonalelemente modifiziert werden, falls  $s_{lm} = 0$  und  $s_{il}s_{im} \neq 0$  für wenigstens ein  $i < l \leq m$  gilt. Falls die Matrix  $K$  die Steifigkeitsmatrix aus der FE-Diskretisierung eines elliptischen Randwertproblems 2. Ordnung ist, dann verhält sich  $\sqrt{\kappa(\tilde{K})}$  wie  $h^{-0.5}$  im Unterschied zu  $h^{-1}$  für  $\sqrt{\kappa(K)}$ . Folglich wächst beim PCCG-Verfahren mit der MIC-Vorkonditionierung die Iterationszahl bei einem vorgegebenen  $\varepsilon$  wie  $h^{-0.5} \ln \varepsilon^{-1}$ . Damit liegt der Gesamtaufwand an arithmetischen Operationen bei 2D-Problemen in der Größenordnung von  $h^{-2.5} \ln \varepsilon^{-1}$  ( $N^{1.25} \ln \varepsilon^{-1}$ ).

#### 5.2.4 Mehrgitterverfahren

Die Voraussetzung für den Einsatz von Mehrgitterverfahren ist das Vorhandensein einer Folge von FE-Diskretisierungen, d.h. es muß eine Folge von Vernetzungen, wie sie z.B. in folgendem Bild dargestellt ist, generiert werden (siehe auch [33, 42, 78]).



Vernetzung	$\mathcal{T}_{h_1}$		$\mathcal{T}_{h_2}$		...		$\mathcal{T}_{h_l}$
Schrittweite	$h_1$	>	$h_2$	>	...	>	$h_l$
Knotenanzahl	$\bar{N}_1$	<	$\bar{N}_2$	<	...	<	$\bar{N}_l$

Abbildung 5.5: Beispiel einer Vernetzungsfolge

Zu jeder Vernetzung  $\mathcal{T}_{h_q}$ ,  $q = 1, 2, \dots, l$ , wird der zugehörige Raum  $V_{h_q} \subset V$  der stückweise linearen Ansatzfunktionen definiert (siehe auch Abschnitt 4.4.2), und es müssen die Steifigkeitsmatrizen  $K_{h_q}$  für  $q = 1, 2, \dots, l$  sowie die rechte Seite  $\underline{f}_{h_l}$  generiert werden.

Im weiteren verwenden wir anstelle der Indizes „ $h_q$ “ stets nur die Indizes „ $q$ “,  $q = 1, 2, \dots, l$ .

Ausgehend vom folgenden Zweigitter-Algorithmus ( $(l, l-1)$ -Zweigitter-Algorithmus) wird ein Mehrgitteralgorithmus rekursiv definiert. Ein Iterationsschritt des  $(l, l-1)$ -Zweigitter-Algorithmus läuft nach folgendem Schema ab:

*Ein Iterationsschritt des  $(l, l-1)$ -Zweigitter-Algorithmus*

Gegeben sei eine Startnäherung  $\underline{u}_l^{(k,0)}$ .

1. *Vorglättung*

Führe  $\nu_1$  Iterationsschritte zur näherungsweisen Lösung des Gleichungssystems  $K_l \underline{u}_l = \underline{f}_l$  durch, wobei mit  $\underline{u}_l^{(k,0)}$  gestartet wird. Wähle als Iterationsverfahren z.B. das Gauß-Seidel-Verfahren. Die neue Näherung ist  $\underline{u}_l^{(k,1)}$ .

2. *Grobitterkorrektur*

(a) Berechne den Defekt

$$\underline{d}_l^{(k)} = \underline{f}_l - K_l \underline{u}_l^{(k,1)}$$

und schränke ihn auf das Netz  $\mathcal{T}_{l-1}$  ein, d.h. berechne

$$\underline{d}_{l-1}^{(k)} = I_{l-1}^l \underline{d}_l^{(k)}.$$

(b) Löse das Grobgittergleichungssystem

$$K_{l-1} \underline{w}_{l-1}^{(k)} = \underline{d}_{l-1}^{(k)}.$$

(c) Interpoliere die Lösung  $\underline{w}_{l-1}^{(k)}$  auf das Netz  $\mathcal{T}_l$ , d.h. berechne

$$\underline{w}_l^{(k)} = I_{l-1}^l \underline{w}_{l-1}^{(k)}$$

und berechne die korrigierte Näherung

$$\underline{u}_l^{(k,2)} = \underline{u}_l^{(k,1)} + \underline{w}_l^{(k)}.$$

3. *Nachglättung*

Führe  $\nu_2$  Iterationsschritte zur näherungsweisen Lösung des Gleichungssystems  $K_l \underline{u}_l = \underline{f}_l$  durch, wobei mit  $\underline{u}_l^{(k,2)}$  gestartet wird. Verwende dazu ein „einfaches“ Iterationsverfahren, z.B. das Gauß-Seidel-Verfahren. Die neue Näherung ist  $\underline{u}_l^{(k,3)}$ .

Setze  $\underline{u}_l^{(k+1,0)} = \underline{u}_l^{(k,3)}$ .

Um eine gute Konvergenz des Zweigitter- und Mehrgitteralgorithmus zu erreichen, genügt es im allgemeinen, ein oder zwei Vor- bzw. Nachglättungsschritte durchzuführen, d.h.  $\nu_1 = \nu_2 = 1$  oder 2.

Zur Interpolation der Korrektur nutzen wir die lineare Interpolation. Wir berechnen  $\underline{w}_l^{(k)} = I_{l-1}^l \underline{w}_{l-1}^{(k)}$ , wobei  $I_{l-1}^l$  eine  $(\bar{N}_l \times \bar{N}_{l-1})$ -Matrix ist, deren Elemente wie folgt definiert sind:

$$(I_{l-1}^l)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \text{ falls der Knoten } P_i \text{ sowohl zur Vernetzung } \mathcal{T}_l \\ & \text{als auch zur Vernetzung } \mathcal{T}_{l-1} \text{ gehört, } i, j = 1, 2, \dots, \bar{N}_{l-1}, \\ 1/2 & \text{für } j = i_1 \text{ und } j = i_2, \bar{N}_{l-1} < i \leq \bar{N}_l, \text{ wobei die Knoten} \\ & P_{i_1} \text{ und } P_{i_2} \text{ die Begrenzungsknoten jener Dreiecksseite sind,} \\ & \text{auf welcher der Knoten } P_i \text{ definiert wurde} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

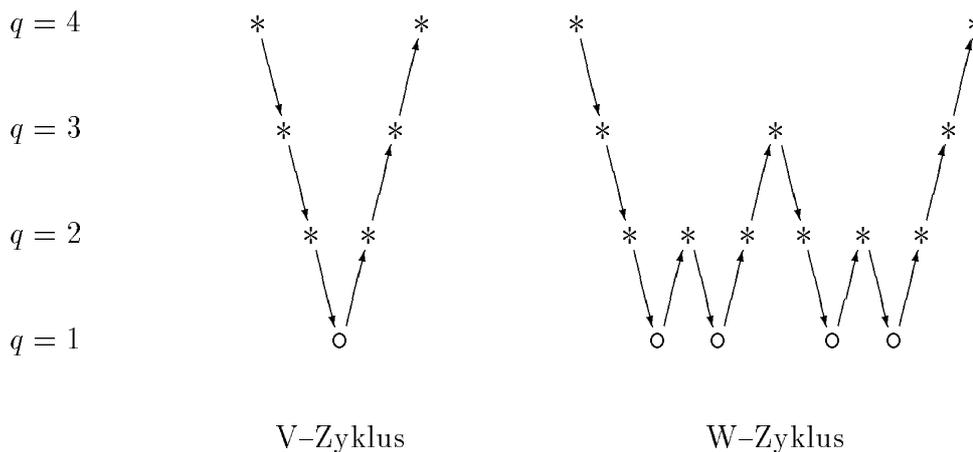
Die Einschränkung (Restriktion) im Schritt 2(a) wird nach der Beziehung

$$\underline{d}_{l-1}^{(k)} = I_l^{l-1} \underline{d}_l^{(k)} \quad \text{mit} \quad I_l^{l-1} = (I_{l-1}^l)^T$$

durchgeführt.

Das Grobgittergleichungssystem im Schritt 2(b) hat dieselbe Struktur wie das Ausgangsgleichungssystem  $K_l \underline{u}_l = \underline{f}_l$ . Da das Grobgittergleichungssystem i.a. auch noch großdimensioniert ist, lösen wir es näherungsweise mittels  $\mu$  Iterationsschritten eines  $(l-1, l-2)$ -Zweigitter-Algorithmus, der analog zum  $(l, l-1)$ -Zweigitter-Algorithmus definiert ist. Die Iteration starten wir mit dem Nullvektor. Wir setzen diese Idee solange rekursiv fort, bis im Schritt 2(b) das Gleichungssystem  $K_1 \underline{u}_1^{(k)} = \underline{d}_1^{(k)}$  steht, welches wir beispielsweise mit einem direkten Verfahren lösen können. Der so entstehende Algorithmus wird als Mehrgitteralgorithmus ( $l$ -Gitter-Algorithmus) bezeichnet. Für  $\mu = 1$  bezeichnen wir einen Iterationsschritt des Mehrgitteralgorithmus als V-Zyklus und für  $\mu = 2$  als W-Zyklus. Wir verdeutlichen uns einen Iterationsschritt eines Mehrgitteralgorithmus an Hand eines Schemas.

Seien mit  $*$  die Durchführung der Glättung,  $\circ$  die Lösung des Gleichungssystems auf dem größten Gitter,  $\searrow$  die Restriktion und  $\nearrow$  die Interpolation bezeichnet, dann erhalten wir für ein 4-Gitter-Verfahren folgende Schemata.



Man kann zeigen, daß bei einer geeigneten Wahl der Vor- und Nachglättungsiteration

$$\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^{(k+1,0)}\|_{K_l} \leq \eta \|\underline{u}_l - \underline{u}_l^{(k,0)}\|_{K_l}$$

gilt, wobei  $\eta$  unabhängig vom Diskretisierungsparameter ist. Bei vielen Anwendungen ist  $\eta$  kleiner 0.2. Folglich verhält sich die Iterationszahl, die zum Erreichen einer

vorgegebenen relativen Genauigkeit  $\varepsilon$  notwendig ist, wie  $\ln \varepsilon^{-1}$ , unabhängig von der Feinheit der Diskretisierung. Gilt  $\bar{N}_q \approx \tau \bar{N}_{q-1}$ ,  $q = 2, 3, \dots, l$ , und  $\mu < \tau$ , dann ist der Aufwand an arithmetischen Operationen pro Iterationsschritt des Mehrgitteralgorithmus proportional zur Anzahl der Unbekannten  $\bar{N}_l$ . Damit verhält sich der Gesamtaufwand an arithmetischen Operationen wie  $\bar{N}_l \ln \varepsilon^{-1}$  (siehe auch [33, 42, 78]).

**Bemerkung 5.1** Die Mehrgitterverfahren können auch zur Konstruktion von Vorkonditionierungen für den PCCG-Algorithmus eingesetzt werden. Beispielsweise kann man a-priori als Vorkonditionierungsmatrix die Matrix  $K_l$  wählen und dann die Vorkonditionierungsgleichungssysteme  $K_l \underline{w}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$  im PCCG-Algorithmus näherungsweise mittels  $m$  Iterationsschritten eines Mehrgitteralgorithmus lösen. Dadurch wird implizit eine Vorkonditionierungsmatrix  $C$  definiert, für die bei geeigneter Wahl der Glättungsverfahren, der Interpolation und der Restriktion die Beziehung

$$(1 - \eta^m)(C\underline{v}, \underline{v}) \leq (K_l \underline{v}, \underline{v}) \leq (C\underline{v}, \underline{v}) \quad \text{für alle } \underline{v} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_l}$$

gilt. Für die Konstanten  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\gamma}_2$  im Konvergenzsatz 5.3 für den PCCG-Algorithmus erhalten wir somit  $\tilde{\gamma}_1 = (1 - \eta^m)$  und  $\tilde{\gamma}_2 = 1$ , wobei  $\eta$  die Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens ist (siehe [43]). Da diese nicht vom Diskretisierungsparameter  $h$  abhängt, verhält sich die Anzahl der Iterationen, die zum Erreichen einer vorgegebenen relativen Genauigkeit  $\varepsilon$  notwendig ist, wie  $\ln \varepsilon^{-1}$ . Der Gesamtaufwand an arithmetischen Operationen wächst also wie  $\bar{N}_l \ln \varepsilon^{-1}$ . Ein derartiges PCCG-Verfahren wird als MG(m)-PCCG-Verfahren bezeichnet. Ob das MG(m)-PCCG-Verfahren oder das Mehrgitterverfahren effektiver hinsichtlich der benötigten CPU-Zeit ist, hängt von der Konvergenzrate  $\eta$  ab.

**Bemerkung 5.2** Eine weitere Möglichkeit, eine Folge von Diskretisierungen in den Lösungsprozeß einzubeziehen, sind Algorithmen mit hierarchischen Basen. Wir definieren eine Folge von FE-Räumen stückweise linearer Ansatzfunktionen auf die folgende Weise:

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \hat{V}_{h_1} = \left\{ v_1(x) = \sum_{i \in \bar{\omega}_1} v_{1,i} p_{1,i}(x) \right\} \\ \hat{V}_q &= \hat{V}_{h_q} = \hat{V}_{q-1} + T_q \\ T_q &= T_{h_q} = \left\{ v_q(x) = \sum_{i \in \bar{\omega}_q \setminus \bar{\omega}_{q-1}} v_{q,i} p_{q,i}(x) \right\} \quad q = 2, 3, \dots, l, \end{aligned}$$

wobei die Ansatzfunktionen  $p_{q,i}(x)$  auf der Vernetzung  $\mathcal{T}_q$  so definiert sind, wie es im Abschnitt 4.4.2 beschrieben wurde. Die Mengen  $\bar{\omega}_q$  beinhalten die Knotennummern der Knoten des Netzes  $\mathcal{T}_q$ . Man nennt die Basis

$$p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,\bar{N}_1}, p_{2,\bar{N}_1+1}, \dots, p_{2,\bar{N}_2}, \dots, p_{q-1,\bar{N}_{q-1}}, p_{q,\bar{N}_{q-1}+1}, \dots, p_{q,\bar{N}_q}$$

des Raumes  $\hat{V}_q$  eine *h-hierarchische Basis*. Wird diese Basis zum Aufbau des FE-Gleichungssystems genutzt, dann erhält man das Gleichungssystem

$$\hat{K}_l \hat{\underline{u}}_l = \hat{\underline{f}}_l.$$

Zwischen der Matrix  $\hat{K}_l$  in der hierarchischen Basis und der Matrix  $K_l$  in der Knotenbasis sowie zwischen  $\hat{f}_l$  und  $f_l$  besteht der folgende Zusammenhang:

$$\hat{K}_l = Q_l^T K_l Q_l \quad \text{und} \quad \hat{f}_l = Q_l^T f_l$$

mit  $Q_l = \tilde{Q}_l \tilde{Q}_{l-1} \cdot \dots \cdot \tilde{Q}_2$ ,

$$(\tilde{Q}_q)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, \bar{N}_l \\ 1/2 & \text{für } j = i_1 \text{ und } j = i_2, \bar{N}_{q-1} < i \leq \bar{N}_q, \text{ wobei die Knoten} \\ & P_{i_1} \text{ und } P_{i_2} \text{ die Begrenzungsknoten jener Dreiecksseite sind,} \\ & \text{auf welcher der Knoten } P_i \text{ definiert wurde} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

H. YSERENTANT [87] hat bewiesen, daß bei 2D-Problemen für alle  $\hat{u}_l \in \mathbb{R}^{\bar{N}_l}$

$$\underline{c} (l+1)^{-2} (\hat{C}_l \hat{u}_l, \hat{u}_l) \leq (\hat{K}_l \hat{u}_l, \hat{u}_l) \leq \bar{c} (\hat{C}_l \hat{u}_l, \hat{u}_l)$$

mit

$$\hat{C}_l = \begin{pmatrix} K_l & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

gilt, wobei  $\underline{c}$  und  $\bar{c}$  vom Diskretisierungsparameter unabhängige, positive Konstanten sind. Diese Ungleichung impliziert, daß sich die Iterationszahl, die notwendig ist, um das Gleichungssystem  $\hat{K}_l \hat{u}_l = \hat{f}_l$  mit einer vorgegebenen relativen Genauigkeit  $\varepsilon$  mittels des PCCG-Verfahrens mit der Vorkonditionierung  $\hat{C}_l$  zu lösen, wie  $\ln h_l^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$  verhält. Die Durchführung dieses PCCG-Verfahrens ist mit folgenden Problemen verbunden:

- Die hierarchische Steifigkeitsmatrix  $\hat{K}_l$  hat wesentlich mehr Nicht-Null-Elemente als die Steifigkeitsmatrix  $K_l$  in der Knotenbasis.
- Die hierarchische Steifigkeitsmatrix  $\hat{K}_l$  kann nicht so einfach elementweise generiert werden wie die Matrix  $K_l$ .
- Die Komponenten  $\hat{u}_{l,i}$  des Lösungsvektors in der hierarchischen Basis fallen für  $i = \bar{N}_l + 1, \bar{N}_l + 2, \dots, \bar{N}_l$  nicht mit den Werten der entsprechenden FE-Funktion  $u_l \in \hat{V}_l$  im Punkt  $P_i$  zusammen.

Um diese Probleme zu überwinden, kann man den PCCG-Algorithmus auf das Gleichungssystem  $K_l \underline{u}_l = \underline{f}_l$  anwenden und den Übergang von der Knoten- zur hierarchischen Basis durch die Vorkonditionierung  $C = Q_l^{-T} \hat{C}_l Q_l^{-1}$  realisieren. Den so entstehenden PCCG-Algorithmus bezeichnen wir als HB-PCCG-Algorithmus. Die Iterationszahl, die notwendig ist, um das Gleichungssystem  $K_l \underline{u}_l = \underline{f}_l$  mit einer vorgegebenen relativen Genauigkeit  $\varepsilon$  zu lösen, verhält sich bei 2D-Problemen wie  $\ln h_l^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$  und der dafür notwendige Aufwand an arithmetischen Operationen wie  $h_l^{-2} \ln h_l^{-1} \ln \varepsilon^{-1} (\bar{N}_l \ln \bar{N}_l^{0.5} \ln \varepsilon^{-1})$ .

### 5.2.5 Schlußbemerkungen

Wie wir bei allen vorgestellten Iterationsverfahren gesehen haben, wird die Systemmatrix im wesentlichen zur Matrix \* Vektor-Multiplikation benötigt. Deshalb ist es ausreichend, nur die Nicht-Null-Elemente (NNE) abzuspeichern. Auf Grund der vorausgesetzten Symmetrie der Systemmatrix  $K$  wird nur das obere Dreieck der Matrix gespeichert. Dabei schreiben wir die Nicht-Null-Elemente zeilenweise nacheinander auf einen Vektor  $K$ . Zur eindeutigen Zuordnung zwischen den Elementen der Matrix  $K$  und den Elementen im Vektor  $K$  werden zwei Hilfsfelder eingeführt:

LKZ Zeiger auf die Position des jeweiligen letzten Nicht-Null-Elementes einer Zeile der Matrix  $K$  im Vektor  $K$

LKS Vektor der Spaltenindizes

Diese Speicherform bezeichnen wir als „Kompaktliste zeilenweise (KLZ)“.

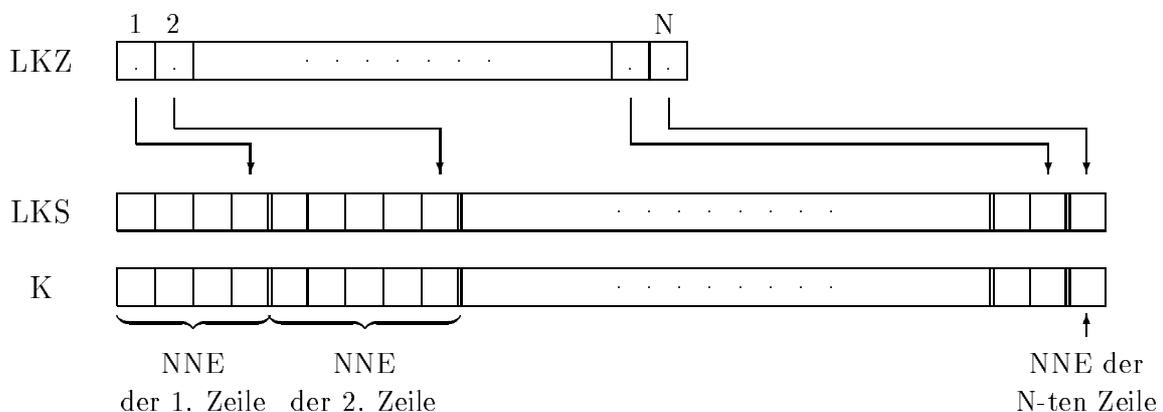


Abbildung 5.6: Schematische Darstellung der KLZ-Speichertechnik

Bei der Anwendung der iterativen Verfahren sind noch die folgenden zwei Probleme zu untersuchen.

- Wann bricht man die Iteration ab ?
- Wie wählt man die Startnäherung  $\underline{u}^{(0)}$  ?

Sinnvoll ist der Abbruch eines Iterationsverfahrens sicher, wenn der Fehler der Näherungslösung des Gleichungssystems in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers liegt. Beachten wir, daß

$$u_h = \sum_{i \in \bar{\omega}_h} u_i p_i(x) \quad \text{mit} \quad \underline{u}_h = [u_i]_{i \in \bar{\omega}_h} \quad \text{für alle} \quad u_h \in V_h$$

gilt (siehe die Abschnitte 4.4.2 bzw. 4.4.3) und somit auch eine analoge Beziehung für  $\underline{u}_h^{(k)}$  aufgeschrieben werden kann, dann folgt

$$\begin{aligned}
\|u - u_h^{(k)}\|_{1,2,\Omega} &\leq \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} + \|u_h - u_h^{(k)}\|_{1,2,\Omega} \\
&\leq c(u) h + \|u_h - u_h^{(k)}\|_{1,2,\Omega} \\
&\leq c(u) h + \mu_1^{-0.5} (a(u_h - u_h^{(k)}, u_h - u_h^{(k)}))^{0.5} \\
&= c(u) h + \mu_1^{-0.5} (K_h(\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(k)}, \underline{u}_h - \underline{u}_h^{(k)}))^{0.5} \\
&= c(u) h + \mu_1^{-0.5} \|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(k)}\|_{K_h},
\end{aligned}$$

wobei  $u$  die exakte Lösung des Randwertproblems,  $u_h$  die FE-Näherungslösung und  $\mu_1$  die Konstante aus der Koerzitivitätsabschätzung für die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  (siehe die Beziehung 4.15) sind sowie die Diskretisierungsfehlerabschätzung in der  $H^1$ -Norm genutzt wurde (siehe Abschnitt 4.4.4).

Um den Fehler  $\|u - u_h^{(k)}\|_{1,2,\Omega}$  in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers zu erhalten, muß folglich  $\|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(k)}\|_{K_h}$  in der Größenordnung von  $h$  liegen, d.h. wir müssen das  $\varepsilon$  beim Abbruchtest im Iterationsverfahren in der Größenordnung von  $h$  wählen.

Für die theoretischen Untersuchungen haben wir bisher bei den Iterationsverfahren den Abbruchtest

$$\|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(k)}\|_{K_h} \leq \varepsilon \|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(0)}\|_{K_h}$$

genutzt. Bei einer konkreten Anwendung der Iterationsverfahren ist dieser Abbruchtest jedoch i.a. nicht auswertbar, da zum Überprüfen dieses Kriteriums die exakte Lösung  $\underline{u}_h$  bekannt sein muß. Innerhalb des PCCG-Verfahrens führen wir deshalb den folgenden Abbruchtest durch

$$\|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(k)}\|_{K_h C^{-1} K_h} \leq \varepsilon \|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(0)}\|_{K_h C^{-1} K_h}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(\underline{w}^{(k)}, \underline{r}^{(k)}) \leq \varepsilon^2 (\underline{w}^{(0)}, \underline{r}^{(0)})$$

mit den Vektoren  $\underline{w}^{(k)}$ ,  $\underline{r}^{(k)}$ ,  $\underline{w}^{(0)}$  und  $\underline{r}^{(0)}$ , die im PCCG-Verfahren ohnehin berechnet werden. Da die Matrix  $C$  die Matrix  $K_h$  approximieren soll, ist  $\|\cdot\|_{K_h C^{-1} K_h}$  auch eine gute Approximation für  $\|\cdot\|_{K_h}$ .

Ein alternativer Abbruchtest ist

$$\|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(k)}\|_{K_h^2} \leq \varepsilon \|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{(0)}\|_{K_h^2},$$

welcher zu

$$\|\underline{r}^{(k)}\| \leq \varepsilon \|\underline{r}^{(0)}\|$$

mit der euklidischen Vektornorm  $\|\cdot\|$  und  $\underline{r}^{(k)} = \underline{f}_h - K_h \underline{u}_h^{(k)}$  äquivalent ist.

Wie können wir die Startnäherung für die Iterationsverfahren wählen?

Wenn wir eine Folge von FE-Diskretisierungen erzeugt haben, dann bietet sich der folgende Algorithmus zur Bestimmung einer Startnäherung an.

1. Löse das Gleichungssystem

$$K_1 \underline{u}_1 = \underline{f}_1$$

mittels eines direkten oder iterativen Verfahrens. Setze  $q = 1$ ,  $k_q = 1$  und  $\underline{u}_q^{(k_q)} = \underline{u}_1$ .

2. Interpoliere die Lösung  $\underline{u}_q^{(k_q)}$  auf das Netz  $\mathcal{T}_{q+1}$ , d.h.

$$\underline{u}_{q+1}^{(0)} = I_q^{q+1} \underline{u}_q^{(k_q)} .$$

Setze  $q = q + 1$  und löse das Gleichungssystem

$$K_q \underline{u}_q = \underline{f}_q$$

mittels  $k_q$  Schritten eines Iterationsverfahrens. Starte dieses mit  $\underline{u}_q^{(0)}$ .

Falls  $q < l$ , gehe zu Schritt 2, sonst STOP.

Setzen wir im Schritt 2 zur näherungsweise Lösung des Gleichungssystems ein Mehrgitter- oder MG(m)-PCCG-Verfahren ein, dann kann man zeigen, daß wir mit einem zur Anzahl der Unbekannten  $\bar{N}_l$  proportionalen Aufwand an arithmetischen Operationen eine Näherungslösung  $\underline{u}_l^{(k_l)}$  erhalten, für die der Fehler  $\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^{(k_l)}\|_{K_l}$  in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers liegt ([33, 78]).

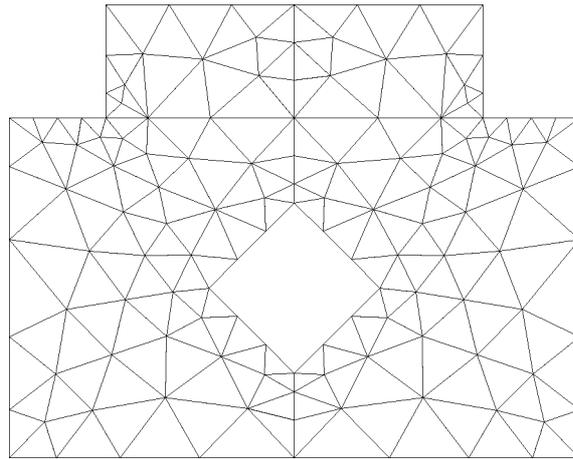
### 5.3 Ein Vergleich der Auflösungsverfahren

Wir wollen das Cholesky-Verfahren und die vorgestellten Iterationsverfahren hinsichtlich des Aufwandes an notwendigen arithmetischen Operationen sowie ihres Speicherplatzbedarfs vergleichen. Dabei werden wir demonstrieren, wie sich für die jeweiligen Verfahren der Aufwand an arithmetischen Operationen und der Speicherplatzbedarf bei wachsender Dimension des FE-Gleichungssystems verhält. Den Vergleich führen wir anhand des Modellbeispiels 1 aus dem Abschnitt 4.1 durch. Als Maß für den Aufwand an arithmetischen Operationen nutzen wir die benötigte CPU-Zeit. Alle Rechnungen wurden mit dem Programmsystem FEMGP ([42, 66, 76]) durchgeführt. Dieses Programmsystem kann zur Lösung von linearen und nichtlinearen Randwertproblemen in 2D-Gebieten eingesetzt werden. Die Tests wurden auf einem PC 80486 (33 MHz) unter Nutzung des LAHEY-FORTAN-Compilers ausgeführt.

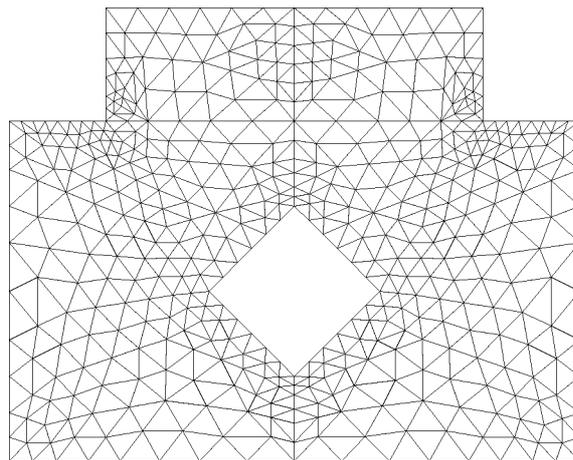
Wir erzeugen eine Folge von vier Vernetzungen  $\mathcal{T}_q$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$ , mit den Diskretisierungsparametern  $h_q$ ,  $h_{q+1} = h_q/2$ ,  $q = 1, 2, 3$ . Zu jeder Vernetzung wird das entsprechende FE-Gleichungssystem

$$K_q \underline{u}_q = \underline{f}_q$$

generiert und gelöst. Als größte Vernetzung wählen wir die in der Abbildung 5.7 dargestellte Triangulation.

Abbildung 5.7: Darstellung der Vernetzung  $\mathcal{T}_1$ 

Die feineren Vernetzungen erhalten wir, indem wir jeweils alle Dreiecke vierteln, d.h. wir halbieren alle Dreiecksseiten. Als zweite Vernetzung entsteht somit das folgende Netz.

Abbildung 5.8: Darstellung der Vernetzung  $\mathcal{T}_2$ 

Zuerst lösen wir die FE-Gleichungssysteme mittels des Cholesky-Verfahrens. Die Steifigkeitsmatrizen werden dafür in der Speicherform „variable Bandweite spaltenweise“ abgespeichert. In der Tabelle 5.1 sind der Speicherplatzbedarf und die benötigten CPU-Zeiten für die Cholesky-Zerlegung sowie für das Vorwärts- und Rückwärts einsetzen zusammengestellt.

Anzahl der Unbekannten	133	482	1828	7112
Speicherplatzbedarf	13.66 kB	92.00 kB	661.61 kB	5039.52 kB
CPU-Zeit für die Zerlegung	0.01 s	0.33 s	4.18 s	60.31 s
CPU-Zeit für das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen	0.01 s	0.05 s	0.38 s	2.97 s

Tabelle 5.1: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim Cholesky-Verfahren

Aus dieser Tabelle können wir ablesen, daß bei jeweiliger Halbierung des Diskretisierungsparameters

- sich die Anzahl der Unbekannten etwa vervierfacht, d.h. wie  $h^{-2}$  verhält,
- der Speicherplatzbedarf sich wie  $h^{-3}$  ( $N^{1.5}$ ) verhält, d.h. mit dem Faktor 8 wächst,
- die benötigte CPU-Zeit für die Zerlegung ungefähr wie  $h^{-4}$  ( $N^2$ ) wächst, d.h. um das 16fache zunimmt,
- die benötigte CPU-Zeit für das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen wie  $h^{-3}$  ( $N^{1.5}$ ) ansteigt, d.h. sich verachtfach.

Somit bestätigen die erzielten Resultate die im Abschnitt 5.1 getroffenen theoretischen Aussagen hinsichtlich Speicherplatzbedarf und arithmetischem Aufwand des Cholesky-Verfahrens.

Im weiteren untersuchen wir verschiedene Iterationsverfahren. Bei allen Iterationsverfahren wurde als Startvektor der Vektor  $\underline{u}_4^{(0)} = [500, 500, \dots, 500]^T$  verwendet. Die Iteration wurde beendet, wenn das Abbruchkriterium  $\|\underline{r}^{(k)}\| \leq \varepsilon \|\underline{r}^{(0)}\|$  mit dem Defekt  $\underline{r}^{(k)} = K_4 \underline{u}_4^{(k)} - \underline{f}_4$  für  $\varepsilon = 10^{-4}$  erfüllt war.

Da bei allen untersuchten Iterationsverfahren die Steifigkeitsmatrizen in der Speicherform „Kompaktliste zeilenweise“ abgespeichert werden können, verhält sich der Speicherplatzbedarf wie  $h^{-2}$ , d.h. der Speicherplatzbedarf ist proportional zur Anzahl der Unbekannten des zu lösenden Gleichungssystems.

Wir betrachten zunächst zwei klassische Iterationsverfahren, das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel-Verfahren. Beim Jacobi-Verfahren wurden folgende Ressourcen an Speicherplatz und CPU-Zeit benötigt:

Anzahl der Unbekannten	133	482
Speicherplatzbedarf	7.08 kB	26.87 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	58226	226747
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	250.90 s	3841.70 s

Tabelle 5.2: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim Jacobi-Verfahren

Die Anwendung des Gauß-Seidel-Verfahrens erforderte die in der Tabelle 5.3 angegebenen Rechenzeiten und Speicherplätze.

Anzahl der Unbekannten	133	482
Speicherplatzbedarf	7.08 kB	26.87 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	29269	114319
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	133.08 s	1990.88 s

Tabelle 5.3: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim Gauß-Seidel-Verfahren

Bei beiden Verfahren wächst die Anzahl an notwendigen Iterationen bei einem vorgegebenen  $\varepsilon$  wie  $h^{-2} \ln \varepsilon^{-1}$  ( $N \ln \varepsilon^{-1}$ ), d.h. sie vervierfacht sich. Da der Aufwand an arithmetischen Operationen pro Iterationsschritt sich wie  $h^{-2}$  ( $N$ ) verhält, wächst somit der Gesamtaufwand an arithmetischen Operationen wie  $h^{-4} \ln \varepsilon^{-1}$  ( $N^2 \ln \varepsilon^{-1}$ ), d.h. mit

dem Faktor 16. Die Tabellen 5.2 und 5.3 zeigen, daß tatsächlich die benötigte CPU-Zeit um das 16fache anwächst. Offenbar konvergieren sowohl das Jacobi-Verfahren als auch das Gauß-Seidel-Verfahren nur sehr langsam. Damit sind diese Verfahren als eigenständige Algorithmen zur Lösung der FE-Gleichungssysteme unbrauchbar. Hätten wir nämlich beispielsweise das FE-Gleichungssystem mit 7112 Unbekannten mittels des Gauß-Seidel-Verfahrens gelöst, dann wäre eine CPU-Zeit von etwa 124 Stunden, also von rund 5 Tagen, notwendig gewesen.

Als nächsten Algorithmus untersuchen wir die Methode der konjugierten Gradienten ohne Vorkonditionierung (CG-Verfahren). Theoretisch müßte sich die Iterationszahl bei einem vorgegebenem  $\varepsilon$  wie  $h^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$  verhalten, d.h. sich jeweils verdoppeln. In der Tabelle 5.4 ist ersichtlich, daß sich zunächst die Iterationszahl um das 3.5fache, dann um das 3.1fache und schließlich um das 2.8fache erhöht. Man kann erwarten, daß sich bei weiteren Netzverfeinerungen tatsächlich das theoretisch ermittelte Wachstum der Iterationszahl einstellt. Auch beim CG-Verfahren ist der Aufwand an arithmetischen Operationen pro Iterationsschritt proportional zur Anzahl der Unbekannten, d.h. er verhält sich wie  $h^{-2} (N)$ . Asymptotisch nimmt also der Gesamtaufwand an arithmetischen Operationen wie  $h^{-3} \ln \varepsilon^{-1} (N^{1.5} \ln \varepsilon^{-1})$  zu. Zusätzlich zu den Speicherplätzen für das FE-Gleichungssystem werden beim CG-Verfahren noch drei Hilfsvektoren der Länge  $N$  benötigt.

Anzahl der Unbekannten	133	482	1828	7112
Speicherplatzbedarf	9.16 kB	34.40 kB	132.95 kB	522.44 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	125	442	1377	3871
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	0.55 s	5.98 s	75.75 s	1016.23 s

Tabelle 5.4: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim CG-Verfahren

Eine Reduzierung der notwendigen Anzahl an Iterationen und damit auch ein Rechenzeitgewinn wird bereits durch die einfache Vorkonditionierung mit der Hauptdiagonale der Systemmatrix erreicht (siehe Tabelle 5.5).

Anzahl der Unbekannten	133	482	1828	7112
Speicherplatzbedarf	9.16 kB	34.40 kB	132.95 kB	522.44 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	34	71	146	291
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	0.22 s	1.15 s	8.95 s	84.64 s

Tabelle 5.5: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim DIAG-PCCG-Verfahren

Aus der Tabelle 5.5 wird deutlich, daß die Iterationszahl wie  $h^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$  wächst. Daraus resultiert ein Anwachsen der Anzahl an notwendigen arithmetischen Operationen wie  $h^{-3} \ln \varepsilon^{-1}$ , was sich in der Zunahme der CPU-Zeit um das 8fache widerspiegelt.

Ein deutlich besser konvergierendes Verfahren ist die Methode der konjugierten Gradienten mit dem Einsatz einer unvollständigen Cholesky-Faktorisierung als Vorkonditionierer (IC-PCCG-Verfahren). Dies zeigt die Tabelle 5.6.

Anzahl der Unbekannten	133	482	1828	7112
Speicherplatzbedarf	12.62 kB	48.08 kB	187.36 kB	739.28 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	15	25	50	100
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	0.22 s	0.72 s	5.05 s	44.99 s

Tabelle 5.6: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim IC-PCCG-Verfahren

Wie beim CG-Verfahren gilt die theoretische Aussage, daß die Iterationszahl bei vorgegebenem  $\varepsilon$  wie  $h^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$  wächst. Dies ist auch in der Tabelle 5.6 deutlich erkennbar. Der Aufwand an arithmetischen Operationen wächst wie  $h^{-3} \ln \varepsilon^{-1}$  ( $N^{1.5} \ln \varepsilon^{-1}$ ) was sich im Ansteigen der CPU-Zeit um etwa das 8fache ausdrückt. Zusätzlich zu dem im CG-Verfahren benötigten Speicherplatz muß hier noch der Speicherplatz für die Vorkonditionierungsmatrix bereitgestellt werden.

Beim Einsatz der Methode der konjugierten Gradienten mit einer modifizierten unvollständigen Cholesky-Zerlegung als Vorkonditionierer (MIC-PCCG-Verfahren) erhalten wir folgende Aussagen:

Anzahl der Unbekannten	133	482	1828	7112
Speicherplatzbedarf	12.62 kB	48.08 kB	187.36 kB	739.28 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	8	13	18	29
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	0.16 s	0.44 s	2.03 s	13.40 s

Tabelle 5.7: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim MIC-PCCG-Verfahren

Bei diesem Verfahren ist theoretisch ein Anwachsen der Iterationszahl wie  $h^{-0.5} \ln \varepsilon^{-1}$  zu erwarten. Die in der Tabelle 5.7 angegebenen Iterationszahlen wachsen auch ungefähr so an. Die benötigte CPU-Zeit verhält sich wie  $h^{-2.5} \ln \varepsilon^{-1}$  ( $N^{1.25} \ln \varepsilon^{-1}$ ). Der Speicherplatzbedarf ist dergleiche wie beim IC-PCCG-Verfahren.

Der Einsatz von  $h$ -hierarchischen Basen (nach YSERENTANT [87]) führt auf einen PCCG-Algorithmus (HB-PCCG-Verfahren), bei dem das Anwachsen der Iterationszahl noch schwächer von  $h$  abhängt. In der Tabelle 5.8 sind die benötigten Iterationszahlen zusammengefaßt.

Anzahl der Unbekannten	482	1828	7112
Speicherplatzbedarf	49.66 kB	179.76 kB	693.09 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	16	22	29
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	0.49 s	2.63 s	14.66 s

Tabelle 5.8: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim HB-PCCG-Verfahren

Beim HB-PCCG-Verfahren wächst die Iterationszahl bei einem vorgegebenen  $\varepsilon$  wie  $\ln h^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$ , d.h. die Anzahl notwendiger Iterationen nimmt jeweils um eine Konstante zu. Dies ist in der Tabelle 5.8 auch erkennbar. Der Aufwand an arithmetischen Operationen wächst wie  $h^{-2} \ln h^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$  ( $N \ln N^{0.5} \ln \varepsilon^{-1}$ ). Zusätzlich zu dem beim CG-Verfahren erforderlichen Speicherplatz muß hier noch der Speicherplatz für die FE-Matrix vom größten Netz bereitgestellt werden.

Die effektivsten Verfahren zur Lösung unserer Aufgabe sind Mehrgitterverfahren. Betrachten wir zunächst ein Mehrgitterverfahren, bei dem der W-Zyklus mit jeweils zwei Vor- und zwei Nachglättungsschritten vom Gauß-Seidel-Typ durchgeführt wurde.

Anzahl der Unbekannten	482	1828	7112
Speicherplatzbedarf	32.68 kB	133.30 kB	530.33 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	4	4	4
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	0.33 s	1.59 s	8.24 s

Tabelle 5.9: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim Mehrgitterverfahren

Bei Mehrgitterverfahren ist die Iterationszahl bei einem vorgegebenen  $\varepsilon$  unabhängig vom Diskretisierungsparameter, d.h. konstant, was durch die Resultate in der Tabelle 5.9 bestätigt wird. Der Aufwand an arithmetischen Operationen ist somit proportional zur Anzahl der Unbekannten, d.h. er wächst wie  $h^{-2} \ln \varepsilon^{-1}$  ( $N \ln \varepsilon^{-1}$ ). Gleiches gilt auch für den Speicherplatzbedarf. Bei diesen Verfahren müssen die FE-Gleichungssysteme für alle Vernetzungen abgespeichert werden. Im Vorbereitungsschritt für den Mehrgitteralgorithmus sind zusätzlich die FE-Gleichungssysteme für alle Netze zu generieren. Dies erforderte in unserem Beispiel bei der Lösung des Gleichungssystems mit 7112 Unbekannten 1.72 s.

Mehrgitterverfahren können auch zur Konstruktion von Vorkonditionierungsoperatoren genutzt werden. Dies führt dann auf die sogenannten MG(m)-PCCG-Verfahren, wobei m die Anzahl der durchzuführenden Mehrgitterschritte bei der Lösung der Vorkonditionierungsgleichungssysteme ist. Wir erhalten mittels des MG(1)-PCCG-Verfahrens die folgenden Resultate, wobei obiger Mehrgitteralgorithmus eingesetzt wurde (W-Zyklus, 2 Vor- und Nachglättungsschritte vom Gauß-Seidel-Typ).

Anzahl der Unbekannten	482	1828	7112
Speicherplatzbedarf	47.74 kB	190.42 kB	752.90 kB
Anzahl der durchgeführten Iterationen	3	3	3
CPU-Zeit für die durchgeführten Iterationen	0.33 s	1.70 s	8.40 s

Tabelle 5.10: Rechenzeit und Speicherplatzbedarf beim MG(1)-PCCG-Verfahren

Auch beim MG(1)-PCCG-Verfahren ist die Iterationszahl bei vorgegebenem  $\varepsilon$  unabhängig vom Diskretisierungsparameter  $h$ . Zusätzlich zu den für den Mehrgitteralgorithmus benötigten Speicherplätzen muß noch der Speicherplatz für die Hilfsfelder des PCCG-Verfahrens bereitgestellt werden. Der Speicherplatzbedarf ist proportional zur Anzahl der Unbekannten. Wenn beim Einsatz des Mehrgitterverfahrens mehr als fünf Iterationen benötigt werden, dann ist i.a. das MG(1)-PCCG-Verfahren effektiver als das „reine“ MG-Verfahren.

Zum Abschluß vergleichen wir nochmals alle Verfahren hinsichtlich der benötigten CPU-Zeit und des Speicherplatzbedarfs.

Anzahl der Unbekannten	133	482	1828	7112
Cholesky-Verfahren	<b>0.02 s</b> 13.66 kB	<b>0.38 s</b> 92.00 kB	4.56 s 661.61 kB	63.28 s 5039.52 kB
Jacobi-Verfahren	250.90 s <b>7.08 kB</b>	3841.70 s <b>26.87 kB</b>		
Gauß-Seidel-Verfahren	133.08 s <b>7.08 kB</b>	1990.88 s <b>26.87 kB</b>		
CG-Verfahren	0.55 s 9.16 kB	5.98 s 34.40 kB	75.75 s <b>132.95 kB</b>	1016.23 s <b>522.44 kB</b>
DIAG-PCCG-Verfahren	0.22 s 9.16 kB	1.15 s 34.40 kB	8.95 s <b>132.95 kB</b>	84.64 s <b>522.44 kB</b>
IC-PCCG-Verfahren	0.22 s 12.62 kB	0.72 s 48.08 kB	5.05 s 187.36 kB	44.99 s 739.28 kB
MIC-PCCG-Verfahren	0.16 s 12.62 kB	0.44 s 48.08 kB	2.03 s 187.36 kB	13.40 s 739.28 kB
HB-PCCG-Verfahren		0.49 s 49.66 kB	2.63 s 179.76 kB	14.66 s 693.09 kB
Mehrgitter-Verfahren		<b>0.33 s</b> 32.68 kB	<b>1.59 s</b> 133.30 kB	<b>8.24 s</b> 530.33 kB
MG(1)-PCCG-Verfahren		<b>0.33 s</b> 47.74 kB	1.70 s 190.42 kB	8.40 s 752.90 kB

Tabelle 5.11: Vergleich aller vorgestellten Auflösungsverfahren

Die Tabelle 5.11 zeigt, daß das Cholesky-Verfahren für Gleichungssysteme mit wenigen Unbekannten bezüglich der benötigten CPU-Zeit am effektivsten ist. Zur Lösung von großdimensionierten Gleichungssystemen sollten nur Mehrgitterverfahren oder PCCG-Verfahren eingesetzt werden. Dabei sind die Mehrgitterverfahren und die MG(m)-PCCG-Verfahren die effektivsten Verfahren, da bei ihnen die Iterationszahl unabhängig vom Diskretisierungsparameter ist.

In der Abbildung 5.9 ist der Niveaulinienverlauf des berechneten Temperaturfeldes dargestellt.

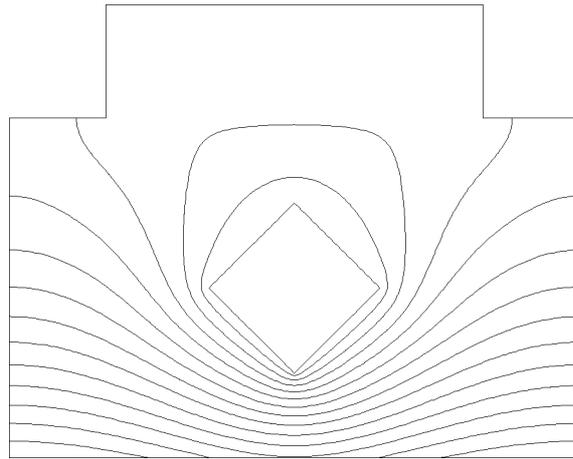


Abbildung 5.9: Darstellung des Niveaulinienverlaufs des Temperaturfeldes



## Kapitel 6

### Galerkin–FEM für parabolische Anfangs–Randwertaufgaben

#### 6.1 Die stetige, die semidiskrete und die volldiskrete Aufgabe

Wir betrachten das instationäre Wärmeleitproblem (siehe auch Abschnitt 2.2.2):

Gesucht ist das Temperaturfeld  $u(x, t)$ , für das

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in Q_T,$$
$$Q_T = \Omega \times (0, T)$$

gilt sowie die Randbedingungen

$$u(x, t) = g_1(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1, t \in [0, T]$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = g_2(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2, t \in [0, T]$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(x, t)u(x, t) = \alpha(x, t)g_3(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_3, t \in [0, T]$$

und die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

erfüllt werden.

Den Ausgangspunkt der FE–Diskretisierung bildet wieder eine Variationsformulierung, die sogenannte *Linienvariationsformulierung*. Um diese zu erhalten, multiplizieren wir die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung aus der Aufgabe (6.1) mit einer Testfunktion  $v(x) \in V_0$ ,  $V_0 = \{v(x) \in H^1(\Omega) : v(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$  und integrieren über  $\Omega$ . Damit erhalten wir

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right] v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx .$$

Die partielle Integration im elliptischen Anteil liefert

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} v(x) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} v(x) ds = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx .$$

Beachten wir noch die Randbedingungen, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v(x) dx + \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x, t) u(x, t) v(x) ds \\ &= \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x, t) v(x) ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(x, t) g_3(x, t) v(x) ds. \end{aligned}$$

Eine Variationsformulierung des Problems (6.1) lautet somit:

Gesucht ist  $u(x, t) \in V_{g_1}$  mit  $\dot{u} \in L_2(\Omega)$  für fast alle  $t \in (0, T)$ , so daß

$$\begin{aligned} (\dot{u}, v)_0 + a(t, u, v) &= \langle F(t), v \rangle && \text{für alle } v \in V_0 \text{ und für fast alle } t \in (0, T) \\ (u(x, 0), v)_0 &= (u_0, v)_0 && \text{für alle } v \in V_0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

mit

$$\begin{aligned} (\dot{u}, v)_0 &= \int_{\Omega} \dot{u}(x, t) v(x) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v(x) dx, \\ a(t, u, v) &= \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^2 \lambda_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x, t) u(x, t) v(x) ds, \\ \langle F(t), v \rangle &= \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x, t) v(x) ds + \int_{\Gamma_3} \alpha(x, t) g_3(x, t) v(x) ds, \\ V_{g_1} &= \{u(x, t) \in H^1(\Omega) : u(x, t) = g_1(x, t) \text{ auf } \Gamma_1 \text{ für fast alle } t \in [0, T]\}, \\ V_0 &= \{v(x) \in H^1(\Omega) : v(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_1\} \end{aligned}$$

gilt.

Das Problem (6.2) wird auch als *Linienvariationsformulierung* bezeichnet. Um eine Diskretisierung der Aufgabe (6.2) zu erhalten, führen wir zuerst eine FE-Diskretisierung bezüglich der Ortsvariablen durch. Dazu verwenden wir den folgenden Lösungsansatz

$$u_h = u_h(x, t) = \sum_{i \in \omega_h} u_i(t) p_i(x) + \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i}(t) p_i(x),$$

wobei wir hier wieder die im Abschnitt 4.3.1 eingeführten Mengen  $\omega_h$  und  $\gamma_h$  benutzen. Die Koeffizienten  $u_{*,i}(t)$  sind durch  $u_{*,i}(t) = g_1(x_i, t)$  definiert.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Gesucht ist } u_h(x, t) \in V_{g_1 h} \text{ mit } \dot{u}_h \in L_2(\Omega) \text{ für fast alle } t \in (0, T), \text{ so daß} \\ (\dot{u}_h, v_h)_0 + a(t, u_h, v_h) = \langle F(t), v_h \rangle \quad \text{für alle } v \in V_{0h} \text{ und für fast alle } t \in (0, T) \\ (u_h(x, 0), v_h)_0 = (u_0, v_h)_0 \quad \text{für alle } v \in V_{0h} \end{aligned} \quad (6.3)$$

mit

$$V_{g_1 h} = \left\{ u_h(x, t) : u_h(x, t) = \sum_{i \in \omega_h} u_i(t) p_i(x) + \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i}(t) p_i(x) \right\},$$

$$V_{0h} = \left\{ v(x) : v_h(x) = \sum_{i \in \omega_h} v_i p_i(x) \right\}$$

gilt.

Beachten wir die konkrete Gestalt der Funktion  $u_h(x, t)$ , und setzen wir für  $v_h(x)$  die Funktionen  $p_k(x)$ ,  $k \in \omega_h$ , nacheinander ein, dann folgt:

$$\begin{aligned} \text{Gesucht ist } \underline{u}_h(t) = [u_i(t)]_{i \in \omega_h}, \text{ so daß für alle } k \in \omega_h \text{ und für fast alle } t \in (0, T) \\ \sum_{i \in \omega_h} \dot{u}_i(t) (p_i, p_k)_0 + \sum_{i \in \omega_h} u_i(t) a(t, p_i, p_k) = \langle F(t), p_k \rangle - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i}(t) a(t, p_i, p_k) \\ - \sum_{i \in \gamma_h} \dot{u}_{*,i}(t) (p_i, p_k)_0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\sum_{i \in \omega_h} u_i(0) (p_i, p_k)_0 = (u_0, p_k)_0 - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i}(0) (p_i, p_k)_0$$

gültig ist, d.h. gesucht ist  $\underline{u}_h(t) = [u_i(t)]_{i \in \omega_h}$ , so daß

$$M_h \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h(t) \underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t) \quad \text{für fast alle } t \in (0, T) \quad (6.5)$$

$$M_h \underline{u}_h(0) = \underline{g}_h$$

mit

$$M_h = [(p_i, p_k)_0]_{i,k \in \omega_h} \quad (\text{Massematrix})$$

$$K_h(t) = [a(t, p_i, p_k)]_{i,k \in \omega_h} \quad (\text{Steifigkeitsmatrix})$$

$$\begin{aligned} \underline{f}_h(t) = [\langle F(t), p_k \rangle - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i}(t) a(t, p_i, p_k) \\ - \sum_{i \in \gamma_h} \dot{u}_{*,i}(t) (p_i, p_k)_0]_{k \in \omega_h} \quad (\text{Lastvektor}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{g}_h = [(u_0, p_k)]_{k \in \omega_h} \quad (\text{Vektor der „Momente“ der} \\ - \sum_{i \in \gamma_h} u_{*,i}(0) (p_i, p_k)_0 \quad \text{Anfangstemperatur}) \end{aligned}$$

gilt.

Zur Bestimmung der Vektorfunktion  $\underline{u}_h(t) = [u_i(t)]_{i \in \omega_h}$  haben wir das System (6.5) gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der Anfangsbedingung  $\underline{u}_h(0) = M_h^{-1} \underline{g}_h$  erhalten. Die Aufgabe (6.5) wird auch als *semidiskrete Ersatzaufgabe* bezeichnet. Zur näherungsweise Lösung dieses Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen nutzen wir ein  $\sigma$ -gewichtetes Differenzenschema. Wir diskretisieren das Zeitintervall  $(0, T)$ , d.h.

$$(0, T) : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_m = T$$

mit der Zeitschrittweite  $\tau = t_{j+1} - t_j = T/m$ . Wir wählen hier der Einfachheit halber eine feste Zeitschrittweite  $\tau$ . Es wäre aber auch eine Wahl der Zeitschrittweite in Abhängigkeit vom Zeitschritt möglich. Als Ergebnis erhalten wir die *volldiskrete Ersatzaufgabe* ( $\sigma$ -gewichtetes Schema). Führen wir die Bezeichnung  $\underline{u}_h^j = [u_i(t_j)]_{i \in \omega_h}$  ein, dann gilt:

Gesucht ist  $\underline{u}_h^j = [u_i(t_j)]_{i \in \omega_h}$ , so daß für alle  $j = 1, 2, \dots, m$

$$M_h \frac{\underline{u}_h^j - \underline{u}_h^{j-1}}{\tau} + \sigma K_h(t_j) \underline{u}_h^j + (1 - \sigma) K_h(t_{j-1}) \underline{u}_h^{j-1} = \varphi^j \quad (6.6)$$

gilt mit  $\varphi^j = \sigma \underline{f}_h(t_j) + (1 - \sigma) \underline{f}_h(t_{j-1})$  sowie die Anfangsbedingung

$$\underline{u}_h^0 = M_h^{-1} \underline{g}_h \quad (6.7)$$

erfüllt wird.

Für  $\sigma = 0$  heißt das Schema (6.6) *explizites Schema*, für  $\sigma = \frac{1}{2}$  *Crank-Nicolson-Schema* und für  $\sigma = 1$  *rein implizites Schema* (siehe auch [27, 30, 80]).

Aus der Aufgabe (6.6) ist ersichtlich, daß zur Bestimmung des Lösungsvektors  $\underline{u}_h^j$  zum Zeitpunkt  $t_j$  ein lineares Gleichungssystem der Gestalt

$$(M_h + \sigma \tau K_h(t_j)) \underline{u}_h^j = (M_h - (1 - \sigma) \tau K_h(t_{j-1})) \underline{u}_h^{j-1} + \tau \varphi^j \quad (6.8)$$

zu lösen ist. Als Auflösungsalgorithmen können die im Kapitel 5 beschriebenen Verfahren genutzt werden.

**Bemerkung 6.1** Man kann die Matrix  $M_h$  auch durch die Diagonalmatrix

$$D_h = [(D_h)_{ii}]_{i \in \omega_h} = \left[ \sum_{j \in \omega_h} (M_h)_{ij} \right]_{i \in \omega_h}$$

ersetzen. Diese Vorgehensweise ist aus der Literatur als „mass-lumping“ bekannt. Mit der Matrix  $D_h$  anstelle der Matrix  $M_h$  ist das Gleichungssystem (6.8) für  $\sigma = 0$  auf Grund der Diagonalgestalt von  $D_h$  besonders einfach lösbar.

## 6.2 Konvergenz und Stabilität

Eine wichtige Frage bei derartigen Schemata ist die Frage nach der Stabilität. Ein Schema heißt *stabil*, wenn kleine Änderungen in der Anfangsbedingung und der rechten Seite auch nur kleine Änderungen in der Lösung verursachen. Für  $\sigma = 0$  erhalten

wir nur ein bedingt stabiles Schema. Es ist nur dann stabil, wenn für die Diskretisierungsschrittweiten  $h$  und  $\tau$  die Relation  $\tau \leq h^2/c$  mit einer (hier nicht näher erläuterten) Konstanten  $c$  gilt. Für  $\sigma \geq \frac{1}{2}$  ist das Schema (6.6) unbedingst stabil, d.h. stabil unabhängig von der Wahl von  $h$  und  $\tau$ .

Zum Abschluß geben wir zwei Fehlerabschätzung an. Weitere Fehlerabschätzungen kann der Leser z.B. in [27, 30, 80] finden.

Falls  $u(x, t)$  hinreichend glatt ist und wir stückweise lineare Ansatzfunktionen bei der FE-Diskretisierung bezüglich des Ortes nutzen, dann gilt in der  $H^1$ - bzw. in der  $L_2$ -Norm

$$\|u(x, t_j) - u_h(x, t_j)\|_{0,2,\Omega} \leq c(u) \begin{cases} h^2 + \tau & \sigma = 1 \\ h^2 + \tau^2 & \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\|u(x, t_j) - u_h(x, t_j)\|_{1,2,\Omega} \leq c(u) \begin{cases} h + \tau & \sigma = 1 \\ h + \tau^2 & \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

für alle  $j = 0, 1, \dots, m$ .



# Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] Th. Apel. *Finite-Elemente-Methoden über lokal verfeinerten Netzen für elliptische Probleme in Gebieten mit Kanten*. Dissertation A, Technische Universität Chemnitz, 1991.
- [3] J. H. Argyris. Energy theorems and structural analysis. *Aircraft Engineering*, 27:125–154, 1955.
- [4] O. Axelsson und V. A. Barker. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation*. Academic Press, Orlando Fla., 1984.
- [5] I. Babuška und W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Num. Anal.*, 15(4):736–754, 1978.
- [6] P. K. Banerjee und R. Butterfield. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill Book Company, 1981.
- [7] R. E. Bank und A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44(170):283–301, 1985.
- [8] A. Bernhardt. Untersuchung des Abkühlprozesses einer abgesetzten Welle unter besonderer Beachtung des Verhaltens in den Ecken. Jahresarbeit, Technische Universität Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik, 1988.
- [9] D. Braess. *Finite Elemente – Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer Lehrbuch, 1992.
- [10] J. H. Bramble, J. E. Pasciak und J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Mathematics of Computation*, 55(191):1–22, 1990.
- [11] U. Breitschuh und R. Jurisch. *Die Finite-Element-Methode*. Akademie Verlag, Berlin, 1993.
- [12] S. Brenner und L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer Verlag, New York, 1994.
- [13] P. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [14] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of American Mathematical Society*, 49:1–23, January 1943.

- [15] A. S. Cybenko, N. G. Vaščenko, N. G. Kriščuk und Ju. O. Lavendel. *Avtomatizirovannaja sistema obsluživanja konečno–elementnych rasčetov*. Golovnoe izdatel'stvo izdatel'skogo obědinenija "višča škola", Kiev, 1986.
- [16] Dankert. *Numerische Methoden der Mechanik*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1977.
- [17] N. Elsner. *Grundlagen der technischen Thermodynamik*. Akademie Verlag, Berlin, 1985.
- [18] G. M. Fichtenholz. *Differential– und Integralrechnung*, Bd. 3. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1977.
- [19] G. M. Fichtenholz. *Differential– und Integralrechnung*, Bd. 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
- [20] U. Fischer. *Finite–Elemente–Programme in der Festkörpermechanik*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1987.
- [21] K. O. Friedrichs. Finite–difference schemes for the Neumann and Dirichlet problems. Technical report, N. Y. Univ., 1962.
- [22] R. H. Gallagher. *Finite Element Analysis: Fundamentals*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [23] A. George und J. W. Lui. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [24] V. Girault und P.-A. Raviart. *Finite element approximation of the Navier–Stokes equations, Lecture Notes in Mathematics 749*. Springer–Verlag, Berlin, 1979.
- [25] H. Göldner. *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre. Band 1*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1979.
- [26] H. Göldner. *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre. Band 2*. Fachbuchverlag, Leipzig–Köln, 1992.
- [27] H. Göring, H.-G. Roos und L. Tobiska. *Finite–Element–Methode, Wissenschaftliche Taschenbücher, Bd. 285*. Akademie–Verlag, Berlin, 1985.
- [28] M. Griebel. *Multilevelmethoden als Iterationsverfahren über Erzeugendensystemen*. Teubner Skripten zur Numerik. B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [29] D. F. Griffiths, editor. *The Mathematical Basis of Finite Element Methods*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1984.
- [30] Ch. Großmann und H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher Mathematik. Teubner–Verlag, Stuttgart, 1992.
- [31] I. Gustafsson. A class of first order factorization methods. *BIT*, 18:142–156, 1978.
- [32] I. Gustafsson. On modified incomplete factorization methods. *Lecture Notes in Mathematics* 968, 334–351. Springer–Verlag, Berlin, 1982.
- [33] W. Hackbusch. *Multi–Grid Methods and Applications, Springer Series in Computational Mathematics 4*. Springer–Verlag, Berlin, 1985.

- [34] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher Mathematik. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1987.
- [35] W. Hackbusch. *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*. Teubner Studienbücher Mathematik. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1989.
- [36] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Teubner Studienbücher Mathematik. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1991.
- [37] G. Heber und B. Kozik. *Physik: Eine Einführung*. BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1971.
- [38] B. Heise. Newton-Multigrid-Verfahren zur Berechnung elektromagnetischer Felder. Diplomarbeit, Technische Universität Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik, 1987.
- [39] B. Heise. Mehrgitter-Newton-Verfahren zur Berechnung nichtlinearer magnetischer Felder. Wissenschaftliche Schriftenreihe 4/1991, Technische Universität Chemnitz, 1991.
- [40] M. R. Hestenes und E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 49:409–436, 1952.
- [41] E. Hinton und D. R. J. Owen. *An Introduction to Finite Element Computations*. Pineridge Press Limited, 1979.
- [42] M. Jung. Eine Einführung in die Theorie und Anwendung von Mehrgitterverfahren. Wissenschaftliche Schriftenreihe 9, Technische Universität Karl-Marx-Stadt, 1989.
- [43] M. Jung, U. Langer, A. Meyer, W. Queck und M. Schneider. Multigrid preconditioners and their applications. In G. Telschow, editor, *Third Multigrid Seminar, Biesenthal 1988*, 11–52, Berlin, 1989. Karl-Weierstraß-Institut. Report R-MATH-03/89.
- [44] N. Kikuchi. *Finite Element Methods in Mechanics*. Cambridge University Press, 1986.
- [45] V. G. Korneev. Sopotavlenie metoda konečnych elementov c variacionno-raznostnym metodom rešenija zadač teorii uprugosti. *Isv. VNIIG im. B. E. Vedeneeva*, 83:286–307, 1967.
- [46] V. G. Korneev. *Schemy metoda konečnych elementov vysokich porjadkov točnosti*. Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta, Leningrad, 1977.
- [47] V. G. Korneev und U. Langer. *Approximate solution of plastic flow theory problems*, Bd. 69 *Teubner-Texte zur Mathematik*. Teubner-Verlag, Leipzig, 1984.
- [48] M. Křížek und P. Neittaanmäki. *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 50. Longman Scientific & Technical (copublished with John Wiley & Sons, Inc.), New York, 1990.

- [49] L. D. Landau und E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik. Klassische Feldtheorie*, Bd. 2. Akademie-Verlag Berlin, 1973.
- [50] B. Mercier. *Topics in Finite Element Solution of Elliptic Problems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1979.
- [51] A. R. Mitchell und R. Wait. *The finite element method in partial differential equations*. John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [52] J. Nečas und I. Hlaváček. *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*. Elsevier, SNTL, 1981.
- [53] D. H. Norrie und G. de Vries. *An Introduction to Finite Element Analysis*. Academic Press, New York San Francisco London, 1978.
- [54] J. T. Oden. *Finite elements of nonlinear continua*. McGraw-Hill Book Company, 1972.
- [55] J. T. Oden, E. B. Becker und G. F. Carey. *Finite Elements: An Introduction, The Texas Finite Element Series I*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982.
- [56] J. T. Oden und G. F. Carey. *Finite Elements: A Second Course, The Texas Finite Element Series II*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982.
- [57] J. T. Oden und G. F. Carey. *Finite Elements: Computational Aspects, The Texas Finite Element Series III*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982.
- [58] J. T. Oden und G. F. Carey. *Finite Elements: Fluid Mechanics, The Texas Finite Element Series VI*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982.
- [59] J. T. Oden und G. F. Carey. *Finite Elements: Mathematical Aspects, The Texas Finite Element Series IV*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982.
- [60] J. T. Oden und G. F. Carey. *Finite Elements: Special Problems in Solid Mechanics, The Texas Finite Element Series V*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982.
- [61] J. T. Oden und J. N. Reddy. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [62] L. A. Oganessian. Schodomost' raznostnych schem pri ulučšenoj approksimacii granicy. *Dokl. AN SSSR*, 170(1):41–44, 1966. (Russian).
- [63] L. A. Oganessian und L. A. Ruchovet. *Variacionno-raznostnye metody rešenija elliptičeskich uravnenij*. Izd. Akad. Nauk Armjanskoj SSR, Erevan, 1979.
- [64] P. Oswald. *Multilevel Finite Element Approximation: Theory and Applications*. Teubner Skripten zur Numerik. B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [65] N. Pohler. Das Demonstrationsprogramm FEM2D. Diplomarbeit, Technische Universität Chemnitz, Sektion Mathematik, 1991.
- [66] W. Queck. FEMGP – Finite-Element-Multi-Grid-Package – Programmdokumentation und Nutzerinformation. Report, Technische Universität Chemnitz-Zwickau, Fachbereich Mathematik, 1993.

- [67] K. J. Reid. On the construction and convergence of a finite element solution of Laplace's equation. *J. Inst. Math. Appl.*, 9:1–13, 1972.
- [68] W. Ritz. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *J. reine und angewandte Math.*, 135, 1908.
- [69] S. Rjasanow. Dokumentation und theoretische Grundlagen zum Programm SOLKLZ. Preprint 15, Technische Universität Karl-Marx-Stadt, 1986.
- [70] A. A. Samarskij. *Theorie der Differenzenverfahren*. Teubner-Verlag, Leipzig, 1984.
- [71] A. A. Samarskij und A. V. Gulin. *Čislennye metody*. Nauka, Moskva, 1989.
- [72] A. A. Samarskij und E. S. Nikolajev. *Numerical Methods for Grid Equations. Vol. II: Iterative Methods*. Birkhäuser, Basel, 1989.
- [73] Schellbach. Probleme der Variationsrechnung. *Journal der Mathematik*, 41:293–363, 1852. Heft 4.
- [74] H. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1980.
- [75] H. Schwarz. *FORTRAN-Programme der Methode der finiten Elemente*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1981.
- [76] T. Steidten und M. Jung. Das Multigrid-Programmsystem FEMGPM zur Lösung elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen einschließlich mechanisch-thermisch gekoppelter Probleme (Version 06.90). Programmdokumentation, Technische Universität Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik, 1990.
- [77] G. Strang und G. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1973.
- [78] K. Stüben und U. Trottenberg. Multigrid methods: Fundamental algorithms, model problem analysis and applications. In W. Hackbusch and U. Trottenberg, editors, *Multigrid Methods, Proceedings of the Conference held at Köln-Porz, November 23–27, 1981, Lecture Notes in Mathematics 960*, 1–176, Berlin-Heidelberg-New York, 1982. Springer-Verlag.
- [79] M. Theß. Das Demonstrationsprogramm FEM1D. Praktikumsarbeit, Technische Universität Chemnitz, Sektion Mathematik, 1991.
- [80] V. Thomeé. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Lecture Notes in Mathematics 1054*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
- [81] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin und L. J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeronaut. Sci.*, 23(9):805–824, 1956.
- [82] V. V. Šajdurov. *Mnogosetočnye metody konečnych elementov*. Nauka, Moskva, 1989.
- [83] R. Verfürth. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques. Technical report, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Zürich, 1993.

- [84] A. Ženišek. *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations*. Academic Press, London, 1990.
- [85] J. R. Whiteman, editor. *The Mathematics of Finite Elements and Applications IV*. Academic Press, London, 1982.
- [86] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen – Sobolevräume und Randwertaufgaben*. Teubner–Verlag, Stuttgart, 1982.
- [87] H. Yserentant. On the multi–level splitting of finite element spaces. *Numerische Mathematik*, 49(4):379–412, 1986.
- [88] E. Zeidler. *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis II: Monotone Operatoren*. Teubner–Texte zur Mathematik. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1977.
- [89] X. Zhang. Multilevel Schwarz methods. *Numerische Mathematik*, 63:521–539, 1992.
- [90] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. 1st ed.* McGraw–Hill, New York, 1967.
- [91] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw–Hill, New York, 1971.
- [92] O. C. Zienkiewicz. *Die Methode der finiten Elemente*. Fachbuchverlag, Leipzig, 1975.
- [93] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method, 3rd ed.* McGraw–Hill, New York, 1977.
- [94] O. C. Zienkiewicz, W. D. Kelly, J. Gago und I. Babuska. Hierarchical finite element approaches, error estimate and adaptive refinement. In J. R. Whiteman, editor, *The Mathematics of Finite Elements and Applications IV*, 313–346. Mafelap, 1981.
- [95] O. C. Zienkiewicz und K. Morgan. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, 1983.
- [96] O. C. Zienkiewicz und R. L. Taylor. *The finite element method. Volume 1: Basic formulation and linear problems. Volume 2: Solid and fluid mechanics and non-linearity*. McGraw–Hill Book Company, New York, 4 edition, 1991.
- [97] O. C. Zienkiewicz und J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24:337–357, 1987.
- [98] M. Zlámal. On the finite element method. *Numerische Mathematik*, 12(5):394–408, 1968.