NUMERIK I

Operatorgleichungen

Ulrich Langer
Institut für Mathematik
Johannes Kepler Universität Linz

Wintersemester 1995/96

Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskriptum entstand aus Vorlesungen, die der Autor im Wintersemester 1993/94 und im Wintersemester 1995/96 an der Johannes Kepler Universität Linz gehalten hat. Die Lehrveranstaltung „Numerik I“ ist die erste Vorlesung in einem Zyklus von drei Vorlesungen zur „Höheren Numerischen Mathematik“. Die Vorlesung „Numerik I“ stellt das Handwerkszeug zur numerischen Behandlung linearer (Kap. 1 - 2 und Kap. 4) und nichtlinearer (Kap. 5 - 6) Operatorgleichungen in Banach- bzw. Hilbert–Räumen bereit. Im Kapitel 3 wird eine Einführung in die Theorie moderner Funktionenräume (Sobolev-Räume, Räume von Distributionen) gegeben. Zur Vorlesung gehört ein Praktikum, in dem die wichtigsten, in der Vorlesung betrachteten, theoretischen Sachverhalte und Techniken an konkreten Beispielen geübt werden.

Die vorliegende Vorlesung setzt Kenntnisse aus den Grundvorlesungen zur linearen Algebra, zur Analysis und zur Numerischen Mathematik voraus. Zum anderen liefert die Lehrveranstaltung „Numerik I“ Vorkenntnisse für die nachfolgenden Vorlesungen zur Numerischen und Angewandten Mathematik. In der Vorlesung „Numerik II“ werden Randwertaufgaben (RWA) für partielle Differentialgleichungen und die wichtigsten Techniken zu ihrer numerischen Lösung betrachtet. Die Vorlesung „Numerik III“ befaßt sich mit der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben (AWA) und Anfangsrandwertaufgaben (ARWA) für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen.

Das Skriptum wurde bewußt im Stile eines Vorlesungsmanuskriptes gehalten. Im Gegensatz zu vielen Lehrbüchern wurde auf „belletristische“ Ausschmückungen verzichtet. Die Lehrinhalte sollen schnell und kompakt erfaßbar sein. Es wird eine Vielzahl von Abkürzungen eingeführt. Die Abkürzungen **Ü x.x** und **(mms)** bedeuten harte Arbeit an der Materie. Das Lösen von Übungsaufgaben und das Mach-Mal-Selbst ist angesagt. Das vorliegende Skriptum ist ein Arbeitspapier. Es ist kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch und auch kein Ersatz für ein Lehrbuch, aber eine gute Vorbereitung auf die allfällige Prüfung.

Der Autor möchte an dieser Stelle Frau Marion Gneiger für die Erstellung des LaTeX–Files und Frau Doris Holzer für die technische Überarbeitung des LaTeX–Files recht herzlich danken.

Ulrich Langer

Linz, den 12. Februar 1996

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Operatorgleichungen ?

- Mathematiker: Ges. $u \in X: \quad Au = b \text{ in } Y$ (1)

u	X	A	b	Y
Lösung	Norm. Raum	Operator	RS	Norm. Raum
Lsg.	B-Raum	linear / nichtlinear		B-Raum
	H-Raum			H-Raum

? $\updownarrow$? $X,\ Y,\ A: X \to Y,\ b$?

- Ingenieur:

z.B. **Festigkeitsberechnungen** (lineares Elastizitätsproblem):

Ges. ist Verschiebungsvektor $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$:

- Kräftegleichgewicht:
$$-\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\sigma_{ij}(u)}_{\text{Spannungen}} = \underbrace{f_i(x),}_{\text{Kraftdichte-vektor}} \quad x \in \Omega, \quad i = \overline{1,3};$$

- Stoffgesetz: HOOK (σ-ϵ-Bez.)
$$\sigma_{ij}(u) = \lambda(\sum_{k=1}^{3} \underbrace{\epsilon_{kk}(u))\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}(u)}_{\text{Verzerrungen/Def.}}; \ i,j = \overline{1,3};$$
λ, μ - LAMEsche Konstanten.

- Geometrische Beziehungen: kleine Deformationen
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \ i,j = \overline{1,3};$$

- Randbedingungen: $\Gamma_1 : u(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1,$
$$\Gamma_2 : \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(u) n_j(x) = g_i(x), \quad \forall x \in \Gamma_2, i = \overline{1,3};$$

z.B. **Wärmeleit–Wärmetransport–Probleme** ([11] Numerik II);

z.B. **Magnetfeldprobleme** ([11] Numerik II);

z.B. **Strömungsprobleme** (Spezialvorlesungen)

$\vdots$

- <u>Typische Situation in der Praxis:</u>

Ges. $\quad u \in X : \; Au = b$ in $Y \qquad (1)$

∞-dim.

$\exists!$
 Eigens.
 Konstr. Verf.

∞-dim.
 z.B.
 $C^k(\Omega), L_p(\Omega), W_p^k(\Omega)$

Pkt. 1.4
 Kap. 4: A linear
 Kap. 6: A nichtlinear

Ges. $\quad \underline{u}_n \in X_n \overset{\text{z.B.}}{=} I\!R^N : A_n \underline{u}_n = \underline{b}_n$ in $Y_n \overset{?}{=} I\!R^n \qquad (1)_n$

endlichdimensional $\qquad\qquad$ endlichdimensional

<u>Bem.:</u> $(1)_n$ ist Spezialfall von (1) !

- <u>Inhalt der Vorlesung:</u>

  - Ges. $u \in X$: $\quad Au = b$ in Y: $\quad$ Pkt. 1.4

    $\qquad\qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad$ Pkt. 2.2 - 2.4

    $\qquad\qquad\quad$ linear $\qquad\quad$ Kap. 4

    $\exists\, A^{-1} \qquad \downarrow$

    $$u = A^{-1} b$$

  - $u = Bb \quad \xleftarrow[n\to\infty]{} \quad u_n = B_n b \qquad$ Pkt. 2.1

    $B : Y \to X \qquad\qquad B_n : Y \to X$

  - Nichtlineare Operatoren: Kap. $5 - 6$

    Ges. $\quad u \in X$: $\quad F(u) = 0$ in Y

    $$F(u) := A(u) - b$$

    Ges. $\quad u = u(b)$: $\quad F(u, b) = 0$ in Z

    $$\begin{array}{cc} \pitchfork & \pitchfork \\ X & Y \end{array}$$

    $x = x(y)$: $\quad F(x, y) = 0$ in Z

    $$\uparrow$$

    Daten

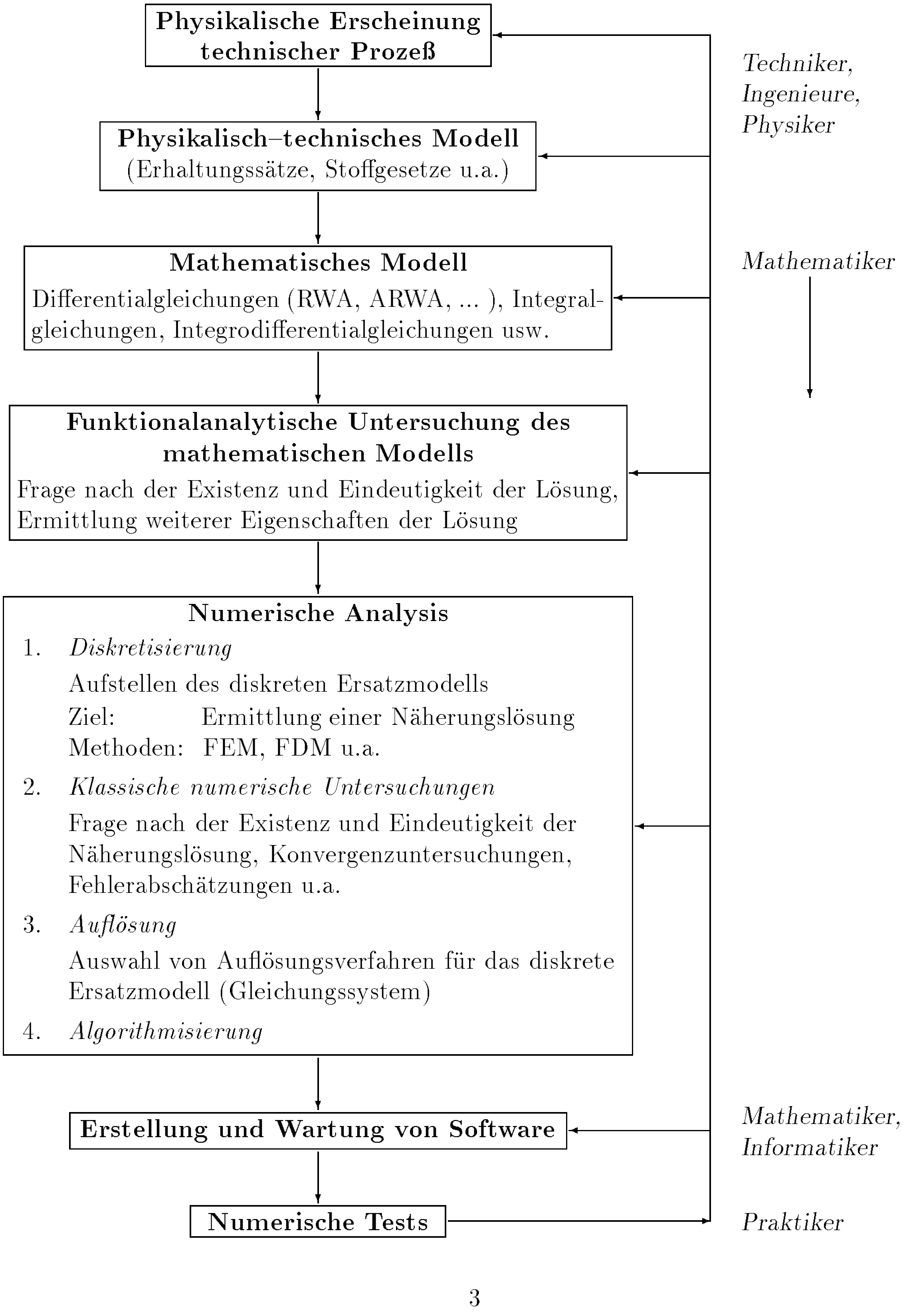
  Kap. 5: $F(u) \approx Au - b$

  $$\uparrow$$

  linear

  - Kap. 3: $X, Y, \ldots = \ldots, W_p^k(\Omega), \ldots$ Sobolev-Räume

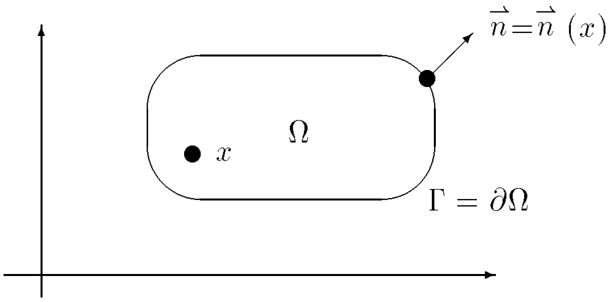
1.2 Einordnung



1.3 Bezeichnungen

- <u>Gebiete, Ränder, ...:</u>

  $\Omega \subset I\!R^m (m = 1, 2, 3)$ - Gebiet (offen, zusammenhängend), meist † (= beschränkt):



$\Gamma = \partial\Omega$ - Rand von Ω : $\Gamma \in C^{0,1}$ - Lipschitz-stetig.

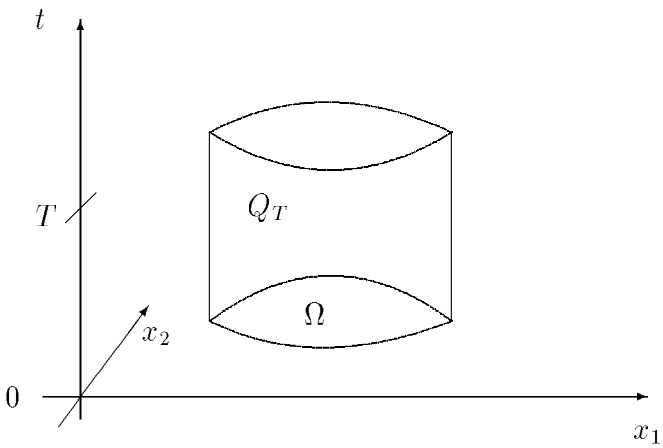
Γ = „hinreichend glatt“: $\Gamma \in C^{k,\alpha}, PC^{k,\alpha}, \ldots$.

$x = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \bar{\Omega}$ - Ortskoordinate.

$\vec{n} = (n_1, \ldots, n_m)^T = \vec{n}(x)$ - Außennormale in $x \in \Gamma$;
$n_i = \cos \sphericalangle (\vec{n}(x), x_i), \|\vec{n}\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i^2 = 1.$

$t \in \mathbf{T} = (0, T), (0, \infty), (t_a, t_l)$ - Zeitvariable.

$Q_T = \Omega \times \mathbf{T}$ - Raum-Zeit-Zylinder:



- <u>Funktionen, Ableitungen, ...:</u>

  $u(x,t) : \underbrace{\bar{\Omega} \times \bar{\mathbf{T}}}_{\text{möglicherweise zeitabhängig !?}} \to I\!R^l(C^l)$,

  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,

  $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \colon \partial x_m^{\alpha_m}}$,

  $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ - Multiindex,
  $\alpha_i \geq 0$ – ganzzahlig,
  $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i, \;\; \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_m!$,
  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_m^{\alpha_m}$ für $\xi \in I\!R^m$.

  $\partial_i = \partial^{(0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0)} : \partial_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i}$,

  $\partial_{ij} = \partial^{(0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,\overset{j}{1},\ldots,0)} : \partial_{ij} u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

  $\nabla u = \text{grad } u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_m u)^T = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)^T$ – Gradient,

  $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ – Laplace-Operator (u).

- <u>Räume:</u>

  $X, Y, \ldots$ – normierte Räume, B-Räume, H-Räume:

  $I\!R^m$ – Euklidischer Raum, $(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^T \underline{v}$;

  $C^k(\Omega), C_k(\bar{\Omega})$ - Räume der auf Ω bzw. $\bar{\Omega}$ def. und k-mal stetig differenzierbaren Funktionen;

  $\overset{\bullet}{C}{}^k(\Omega)$ - Raum aller k-mal stetig diff. Fkt. mit kompaktem Träger in Ω;

  $D(\Omega) = \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$ versehen mit best. Konvengenzbegr. – Raum der Grundfkt.;

$$
\begin{array}{lcl}
L_p(\Omega) & = & \{v(x) - \text{meßbar: } \|v\|_{L_p(\Omega)} := (\int\limits_{\Omega} |v|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, 1 \leq p < \infty; \\
L_\infty(\Omega) & = & \{v(x) - \text{meßbar: } \|v\|_{L_\infty(\Omega)} := \text{ess } \sup\limits_{x \in \Omega} |v(x)| < \infty\}; \\
L_2(\Omega) & = & H\text{-Raum: } (u,v)_{L_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} uv \, dx; \\
\hline
W_p^k(\Omega) & = & \text{Sobolev-Räume (Kap. 3);} \\
H^k(\Omega) & = & W_2^k(\Omega); \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

$L(X,Y) = [X \mapsto Y] =$ Raum aller linearen, stetigen ($= \dagger$) Operatoren von X nach (in) Y:

$$\|A\| = \|A\|_{[X \mapsto Y]} := \sup_{u \in X} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X};$$

$L(X) = L(X,X) = [X \mapsto X]$;

$L(X,Y) = B$-Raum, falls $Y = B$-Raum;

$$
\begin{array}{rcl}
X^* = X' = L(X, I\!R) & = & \text{dualer (adj.) Raum} \\
(C) & = & \text{Raum aller linearen stetigen } (= \dagger) \text{ Funktionalen;}
\end{array}
$$

X heißt reflexiv, falls $X \underset{\text{immer}}{\overset{}{=}} X^{**} \underset{(\subset)}{=} (X^*)^*$;

Durch die Abb. $J : X \mapsto X^{**} : J(u)(f) = f(u)$ läßt sich der Raum X mit einem Unterraum des Bidualraumes X^{**} identifizieren.

$< \cdot, \cdot >: X^* \times X \to I\!R$ - Dualitätsprodukt;

$f(u) :=< f, u >$,

$\|f\|_{X^*} := \sup\limits_{u \in X} \frac{|<f,u>|}{\|u\|_X}$.

■ <u>Konvergenzbegriffe:</u>

- starke Konvergenz in X: $u^k \to u \Leftrightarrow \|u - u^k\|_X \to 0$,
- schwache Konvergenz in X: $u^k \rightharpoonup u \Leftrightarrow f(u^k) \Rightarrow f(u) \quad \forall f \in X^*$,
- schwache* - Konvergenz in X^* („punktweise“ Konvergenz):

$$f^k \overset{*}{\rightharpoonup} f \Leftrightarrow f^k(u) = f(u) \quad \forall u \in X.$$

1.4 Elemente einer allgemeinen Theorie der Näherungsverfahren für Operatorgleichungen

1.4.1 Approximation, Stabilität und Konvergenz

Einige Grundbegriffe

Es seien
X, Y – normierte Räume mit den Normen $\|\cdot\|_X,\ \|\cdot\|_Y \rightsquigarrow \|\cdot\|$;
$A : X \to Y$ – Abb. aus X in Y.

Bez.: $\to$ aus ... in
$\mapsto$ von ... in
$\twoheadrightarrow$ aus ... auf
$\mapsto\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ von ... auf

Ausgangsaufgabe:

(1) Ges. $u \in X :\ Au = b$ in Y für geg. $b \in Y$.

Vor.: (1) besitze im Definitionsbereich $D(A)$ von A eine eindeutig bestimmte Lösung u ($\exists!$).

Bem.: Allgem. Methoden zur Untersuchung von $\exists!$ werden im Kap. 2 für lineare Operatoren A und im Kap. 6 für nichtlineare Operatoren A dargestellt,
z.B.: der BANACHsche Fixpunktsatz als konstruktives Prinzip zum Bew. von $\exists!$ (vgl. Pkt. 2.3):
X, Y – B–Räume (oder H–Räume)
$\hookrightarrow$ Betr. Fixpunktgl. $u = u + \tau J(b - Au)$ in X,
wobei $J : Y \mapsto\!\!\!\!\twoheadrightarrow X$ – Isomorphismus,
τ – Parameter,
? $F(u) := u + \tau J(b - Au)$ Kontraktionsoperator ?

Ziel: Entwicklung konstruktiver Verfahren zur Bestimmung von u (i. allgem. Näherungsverfahren).

Grundprinzip: Ausarbeiten von Algorithmen, die eine Folge von Näherungslösungen

$$u_n \in X; n = 1, 2, \ldots;$$

$$(\text{bzw. } u_h \in X; h \in \Theta\text{–Indexmenge}, h \to 0)$$

liefern, von denen man erwartet, daß

$$u_n \to u \text{ für } n \to \infty.$$

In diesem Zusammenhang entstehen 3 Grundaufgaben:

1) Konvergenzuntersuchung (a-priori):

(2) d.h. Überprüfung der Beziehung $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ i.S. $\|\cdot\|_X$.

2) Konvergenzgeschwindigkeitsabschätzung (a-priori):

d.h. Abschätzung der Ordnung der Nullfolge $\sigma_n := \|u - u_n\|_X$,
(i. allgem. wird dies versucht, dadurch zu realisieren, daß eine Nullfolge $\{\beta_n\}$ $\Big($ z.B. $\beta_n = |\ln n|^{-\alpha}, \beta_n = n^{-\alpha}, \beta_n = e^{-n}, \beta_n = 1/(n!)$ $\Big)$ bestimmt wird, sodaß gilt:

(3) $$\sigma_n \leq \bar{c}\,\beta_n,$$

wobei $\bar{c} = \text{const.} > 0$, $\bar{c} \neq \bar{c}(n)$, $\bar{c}$ i. allgem. unbekannt !!
Falls $\exists\ \underline{c}, \bar{c} = \text{const.} \neq c(n) : \underline{c}\beta_n \leq \sigma_n \leq \bar{c}\beta_n$, dann schreibt man: $\sigma_n = O(\beta_n)$ für $n \to \infty$.

3) Fehlerabschätzung (a-priori bzw. a-posteriori):

Berechnung bzw. zahlenmäßige Abschätzung des Fehlers $\sigma_n = \|u - u_n\|_X$ der Näherungslösung in der gewählten Norm $\|\cdot\|_X$ des Raumes X.

Das Approximationsschema

Def. 1.1.: (Konvergenz der Näherungslösung)
Gilt $\sigma_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann sprechen wir davon, daß die Folge der Näherungslösungen (NL) $\{u_n\}$ gegen die exakte Lösung u von (1) konvergiert.

Die Mehrzahl aller Methoden zur Konstruktion der Folge $\{u_n\}$ der NL läßt sich 2 Gruppen zuordnen:

1) Iterative Methoden (im Raum X, X i. allgem. ∞-dimensional !!):
Überführen (1) z.B. in eine iterierfähige Form der Art

(4) $$u = F(u) \text{ mit } F : X \to X \text{ (z.B. } F(u) := u + \tau J(b - Au)),$$

sodaß $Au = b \Leftrightarrow u = F(u)$, und definieren den Iterationsprozeß:

$$u_{n+1} = F(u_n), n = 0, 1, \ldots;\ u_0 \in X - \text{geg. Startelement.}$$

Technik zur Untersuchung der Konvergenz = BANACHscher Fixpunktsatz.

Siehe: Kap. 2 für lineare Operatoren A,
Kap. 6 für nichtlineare Operatoren A,
Pkt. 4.2.2 zu Iterationsverfahren zur Auflösung diskr. Gleichungen.

2) Diskretisierungsmethoden

   = Methoden, bei denen der Gleichung (1) einfachere, numerisch „handhabbare" Gleichungen zugeordnet werden.

   Siehe: Kap. 4: Diskretisierungsmethoden (Projektionsverfahren)
   für lineare Operatorgleichungen,
   Kap. 6: für nichtlineare Operatorgleichungen,
   Vorlesung Nu II: RWA [11],
   Vorlesung Nu III: AWA, ARWA [12].

Btr. hier weiter die Diskretisierungsverfahren und entwickeln eine allgemeine Theorie zur Konvergenzuntersuchung, da die Diskretisierungsverfahren von grundsätzlicher Bedeutung für die numerische Behandlung von Operatorgleichungen in ∞–dim. Räumen sind.
Im Gegensatz dazu werden Iterationsverfahren zur Auflösung nichtlinearer diskreter Gleichungssysteme (GS) und verstärkt auch linearer GS genutzt.

Seien
X_n, Y_n – normierte Räume $(\|\cdot\|_{X_n}, \|\cdot\|_{Y_n})$,
die X bzw. Y in irgendeinem Sinne „approximieren":
Bem.: 1) nichtnotwendig $X_n \subset X, Y_n \subset Y$!
2) X_n, Y_n – gewöhnlich endlichdim. (aber nicht immer).

R_n:	$X \to X_n$	Abb. aus X in X_n	Restriktionsoperatoren
Q_n:	$Y \to Y_n$	Abb. aus Y in Y_n	(„Projektoren")
E_n:	$X_n \mapsto X$	Abb. von X_n in X	Erweiterungsoperator („Interpolation")

Ersetzen nun (1) durch die Näherungsgleichungen (= diskrete Ersatzaufgaben)

(5) $$\text{Ges. } \underline{u}_n \in X_n : A_n\underline{u}_n = \underline{b}_n \text{ in } Y_n; \quad n = 1, 2, \ldots;$$

wobei $\underline{b}_n = Q_n b$ und $A_n : X_n \mapsto Y_n$ Abb. von X_n in (auf) Y_n, die A in irgendeinem Sinne „approximiert" (genaue Def. später !)

Bsp.: $A_n = Q_n A E_n \qquad (R(E_n) \subset D(A),\ R(A) \subset D(Q_n))$

Vor.: Die Aufgabe (5) möge für jedes $n \geq n_0$ (= 1 o. B. d. A) eine eindeutige Lösung $\underline{u}_n \in X_n$ besitzen.

$$\Rightarrow \quad \underline{u}_n \in X_n \qquad \text{– Skelett-Lsg. (nichtnotwendig: } \underline{u}_n \in X\text{ !),}$$

(6) $$u_n := E_n \underline{u}_n \in X \qquad \text{– Näherungslsg. von (1).}$$

Bem.: u_n muß nichtnotwendig in $D(A)$ liegen !

- Sehr oft interessiert man sich neben der Größe σ_n für

$$\tau_n = \|R_n u - \underline{u}_n\|_{X_n},$$

d.h. dem Abstand der Skelett-Lsg. $\underline{u}_n$ und der Projektion $R_n u$ der exakten Lösung von (1) in den Raum X_n.

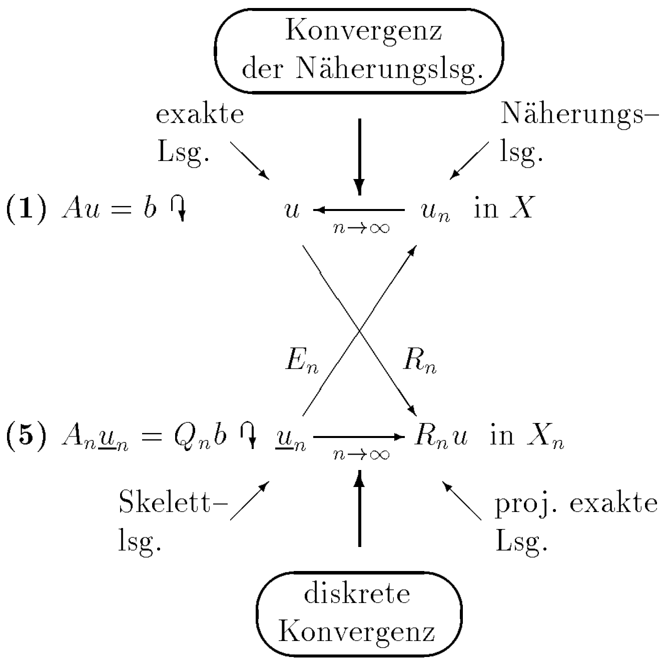
- **Def. 1.2.:** (diskrete Konvergenz)
  Gilt $\tau_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann sagen wir, daß die Skelette der Näherungslösung konvergieren.

- Zusammenfassung: Das Approximationsschema

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right, "R_n"'] & & Y \arrow[d, shift right, "Q_n"'] \\
X_n \arrow[rr, "A_n"] \arrow[u, shift right, "E_n"'] & & Y_n \arrow[u, shift right, "(F_n)"']
\end{tikzcd}$$

$(\dim X_n < \infty)$ $\qquad$ $(\dim Y_n < \infty)$

z.B.
$A_n := Q_n A E_n$



$\Rightarrow$ Grundaufgabe 4): Auflösung von (5) $A_n \underline{u}_n = Q_n b$:

a) iterative Verfahren für lineare (Pkt. 4.2.2) und nichtlin. (Kapitel 6) GS ($\rightarrow$ BANACHscher Fixpunktsatz),

b) direkte Verfahren für lineare GS ($\rightarrow$ GAUSS, CHOLESKY,...).

Das Approximationsschema für lineare Gleichungen

■ Im weiteren werden wir zunächst nur den linearen Fall im Banach–Raum betrachten, obwohl entsprechende Analoga für Konvergenzsätze usw. auch für nichtlineare Fälle formuliert werden können:

X, Y – B-Räume, $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y \rightsquigarrow \|\cdot\|$,
$A : X \to Y$ – linearer (additiver + homogener) Operator
zunächst nichtnotwendig beschränkt.

(7) Ges. $u \in X : Au = b$ für geg. $b \in Y$.

■ Vor.: (7) besitze eine eindeutige Lösung $u \in X$ für bel. fix. $b \in R(A)$.

$$\left[\begin{array}{l} \Leftrightarrow \quad \exists\, A^{-1} : D(A^{-1}) = R(A) \mapsto\!\!\!\!\rightarrow R(A^{-1}) = D(A) \subset X \\ \quad\;\; \text{und } b \in R(A) \end{array}\right]$$

■ (5) wird nun äquivalent zu

(8) Ges. $\underline{u}_n \in X_n : A_n \underline{u}_n = Q_n b, \quad n = 1, 2, \ldots,$

wobei $A_n : X_n \mapsto\!\!\!\!\rightarrow Y_n$ – lin. Operator: $D(A_n) = X_n, R(A_n) = Y_n$

■ Vor.: $\exists\, A_n^{-1} \quad \forall n = 1, 2, \ldots \quad (\forall n \geq n_0)$

■ X_n, Y_n – reel, linear, normiert, endlichdimensional

$R_n : X \to X_n, \quad E_n : X_n \mapsto X, \quad Q_n : Y \to Y_n$ i. allgem. linear

Bem.: Im Praktikum wird ein Beispiel für die Benutzung eines nichtlinearen (aber affine linearen) Erweiterungsoperators E_n gegeben !

■ Folgerungen:

1) $\dim X_n = \dim Y_n$,

2) A_n, A_n^{-1}, E_n – beschränkte (= stetige) Operatoren,

3) A_n, A_n^{-1} sind bei der Wahl von Basen in X_n, Y_n als Matrizen darstellbar.

Bew.: mms.

Die Sätze über die stetige und diskrete Konvergenz

■ (7) $Au = b$ wird durch (8) $A_n \underline{u}_n = Q_n b$ ersetzt, und zwar so, daß (8) der Gleichung (7) in irgendeinem (?) Sinne benachbart ist:

$$\begin{tikzcd}
D(R_n) \cap D(A) \ni u \arrow[r] \arrow[d] & Au \in D(Q_n) \arrow[d] \\
R_n u \arrow[r, "\text{i.a.}"] & \boxed{\begin{array}{c} Q_n Au \\ \neq \\ A_n R_n u \end{array}}
\end{tikzcd}$$

■ **Def. 1.3.:** (Approximation = Konsistenz)
Wir sagen, daß die Gleichungen (8) die Gleichung (7) approximieren (bzw. die Operatoren A_n approximieren den Operator A) auf einem Element $u \in D(A)$, falls

$$\gamma_n(u) := \|\underbrace{A_n R_n u - Q_n A u}_{:=\Psi_n(u)}\|_{Y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

wobei $\Psi_n(u)$ – Approximationsfehler und
$\gamma_n(u)$ – Approximationsmaß
auf u genannt wird.

■ **Satz 1.1:** (Satz über die diskrete Konvergenz)

Wenn $\nu_n := \|A_n^{-1}\| \gamma_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, dann konvergiert die Skelettlsg. $\underline{u}_n$, und es gilt die folgende Abschätzung:

$$\tau_n := \|R_n u - \underline{u}_n\|_{X_n} \leq \nu_n.$$

Beweis: (7) $Au = b$ (8) $A_n\underline{u}_n = \underline{b}_n := Q_n b$

$$\begin{aligned}
\tau_n &= \|R_n u - \underline{u}_n\|_{X_n} = \|\boldsymbol{A}_n^{-1}(\boldsymbol{A}_n R_n u - \underbrace{\mathbf{A_n}\underline{u}_n}_{=Q_n b = Q_n A u})\|_{X_n} \leq \\
&\leq \|A_n^{-1}\|_{[Y_n\to X_n]} \|A_n R_n u - Q_n A u\|_{Y_n} = \\
&= \|A_n^{-1}\| \cdot \gamma_n(u) = \nu_n
\end{aligned}$$

q.e.d.

- **Folgerung 1.1:**

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Approximation } (u)\\ + \\ \text{Stabilität} \\ \Downarrow \\ \text{diskr. Konverg.}\end{array}}$$

Wenn

1) die Operatoren A_n den Operator A auf der Lsg. u approximieren
2) und die Operatoren A_n^{-1} gleichmäßig beschränkt sind,

dann konvergieren die Skelette der Näherungslösungen.

- **Satz 1.2:** (Satz über die Konvergenz der NL = stetige Konvergenz)

Vor.: Wenn

1) $\mu_n := \|E_n\| \cdot \nu_n = \|E_n\| \, \|A_n^{-1}\| \, \gamma_n(u) \to 0$ für $n \to \infty$ und
2) $E_n R_n u \to u$ für $n \to \infty$ (Verträglichkeitsbedingung),

Bh.: dann konvergieren die Näherungslösungen, und es gilt die Abschätzung

$$\sigma_n := \|u - u_n\|_X \leq \mu_n + \|E_n R_n u - u\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Beweis:

$$u_n = E_n\underline{u}_n$$
$$\downarrow$$

$$\begin{aligned}
\sigma_n = \|u - u_n\|_X &\leq \|u - \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{u}\|_X + \|\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{u} - u_n\|_X = \\
&= \|u - E_n R_n u\|_X + \|E_n R_n u - E_n\underline{u}_n\|_X \leq \\
&\leq \|u - E_n R_n u\|_X + \|E_n\|_{[X_n\to X]} \underbrace{\|R_n u - \underline{u}_n\|_{X_n}}_{\textbf{Satz 1.1}} \\
&\leq \|u - E_n R_n u\|_X + \|E_n\| \cdot \nu_n = \|u - E_n R_n u\| + \mu_n
\end{aligned}$$

q.e.d.

Bem.: Benötigt wird nur eine Ungl. der Art

$\|E_n\underline{v}_n - E_n\underline{u}_n\| \le c_n \|\underline{v}_n - \underline{u}_n\| \qquad \forall \underline{v}_n, \underline{u}_n \in X_n.$

↳ Satz 1.2. gilt nun mit $\mu_n = c_n \cdot \nu_n$ (vgl. Ü).

■ **Folgerung 1.2:**

Wenn die Vor. 1) und 2) aus Folgerung 1.1 erfüllt sind und wenn zusätzlich

3) die Operatoren E_n gleichmäßig beschränkt sind und
4) die Verträglichkeitsbed. $E_n R_n u \to u$ auf der Lsg. u erfüllt ist,

dann konvergieren die Näherungslösungen, und es gilt:

$$\|u - u_n\|_X \le \|E_n\|_{[X_n \to X]} \, \|A_n^{-1}\|_{[Y_n \to X_n]} \, \gamma_n(u) + \|u - E_n R_n u\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1.4.2 Bemerkung zum Korrektheitsbegriff

■ X, Y – reelle BANACH-Räume: $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y \to \|\cdot\|$,
$A: X \to Y$ – linearer Operator: $D(A) = \overline{D(A)} \subset X, R(A) \subset Y$
$\exists\, A^{-1},\ b \in R(A)$:

$\Rightarrow \exists!\, u \in D(A): Au = b \qquad (1)$

■ Bei der Behandlung von Aufgaben des Typs (1) ist stets mit gewissen Fehlern zu rechnen:

– Fehler 1. Ordnung: = Fehler der Aufgabenstellung

$(A + B)\tilde{u} = b + \eta + \boxed{\boldsymbol{\delta}} \qquad (\tilde{1})$

wobei
B = „Störung“ des Operators:
B – linear, $D(A) \subset D(B) \subseteq X$,
η = „Störung“ der rechten Seite: $\eta \in Y$.

– Fehler 2. Ordnung: = Fehler, die im Prozeß der Lösung von (1) entstehen, z.B.
(a) Verfahrensfehler,
(b) Rundungsfehler.

Frage: 1) $\exists!$ Lsg. $\tilde{u}$ von $(\tilde{1})$?

2) Inwieweit ist die Lsg. $\tilde{u}$ von $(\tilde{1})$ eine Näherung an die exakte Lsg. u von (1) ?

Def. 1.4:
Der Operator $A : X \to Y$ heißt **korrekt**, wenn $R(A) = Y$ und zu A ein beschränkter Inverser A^{-1} existiert.

Def. 1.5:
Die Aufgabe (1): $Au = b$ heißt **korrekt gestellt**, wenn A ein korrekter Operator ist.

- Wir wollen zeigen:

  Für korrekt gestellte Aufgaben (1) hängt die Lösung stetig $(\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y)$ von den Eingangsdaten der Aufgabe ab,

  d.h. „kleine“ Störungen B und η ziehen nur „kleine“ Änderungen in der Lösung nach sich !

- **Satz 1.3:**

  Vor.: 1) Aufgabe (1) sei korrekt gestellt,

  2) $D(B) = X$,

  3) $A^{-1}B \in [X \to X] = L(X) : \|A^{-1}B\| \leq \varrho < 1.$

  Bh.: Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|u - \tilde{u}\| &\leq \frac{\|A^{-1}B\|}{1 - \|A^{-1}B\|}\|A^{-1}b\| + \frac{1}{1 - \|A^{-1}B\|}\|A^{-1}\|\,\|\eta\| \leq \\
&\leq \frac{\varrho}{1-\varrho}\|A^{-1}\|\,\|b\| + \frac{1}{1-\varrho}\,\|A^{-1}\|\,\|\eta\| = \\
&= \frac{\|A^{-1}\|}{1-\varrho}\,\{\varrho\,\|b\| + \|\eta\|\}\,.
\end{aligned}$$

Beweis: (mms)

Siehe
- Grundvorlesung „Einführung in die Numerik“ (Störungstheorie für GS)
- [5] Analysis III
- Pkt. 2.2.

→ Hinweis: Benutzen Sie den Satz von BANACH

$A = I - C$

Vor.:	1)	$D(C) = X$
	2)	$C \in [X \to X] : \|C\| < 1$
Bh.:	1)	$\exists\, A^{-1} = (I - C)^{-1} \in [X \to X]$
	2)	$A^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k$ (Neumannsche Reihe)
	3)	$\|A^{-1}\| = \|(I - C)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|C\|}$
	4)	$\|(I - C)^{-1} - I\| \leq \frac{\|C\|}{1-\|C\|}$

- Spezialfälle:
  1. $B = 0 :\ \curvearrowright \|u - \tilde{u}\| \leq \|A^{-1}\|\, \|\eta\|$
  2. $\eta = 0 :\ \curvearrowright \|u - \tilde{u}\| \leq \frac{\|A^{-1}B\|}{1-\|A^{-1}B\|} \|A^{-1}\|\, \|b\|$

- **Folgerung 1.3:** Abschätzung des relativen Fehlers:

$$\frac{\|u - \tilde{u}\|}{\|u\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}} \left\{ \frac{\|B\|}{\|A\|} + \frac{\|\eta\|}{\|b\|} \right\},$$

wobei $\kappa(A) := \|A\|\, \|A^{-1}\|$ = Kondition des Operators A.

1.4.3 Bemerkungen zum Stabilitätsbegriff

- Stabilität = gleichmäßige, d.h. dimensionsinvariante Übertragung der Korrektheit auf die Näherungsgleichungen !

- Ausgangsaufgabe : $Au = b$ $\curvearrowright u \in D(A)$– ex. Lsg.

  1. Lösungsetappe (= diskr. Ersatzaufg.): $A_n \underline{u}_n = Q_n b$ $\curvearrowright \underline{u}_n \in X_n$ – Skelettlsg.

  2. Lösungsetappe (= NL): $u_n = E_n \underline{u}_n$ $\curvearrowright u_n \in X$ – Näherungslsg.

  $n = 1, 2, 3, \ldots \to \infty$ $(h \to 0)$? Korrektheit von A ?

- Phänomen: „Korrektheitseigenschaft“ der Ausgangsaufgabe wird nicht durch jedes Näherungsverfahren automatisch auf die diskreten Ersatzaufgaben übertragen bzw. kann für wachsendes n verlorengehen !

- Aufgabe: Konstruktion solcher numerischer Verfahren, die die Korrektheitseigenschaft der Ausgangsaufgabe stabil gegenüber Dimensionserhöhung $n \to \infty$ $(h \to 0)$ auf die diskreten Ersatzaufgaben übertragen !

- **Def. 1.6:**

Die diskrete Ersatzaufgabe (= Näherungsgleichung)

$$A_n \underline{u}_n = \underline{b}_n := Q_n b$$

heißt gleichmäßig korrekt gestellt, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) $\forall$ (fix) $\underline{b}_n \in Y_n \; \exists! \; \underline{u}_n \in X_n : \quad A_n \underline{u}_n = \underline{b}_n$,
d.h. $\exists \; A_n^{-1} : R(A_n) = Y_n \mapsto X_n, \quad \forall n \geq n_0 = 1$ (o. B. d. A.).

2) $\underline{u}_n$ hängt stetig von der rechten Seite ab, wobei diese Abhängigkeit gleichmäßig bzgl. n ist:

$\|\underline{u}_n\|_{X_n} \leq c\|\underline{b}_n\|_{Y_n}$ (a-priori Abschätzung)

mit $c = \text{const.} > 0 : c \neq c(n)$!!,
d.h. $\|A_n^{-1}\| \leq c = \text{const.}, \quad \forall n \geq n_0 = 1$ (o. B. d. A.).

- Bemerkungen:

1) Gleichmäßig korrekt gestellte Ersatzaufgaben wollen wir auch stabil nennen.

2) Wegen Folgerung 1.1 aus Satz 1.1 reduziert sich der Beweis der Konvergenz der Skelettlösungen (= diskrete Konvergenz) auf den Nachweis,
a) der Approximation von $Au = b$ durch $A_n \underline{u}_n = \underline{b}_n$ auf der Lsg. u,
b) der Stabilität der Ersatzaufgaben $A_n \underline{u}_n = \underline{b}_n \; \forall n \geq n_0$.

3) Zusammenfassung:

$$\boxed{\text{Approximation } (u) + \text{Stabilität} \Rightarrow \text{diskrete Konvergenz}}$$

2 Funktionalanalytische Grundlagen zur Behand–lung linearer Operatorgleichungen

2.1 Der Satz von Banach-Steinhaus und die punktweise Konvergenz einer Folge linearer Operatoren

2.1.1 Motivation

■ **Beispiel 2.1:** Quadraturformeln (QF)

Sei $X = C[a,b]$, $\|u\|_X := \max\limits_{a \le t \le b} |u(x)|$, $Y = I\!R$.

$$
\begin{array}{lll}
Q : X \to Y: & Qu := \int\limits_a^b u(x)\,dx & (1) \\
\big\downarrow \leftarrow \text{Quadratur-formel} & \big\uparrow_{n\to\infty} \text{ ? Punktweise (elementweise) Konvergenz von } \{Q_n\} \text{ gegen } Q. & \\
Q_n : X \to Y: & Q_n u := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{(n)} u(t_k^{(n)}) & (1)_n \\
 & n \in I\!N \quad (n = 0, 1, \ldots), & \\
 & a_k^{(n)} \quad \text{- Quadraturgewichte,} & \\
 & t_k^{(n)} \quad \text{- Stützstellen (Knoten).} &
\end{array}
$$

Die Frage der Konvergenz der Quadraturformeln gegen das Integral führt auf die Untersuchung der punktweisen Konvergenz der Folge $\{Q_n\}$ gegen Q.

■ **Beispiel 2.2:** Polynominterpolation

Sei $X = C[a,b]$, $\|u\|_X := \max\limits_{a \le t \le b} |u(x)|$, $Y = X$.

$\Pi_n = \{p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k\} \subset X$ - Menge aller Polynome vom Grade $\le n$,

$a \le t_0^{(n)} \le t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \le b$ - Folge von Intervallunterteilungen von $[a,b]$,

Für geg. $u \in X$ $\exists!$ Polynom $P_n u \in \Pi_n$:

$$P_n u\left(t_k^{(n)}\right) = u\left(t_k^{(n)}\right), \ k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$
\begin{array}{ll}
P_n u(x) \xrightarrow[\text{gl.}]{n\to\infty} u(x) \quad \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow & P_n u \to I u = u \quad \forall u \in X \\
 & \text{d.h.} \\
\forall u \in X = C[a,b] & \{P_n\} \text{ konverg. pktw. gegen } I
\end{array}
$$

- **Beispiel 2.3:** Approximation 2π-periodischer Funktionen durch Fourier-Reihen

  $\rightarrow$ siehe $\boxed{\text{Ü V}}$.

- **Beispiel 2.4:** $u_n = A_n^{-1}b \rightarrow u = A^{-1}b \quad \forall b \in Y$,
  falls $A^{-1}, A_n^{-1} \in [Y \rightarrow X]$.

2.1.2 Der Satz von Banach-Steinhaus

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der punktweisen (pktw.) Konvergenz einer Folge $\{A_n\}$ linearer, beschränkter Operatoren ist der Satz von Banach-Steinhaus.

Zum Beweis des Satzes von Banach-Steinhaus •
benötigt man

- den Satz von Baire und
- das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit •

Satz 2.1: (Satz von Baire)
Sei X B–Raum. Falls

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

wobei die Mengen X_n abgeschlossen sind ($X_n = \bar{X}_n$), dann $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : X_{n_0}$ besitzt einen inneren Punkt, d.h. $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$.

Beweis: (indirekt) [2] [Alt H.W.: Lineare Funktionsanalysis, Springer, S. 204]

- Ann.: $\overset{\circ}{X}_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $\nexists\ n_0 \in \mathbb{N} : X_{n_0}$ besitzt einen inneren Punkt.
- Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\underset{\neq \emptyset}{U \subset X\text{: offen}} \overset{\text{mms}}{\Longrightarrow} \underset{\neq \emptyset}{U \setminus X_n \text{ offen}} \Longrightarrow \exists \text{ Kugel } \bar{K}(u,\epsilon) \subset U \setminus X_n \text{ mit } 0 < \epsilon \leq 1/n.}$
- Folglich können induktiv Kugeln $K(u_n, \epsilon_n)$ gewählt werden:

$$\bar{K}(u_n, \epsilon_n) \subset K(u_{n-1}, \epsilon_{n-1}) \setminus X_n : \epsilon_n \leq 1/n.$$

- Da dann $u_l \in K(u_n, \epsilon_n)\ \forall l \geq n$ und $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ist $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge
  $\Rightarrow \exists\ u = \lim_{n\to\infty} u_n \in X \Rightarrow u \in \bar{K}(u_n, \epsilon_n)\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow u \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X \quad \lightning$
  da $\bar{K}(u_n, \epsilon_n) \cap X_n = \emptyset\ \forall n \in \mathbb{N}$

q.e.d.

Satz 2.2: (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

Vor.: X – B-Raum,
Y – normierter Raum,
$\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset [X \to Y]$: punktweise, gleichmäßig in λ †, d.h.
$$\forall u \in X : \exists\, c_u = \text{const.} \geq 0 : \|A_\lambda u\| \leq c_u < \infty, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{2}$$

Bh.: Dann ist die Familie $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ gleichmäßig †, d.h.
$\exists\, c = \text{const.} > 0, c \neq c(\lambda) : \|A_\lambda\| \leq c \quad \forall \lambda \in \Lambda.$

Beweis: $\|A_\lambda\| := \sup\limits_{u \in X} \frac{\|A_\lambda u\|}{\|u\|} = \sup\limits_{\|u\|=1} \|A_\lambda u\| \leq c$!

Sei
$$X_n = \{u \in X : \|A_\lambda u\| \leq n \quad \forall \lambda \in \Lambda\} = \bar{X}_n.$$

Wegen (2) gilt offenbar
$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

X - B-Raum, $X_n = \bar{X}_n$ - abgeschlossen ($A_\lambda \in [X \to Y]$).

Satz 2.1 von Baire: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : X_{n_0}$ besitzt einen inneren Pkt. u_0,
d.h. $\exists\, r_0 > O : \bar{K}(u_0, r_0) := \{u \in X : \|u - u_0\| \leq r_0\} \subset X_{n_0}$.

Dann folgt $\forall u \in X$ mit $\|u\| = 1$:

$$\begin{aligned} \|A_\lambda u\| &= \frac{1}{r_0}\|A_\lambda(r_0 u)\| = \frac{1}{r_0}\|A_\lambda(\underset{\in \bar{K}(u_0,r_0) \subset X_{n_0}}{r_0 u + u_0}) - A_\lambda(\underset{\pitchfork\ \bar{K} \subset X_{n_0}}{u_0})\| \leq \\ &\leq \frac{1}{r_0}(\|A_\lambda(r_0 u + u_0)\| + \|A_\lambda u_0\|) \leq \frac{2n_0}{r_0} =: c. \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 2.3: (Banach-Steinhaus)

Seien X, Y – B-Räume und
$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [X \to Y]$ – Folge linearer, † Operatoren.

Dann gilt:

(i) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n u \Leftrightarrow$ (a) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n u$
$\forall u \in X$ $\qquad\qquad\qquad$ $\forall u \in D \subset X : \bar{D} = X$,
(b) Folge $\{A_n\}$ ist gleichm. †, d.h.
$\exists\ c = \text{const.} \geq 0, c \neq c(n)$:
$\|A_n\| \leq c \quad \forall n \in I\!N$.

(ii) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} A_n u \quad \forall u \in X$ existiert und (b) gilt, dann ist der Grenzoperator

$$A : X \mapsto Y \text{ mit } Au := \lim_{n\to\infty} A_n u \quad \forall u \in X$$

linear und beschränkt ($A \in [X \to Y]$) mit

$$\|A\| \leq c.$$

<u>Beweis:</u>

(i) $\Rightarrow$ (a) trivial.

$\Rightarrow$ (b) $\{A_n u\}$ ist konvergent und daher †, d.h. $\|A_n u\| \leq c_u \quad \forall u \in X$
Satz 2.2 $\Rightarrow \|A_n\| \leq c \quad \forall n \in I\!N$.

(a) $\wedge$ (b) $\Rightarrow$ (i)
Sei $u \in X$. Da X ein Banach–Raum ist, langt es, zu zeigen, daß $\{A_n u\}$ eine <u>Cauchy–Folge</u> ist !

D dicht in X, d.h. $\forall \epsilon > 0\ \exists\ v \in D : \|u - v\| \leq \epsilon$.

(a) $\Rightarrow \exists\ N \in I\!N : \|A_m v - A_n v\| \leq \epsilon \quad \forall m, n \geq N$.

Daher gilt für $m, n \geq N$:

$$\begin{aligned} &\|A_m u - A_n u\| \leq \\ &\leq \underbrace{\underbrace{\|A_m u - A_m v\|}_{\|A_m\|\|u-v\|}}_{c\cdot\epsilon} + \underbrace{\|A_m v - A_n v\|}_{\leq \epsilon} + \underbrace{\underbrace{\|A_n v - A_n u\|}_{\|A_n\|\|v-u\|}}_{c\cdot\epsilon} \leq \\ &\leq (1 + 2c)\,\epsilon \end{aligned}$$

#

(ii) A linear trivial (mms).
A †: $\|Au\| \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n u\| \underset{(b)}{\leq} c \cdot \|u\|$.

q.e.d.

Bemerkung:

Für den Fall $Y = I\!R$ (bzw. $\mathbb{C}$) liefert der Satz von Banach-Steinhaus eine Charakterisierung der Schwachen*-Konvergenz von Folgen $\{f_n\} \subset X^*$.

2.1.3 Anwendung auf Quadraturformeln

- Eine direkte Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus auf Quadraturformeln (QF) liefert:

  Korollar 2.1:
  Die QF $(1)_n$ konvergiert $\forall u \in C[a,b]$ gegen das Integral (1), d.h.

  $$Q_n u \xrightarrow[n\to\infty]{} Qu \quad \forall u \in X = C[a,b],$$

  genau dann, wenn

  (a) $Q_n u \xrightarrow[n\to\infty]{} Qu \; \forall u \in D \subset X : \bar{D} = X = C[a,b]$
  (z.B. D = Menge aller Polynome $= P$),

  (b) $\exists\ c = \text{const.} > 0, c \neq c(n) : \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k^{(n)}| \leq c \quad \forall n \in I\!N.$

  Beweis:
  folgt sofort aus Satz 2.3 und

  $$\begin{aligned} \|Q_n\| &= \|Q_n\|_{[X\to Y]} := \sup_{u\in X} \frac{\|Q_n u\|_Y}{\|u\|_X} = \\ &= \sup_{\substack{u\in C[a,b]\\ u\neq 0}} \frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{(n)} u\left(t_k^{(n)}\right)\right|}{\max\limits_{x\in[a,b]} |u(t)|} \overset{!}{\underset{\uparrow}{=}} \sum_{k=0}^{n} \left|a_k^{(n)}\right|. \end{aligned}$$

  a) $\leq$ trivial (mms)

  b) Realisierung durch $u(t_k^{(n)}) = \text{sign } a_k^{(n)}$ (lin.) Interpolant

  q.e.d.

- Beispiel für in $C[a,b]$ konvergente QF:
  = Gaußsche QF (vgl. Vorlesung „Einführung in die Numerische Mathematik“):

  - Die $(n+1)$-Punkte Gaußsche QF beruht auf einer Polynominterpolation mit den Nullstellen des Legrendre-Polynoms vom Grade $n+1$ als Stützstellen: $Q_n u$.

- Der Exaktheitsgrad ist maximal und $= 2n+1$:

$$Q_n p = Qp \quad \forall p \in \Pi_{2n+1}.$$

Folglich konvergieren QF trivialerweise $\forall$ Polynome, d.h.

(a) $Q_n p \xrightarrow[n\to\infty]{} Qp \quad \forall p \in D = P =$ Menge aller Polynome, $\bar{D} = X$ (Weierstraß) ist erfüllt.

- Da die Gewichte $a_k^{(n)}$ der Gaußschen QF <u>positiv</u> sind und die QF für <u>konstante Fkt. exakt</u> sind, gilt

(b) $\|Q_n\| = \sum\limits_{k=0}^{n} \left|a_k^{(n)}\right| = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \cdot 1 = \int\limits_a^b 1\,dx = b-a$

- Banach-Steinhaus liefert: (a) $\wedge$ (b) $\Rightarrow$ (i) $Q_n u \to Qu \quad \forall u \in X = C[a,b]$, d.h. die Gaußschen QF konvergieren also für <u>alle</u> stetigen Funktionen.

■ <u>Beispiel für in $C[a,b]$ nichtnotwendig konvergente QF:</u>
= Newton-Cotes-QF (vgl. Vorlesung „Einführung in die Numerische Mathematik“)

- Die $(n+1)$-Punkte Newton-Cotes QF beruht auf einer Polynominterpolation mit äquidistanten Stützpunkten.
- Exaktheitsgrad:

$$Q_n p = Qp \quad \forall p \in \Pi_d \text{ mit } d = \begin{cases} n+1, & \text{falls } n \text{ – gerade} \\ n, & \text{falls } n \text{ – ungerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (a) $Q_n p \to p \quad \forall p \in D = P$ $(\bar{D} = X)$.

- $\left\{a_k^{(n)}\right\} > 0$ für $n \le 7$ und $n = 9$.

Für alle anderen Werte von n treten negative $a_k^{(n)}$ auf !

Für $[a,b] = [-1,+1]$ beweist Braß (1977) in [3]
[ ] Braß H.: Quadraturverfahren,
Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1977.
folgende asymptotische Aussage:

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{n \ln^2 n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n-k}\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

für $k \neq 0, n$:

$\Rightarrow |a_k^{(n)}| \to \infty$ für $n \to \infty, k \neq 0, 1$ <u>fix</u>,

$\Rightarrow \|Q_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$.

- (1) $\Leftrightarrow \begin{matrix}\text{(a)}\\ \text{(b)}\end{matrix} \ \lightning \ \exists\, u \in X = C[a,b]:\ Q_n u \not\to Qu$ für $n \to \infty$!

  Bsp.: $u(x) = 1/(1+25x^2)$ für $x \in [-1,+1]$.

2.2 Kontraktivität

- Btr. lineare Operatorgleichung

  (1) Ges. $u \in X : Au = b$ in Y für geg. $b \in Y$

  ! h usw. ! (Ausgangsaufgabe bzw. diskrete Ersatzaufgabe)

  mit $A \in [X \to Y]$ und setzen voraus, daß die Operatorgleichung (1) korrekt gestellt ist.

- **Def. 2.1:**

  $A \in [X \to Y]$ heißt regulär $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar und $A^{-1} \in [Y \to X]$;
  $\Leftrightarrow$ A ist korrekt;
  $\Leftrightarrow$ (1) ist korrekt gestellt.

- Sei $X = Y$ (Bsp.: X – H-Raum, $Y = X^*$ und X^* kann durch X identifziert werden)
  Der Einheitsoperator $I = I^{-1} \in L(X) = [X \to X]$ ist natürlich regulär.

  Frage: I regulär $\Rightarrow A = I - K$ regulär, falls K „klein“ (?) ist ?

  Eine Bedingung für die „Kleinheit“ von K läßt sich mit Hilfe des Spektralradius formulieren.

- **Lemma 2.1:**

  Vor.: X – normierter Raum,
  $T \in L(X) = [X \to X]$.

  Bh.: Dann konvergiert die Folge $\left\{\|T^k\|^{\frac{1}{k}}\right\}$.

  Beweis:
  Sei $\varrho = \inf\limits_{k \in I\!N} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$:

  $\Rightarrow\ \forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, m = m(\epsilon) \in I\!N:\ \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \le \varrho + \epsilon.$

Jedes $k \in \mathbb{N}$ läßt sich in der Form

$$k = n_k \cdot m + l_k, \ 0 \leq l_k < m,$$

darstellen. Dann gilt

$$\|T^k\| \leq \|T^m\|^{n_k} \, \|T\|^{l_k}.$$

Wegen $\frac{l_k}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ und $\frac{n_k}{k} \to \frac{1}{m}$ folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \limsup_{k\to\infty} \|T^m\|^{\frac{n_k}{k}} \cdot \|T\|^{\frac{l_k}{k}} = \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \varrho + \epsilon.$$

<u>Also:</u> $\limsup\limits_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$. **q.e.d.**

■ **<u>Def. 2.2:</u>** (Spektralradius)

Sei X – normierter Raum und $T \in L(X) = [X \to X]$.
Dann heißt

$$\varrho(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \quad (\leq \|T\|)$$

<u>Spektralradius</u> von T.

■ **<u>Satz 2.4:</u>** (Neumannsche Reihe; siehe [5] ANALYSIS III)

<u>Vor.:</u> X – B-Raum,
$K \in L(X) = [X \to X]$ (= BANACH–Algebra ≡ norm. Ring),
$\varrho(K) < 1$.

<u>Bh.:</u> Dann ist $I - K$ regulär, und es gilt

$$(I-K)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} K^k \text{ (Neumannsche Reihe).}$$

<u>Beweis:</u>

- Die Konvergenz der Neumannschen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} K^k$ folgt aus dem <u>Wurzelkriterium</u> ([5] ANALYSIS, S. 35):

$$\varrho(K) = \lim_{k\to\infty} \|K^k\|^{\frac{1}{k}} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|K^k\| \text{ konv. in } \mathbb{R}^1 \overset{\text{mms}}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} K^k \text{ konv. in } L(X).$$

(absolute Konv. von $\sum K^k$)

- Weiters gilt:

$$(I-K)\sum_{k=0}^{n} K^k = \sum_{k=0}^{n} K^k(I-K) = I - K^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} I \text{ in } L(X),$$

da $K^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ in $L(X)$.
Tatsächlich,
wegen $\varrho(K) < 1 \quad \exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ und $q \in [0,1)$:
$\|K^k\| \leq q^k < 1 \quad \forall k \geq k_0$,
d.h. $K^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$. **q.e.d.**

<u>Bem.:</u>

$$\varrho(K) < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} K^k \text{ konvergiert in } L(X) \qquad \text{(o.k.)},$$

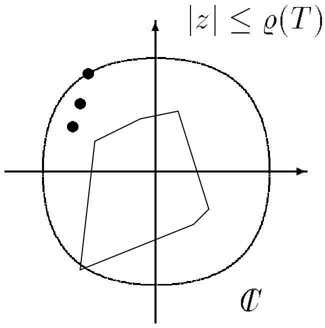
$$\varrho(K) > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} K^k \text{ divergiert in } L(X) \qquad \text{(mms)}.$$

■ **<u>Korollar 2.2:</u>**

Sei X – komplexer B-Raum und $T \in L(X)$.
Dann gilt:

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varrho(T)\},$$

wobei $\sigma(T)$ = $\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ ist nicht regulär$\}$ =
= Menge der singulären Werte =
= Spektrum.



Beweis: (indirekt)
Ann.: Sei $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| > \varrho(T)$.
Dann folgt wegen

$$T - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right) \quad \text{und} \quad \varrho\left(\frac{1}{\lambda} T\right) = \frac{1}{|\lambda|}\, \varrho(T) < 1$$

aus Satz 2.4, daß $T - \lambda I$ regulär ist und folglich $\lambda \notin \sigma(T)$. $\lightning$

q.e.d.

- **Def. 2.3:** (Eigenwerte, Eigenvektoren, Punktspektrum)
  - $\lambda \in C$ heißt Eigenwert (EW) von $T \in L(X)$ $\Leftrightarrow$ $T - \lambda I$ ist nicht injektiv, d.h. $\ker\,(T - \lambda I) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.
  - Nichttriviale Elemente aus $\ker\,(T - \lambda I)$ heißen Eigenvektoren.
  - $\sigma_p(T) = \{\lambda \in C : \lambda \text{ EW}\}$ = Punktspektrum von $T \subset \sigma(T)$.

- Bemerkungen:

  Sei X endlichdimensional und $T \in L(X)$. Dann gilt:

  1) $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
  2) $\varrho(T)$ = Betrag des betragsgrößten EW $= \max\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, d.h. mindestens ein Element aus $\sigma(T)$ liegt auf dem Rand der Kreisscheibe $\{z \in C : |z| \leq \varrho(T)\}$.

- Btr. (1) $Au = b$ mit geg. $b \in Y = X$ und $A = I - K$, d.h.
  Ges. $u \in X : u = Ku + b$ in X.

  Falls X – B-Raum,
  $K \in L(X)$,
  $\sigma(K) < 1$,

  dann liefert Satz 2.4 sofort folgende Aussagen:

  1) (1) ist korrekt gestellt, d.h. $\exists\, A^{-1} = (I - K)^{-1} \in L(X)$;
  2) $u = (I - K)^{-1} b = \sum\limits_{k=0}^{\infty} K^k b \xleftarrow[n \to \infty]{} u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} K^k b$ in X;
  3) $$\begin{aligned} u_{n+1} &= K^{n+1} b + K^n b + \ldots + K b + b = \\ &= K \underbrace{(K^n b + K^{n-1} b + \ldots + b)}_{u_n} + b = K u_n + b \quad \text{mit } \underline{u_0 = b}. \end{aligned}$$

■ **Satz 2.5:** (Verallgemeinerter Banachscher Fixpunktsatz)

Vor.: X – B-Raum,
$K \in L(X)$,
$\varrho(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \|K^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$,
$b \in X$.

Bh.: Dann konvergiert die Folge

$$(2) \qquad u_{n+1} = Ku_n + b$$

für bel. Startwerte $u_0 \in X$ gegen die eindeutige Lsg. u der Gleichung

$$(1) \qquad u = Ku + b$$

mit r-linearer Konvergenzgeschwindigkeit, d.h. $\exists\, n_0 \in I\!N$ und q mit $0 \le q < 1$:

$$(3) \qquad \|u_n - u\| \le q^n \|u_0 - u\| \quad \forall n \ge n_0.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} u_n &= Ku_{n-1} + b = K(Ku_{n-2} + b) + b = \ldots = \\ &= K^{n-1}b + \ldots + Kb + b + K^n u_0 \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} K^k b}_{\downarrow\, n\to\infty \atop u} + \underbrace{K^n(u_0 - b)}_{\downarrow\, n\to\infty\ ? \atop 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ in } X \end{aligned}$$

Tatsächlich,
wegen $\varrho(K) < 1$ $\exists\, n_0 \in I\!N$ und $q \in [0,1) : \|K^n\| \le q^n < 1 \quad \forall n \ge n_0$;

$$\Rightarrow \|K^n(u_0 - b)\| \le \|K^n\| \|u_0 - b\| \underset{\forall n \ge n_0}{\overset{\uparrow}{\le}} q^n \|u_0 - b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Fehlerabschätzung (3) folgt unmittelbar aus der Darstellung ($\forall n \ge n_0$)

$$u_n = Ku_{n-1} + b \equiv Ku_{n-1} + (I - K)u, \text{ d.h.}$$
$$u_n - u = K(u_{n-1} - u) = \ldots = K^n(u_0 - u).$$

q.e.d.

■ **Beispiel 2.4:** (Anfangswertproblem: Satz von Picard und Lindelöf)

Btr. AWP für System gewöhnlicher Dgl.

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + K(t)u(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{T} = [0,T] \\ u(0) = y \quad \text{(AB)} \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} &u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))^T \in [C^1[0,T]]^N \text{ ges.}, \\ &y = (y_1, \ldots, y_N)^T \in I\!R^N \text{ geg.}, \\ &f = f(t) = (f_1(t), \ldots, f_N(t))^T \in [C[0,T]]^N \text{ geg.}, \\ &K(t) = [K_{ij}(T)]_{i,j=\overline{1,N}} \text{ mit geg. } K_{ij}(t) \in C[0,T] \quad \forall i,j = \overline{1,N}. \end{aligned}$$

Dann $\exists !\ u(t) \in [C^1[0,T]]^N$: (4).

Beweisskizze:

1) Übergang zur äquivalenten Integralgleichung: $\int\limits_0^t (4)\, d\tau$:

$$(4) \qquad u(t) = -\int\limits_0^t K(\tau)u(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau + y$$

$$(1) \qquad \boxed{\text{Ges. } u \in X = [C[0,T]]^N : u = Ku + b \text{ in } X}$$

$$\begin{aligned} \text{mit}\quad Ku \quad &:= \quad -\int\limits_0^t K(\tau)u(\tau)\, d\tau,\ b := \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau + y, \\ \|u\|_X \quad &:= \quad \max_{i=\overline{1,N}} \max_{0\le t\le T} |u_i(t)| = \max_{0\le t\le T} \max_{i=\overline{1,N}} |u_i(t)|, \\ \|K(\tau)\| \quad &:= \quad \max_{0\le t\le T} \underbrace{\max_{i=\overline{1,N}} \sum_{j=1}^N |K_{ij}(\tau)|}_{\text{Zeilensummennorm}} \quad \le M = \text{ const.}, \end{aligned}$$

da $K_{ij}(\tau) \in C[0,T] \quad \forall i,j = \overline{1,N}$.

2) Zeigen (der Einfachheit halber für $N = 1; N > 1$ mms)

$$\|K^m\|_{[X\to X]} \le \frac{M^m \cdot T^m}{m!}.$$

Tatsächlich,

$$K^m u(t) = (-1)^m \int\limits_0^t K(t_1) \int\limits_0^{t_1} K(t_2) \cdot \ldots \cdot \int\limits_0^{t_{m-1}} K(t_m)u(t_m)\, dt_m \cdot \ldots \cdot dt_1$$

Folglich

$$\|K^m u\|_X \leq M^m \underbrace{\int\limits_0^T dt_1 \int\limits_0^T dt_2 \cdot \ldots \cdot \int\limits_0^T dt_m}_{=\frac{T^m}{m!}} \|u\|_X \qquad \#$$

3) <u>Damit gilt:</u> $\varrho(K) = \lim\limits_{m\to\infty} \|K^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \lim\limits_{m\to\infty} \frac{M\cdot T}{(m!)^{\frac{1}{m}}} = 0$

$\Rightarrow$ a) $\exists!\ u \in X = [C[0,T]]^m : (1) \equiv (4)$

b) $\|u_n - u\|_X \leq \underbrace{\frac{M^m T^m}{m!}}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0} \|u_0 - u\|_X$ 0, überlinear, da $\sqrt[m]{\ldots} \to 0$!

4) $u(t) = -\int\limits_0^t \underbrace{K(\tau)u(\tau)}_{\in X}\, d\tau + \int\limits_0^t \underbrace{f(\tau)}_{\in X}\, d\tau + \underbrace{y}_{\in I\!R^N} \quad \in [C^1[0,T]]^N$!

$\uparrow$ Regularität (i.S. Glattheit)

q.e.d

<u>Bemerkung:</u>

1) Bsp. für $\underbrace{\varrho(K) \equiv 0 < 1}_{\Rightarrow \text{Satz 2.5 anw.}}$ und $\underbrace{\|K\| \text{ i.a. } \overset{\text{mms}}{\not<} 1}_{\Rightarrow \text{ Satz 2.6 nicht anwendbar}}$!

2) Vgl. auch [5] ANALYSIS III, S. 35: Volterra'sche Integralgleichungen:

$$u(t) - \int\limits_0^t K(t,\tau)u(\tau)\, d\tau = y(t), t \in [0,1].$$

3) Numerik III [12]: Semidiskrete Methode für parab. PDgl.:
$f \in [L_2(0,T)]^N, K_{ij} \in L_\infty(0,T); u \in [W_2^1(T)]^N$.

- $\|K\| < 1 \Rightarrow \varrho(K) = \lim\limits_{k\to\infty} \|K^k\|^{\frac{1}{k}} \le \|K\| < 1.$

  Die stärkere Vor. $\|K\| < 1$ erlaubt eine Reihe von Abschätzungen:

  Satz 2.6: (Banachscher Fixpunktsatz)

  Vor.: X – B-Raum,
  $K \in L(X) : \|K\| < 1,$
  $b \in X.$

  Bh.: 1. Es gelten alle Aussagen der Sätze 2.4 – 2.5.

  2. Die Folge $\{u_n\}_{n=0,1,\ldots}$: (2)

  $$u_{n+1} = Ku_n + b, n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

  konvergiert q-linear für bel. Startwert $u_0 \in X$:

  $$\|u_{n+1} - u\| \le q\|u_n - u\| \le q^{n+1}\|u_0 - u\|$$

  mit $q \overset{(\ge)}{=} \|K\|$.

  3. Es gelten folgende Fehlerabschätzungen:

  a) a-priori Schranke:
  $\|u_n - u\| \le \frac{\|K\|^n}{1-\|K\|}\|u_1 - u_0\|,$

  b) a-posteriori Schranke:
  $\|u_n - u\| \le \frac{\|K\|}{1-\|K\|}\|u_n - u_{n-1}\|.$

  4. Es gelten folgende Resultate zu $(I - K)^{-1}$, vgl. Pkt. 1.4.2:

  1) $\exists\, A^{-1} = (I - K)^{-1} \in L(X)$ (Satz 2.4),

  2) $A^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} K^k$ (Satz 2.4),

  3) $\|A^{-1}\| = \|(I - K)^{-1}\| \le 1/(1 - \|K\|),$

  4) $\|(I - K)^{-1} - I\| \le \frac{\|K\|}{1-\|K\|}.$

Beweis:

zu 1. o.k.

zu 2.
$$\begin{array}{r|l} & u_{n+1} = Ku_n + b \quad = Ku_n + (I-K)u \\ - & u = Ku + b \\ \hline & u_{n+1} - u = K(u_n - u) \quad \Rightarrow \|u_{n+1} - u\| \leq \|K\|\,\|u_n - u\| \quad \forall\, n \in I\!N \end{array}$$

#

zu 3. Wegen

$$\begin{aligned} \|u_{m+1} - u_m\| &= \|Ku_m + b - (Ku_{m-1} + b)\| \\ &= \|K(u_m - u_{m-1})\| \leq \|K\|\,\|u_m - u_{m-1}\| \end{aligned}$$

gilt für $k > n \geq l$ $\quad (k >> n \geq l:$ später $k \to \infty)$

$$\begin{aligned} \|u_k - u_n\| &\leq \|u_k - u_{k-1}\| + \|u_{k-1} - u_{k-2}\| + \ldots + \|u_{n+1} - u_n\| \\ &\leq (\|K\|^{k-l} + \|K\|^{k-l-1} + \ldots + \|K\|^{n+1-l})\|u_l - u_{l-1}\| \\ &\leq \Big(\sum_{m=n+1-l}^{\infty} \|K\|^m\Big)\,\|u_l - u_{l-1}\| \qquad (5) \\ &= \|K\|^{n+1-l}\frac{1}{1-\|K\|}\|u_l - u_{l-1}\| \end{aligned}$$

$k \to \infty \curvearrowright u_k \to u$, d.h. (5) geht über in

$$\boxed{\|u - u_n\| \leq \frac{\|K\|^{n+1-l}}{1-\|K\|}\|u_l - u_{l-1}\|}$$

$\Rightarrow$ a) für $l = 1$ #
b) für $l = n$ #

zu 4. 1) o.k. (Satz 2.4),

2) o.k. (Satz 2.4),

3) $\|(I-K)^{-1}\| = \|\sum\limits_{k=0}^{\infty} K^k\| \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|K\|^k = \frac{1}{1-\|K\|}$.

4) $\|(I-K)^{-1} - I\| = \|\sum\limits_{k=1}^{\infty} K^k\| = \|K\sum\limits_{k=0}^{\infty} K^k\| \leq \|K\|\|\sum\limits_{k=0}^{\infty} K^k\| \leq \frac{\|K\|}{1-\|K\|}$.

q.e.d.

■ Bsp.: Pkt. 2.3 und Kap. 4.

■ Alle bisherigen Regularitätsaussagen bezogen sich auf „kleine“ Störungen K ($\varrho(K) < 1$ bzw. $\|K\| < 1$) des Einheitsoperators I.
Diese Aussagen können aber leicht auf „kleine“ Störungen ΔA regulärer Operatoren A zurückgeführt werden.

- $A \in L(X),\ A^{-1} \in L(X)$.
- Btr. $\tilde{A} = A + \Delta A \ \in L(X)$.

  Frage: Unter welchen Bd. $\exists\ \tilde{A}^{-1} \in L(X)$?

Satz 2.7: (Störungssatz I)

Vor.: X – B-Raum,
$A \in L(X)$ regulär, d.h. $\exists\ A^{-1} \in L(X)$,
$\tilde{A} = A + \Delta A \in L(X)$ bzw. $\Delta A \in L(X)$.

Bh.: 1. $\varrho(I - A^{-1}\tilde{A}) = \varrho(-A^{-1}\Delta A) < 1 \Rightarrow \tilde{A}$ regulär.

2. $\|\underbrace{\tilde{A} - A}_{=\Delta A}\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow$ a) $\varrho(I - A^{-1}\tilde{A}) < 1$,

b) $\|\tilde{A}^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}$.

Beweis:

zu 1.: $\tilde{A} = A[I - \overbrace{\underbrace{(I - A^{-1}\tilde{A})}}^{K}] \Rightarrow \tilde{A}^{-1} = [\qquad]^{-1}A^{-1}$.

$\varrho(I - A^{-1}\tilde{A}) < 1 \quad \Rightarrow [\qquad]^{-1}\ \exists$ (Satz 2.4)

zu 2.: a) $\varrho(I - A^{-1}\tilde{A}) \le \|I - A^{-1}\tilde{A}\| = \|A^{-1}(A - \tilde{A})\| \le \|A^{-1}\|\,\|A - \tilde{A}\| < 1$.

b) $\tilde{A}^{-1} = [I - (I - A^{-1}\tilde{A})]^{-1}A^{-1}$,

$\|\tilde{A}^{-1}\| \le \|A^{-1}\|\,\|[I - K]^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|K\|} \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|A - \tilde{A}\|}$.

q.e.d.

Schlußfolgerung:

1) Die Menge der regulären Operatoren aus $L(X)$ ist offen !
2) Für korrekt gestellte Aufgaben

$$\text{Ges. } u \in X : Au = b \quad \text{in} \quad X = Y \tag{1}$$

hängt die Lösung u stetig von den Eingangsdaten ab, d.h. „kleine" Störungen ΔA ($= B$ in Pkt. 1.4.2) und Δb ($= \eta$ in Pkt. 1.4.2) von A und b ziehen nur „kleine" Störungen in der Lösung u nach sich !

Satz 2.8: (Störungssatz II)

Vor.: X – B-Raum,
$A \in L(X)$ regulär,
$\tilde{A} = A + \Delta A \in L(X) : \|\tilde{A} - A\| < 1/\|A^{-1}\|$.

Bh.: Dann gelte für die Lösungen von

(1) $\quad$ Ges. $u \in X : Au = b$ in $Y = X$ und

($\tilde{1}$) $\quad$ Ges. $\tilde{u} \in X : \tilde{A}\tilde{u} = \tilde{b}$ in $Y = X$

mit $b,\ \tilde{b} = b + \Delta b \in X$ die folgenden Abschätzungen:

a) $\|u - \tilde{u}\| \leq \|A^{-1}\|\, \|b - A\tilde{u}\|$ (a-posteriori),

b) $\|\tilde{u} - u\| \leq \|\tilde{A}^{-1}\|\, \|\tilde{b} - \tilde{A}u\|$ (a-priori),

c) $\frac{\|\tilde{u}-u\|}{\|u\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\tilde{A}-A\|}{\|A\|}} \left\{ \frac{\|\tilde{A}-A\|}{\|A\|} + \frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|} \right\}$

für absoluten (a),b)) und relativen Fehler (c)), wobei $\kappa(A) = \|A\|\, \|A^{-1}\|$ – Konditionszahl von A.

Beweis:

a) $u - \tilde{u} = A^{-1}(b - A\tilde{u})$ #

b) Rollentausch:

$$\tilde{u} - u = \tilde{A}^{-1}(\tilde{b} - \tilde{A}u)$$

$$\|\tilde{u} - u\| \le \underset{\text{(i)}}{\|\tilde{A}^{-1}\|}\ \underset{\text{(ii)}}{\|\tilde{b} - \tilde{A}u\|}\ \underset{\nearrow}{\le}\ \text{c)}$$

c) (i) $\|\tilde{A}^{-1}\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 2.7}}}{\le} \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\tilde{A}-A\|} = \frac{\|A^{-1}\|\,\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\,\frac{1}{\|A\|}$

(ii)

$$\begin{aligned} \tilde{b} - \tilde{A}u &= \tilde{b} - b + Au - \tilde{A}u \\ \|\tilde{b} - \tilde{A}u\| &\le \underbrace{\|\tilde{b} - b\|} + \underbrace{\|A - \tilde{A}\|\,\|u\|}_{\text{o.k.}} \\ \|\tilde{b} - b\| &= \frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}\|Au\| \le \frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}\|A\|\,\|u\| \end{aligned}$$

q.e.d.

$\boxed{\textbf{Ü 2.1}}$ Man übertrage die Resultate auf den Fall:

(1) Ges. $u \in X$: $Au = b$ in Y (i. a. $Y \neq X$),

($\tilde{1}$) Ges. $\tilde{u} \in X$: $\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{b}$ in Y,

unter den Vor.: X, Y – B-Räume,
$A \in [X \to Y]$: regulär, d.h. $\exists\ A^{-1} \in [Y \to X]$,
$\tilde{A} = A + \Delta A \in [X \to Y]$: $A^{-1}\Delta A \in L(X)$:
$\|A^{-1}\Delta A\| < 1$,
$\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|$,

d.h. man beweise Satz 1.3 und Folgerung 1.3.

<u>Hinweis:</u> Man benutze die Darstellung:

$$\tilde{A} = \overset{\in[X\to Y]}{A}[I - (I - \overset{\in[X\to X]}{A^{-1}\tilde{A}})] \in [X \to Y].$$

2.3 Elliptizität

- V – reeller Hilbert-Raum (H-Raum): $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{0.5}$.

  $V_0 \subset V$ – abgeschlossener, nichtttrivialer UR des H-Raumes V.

  $g \in V$ – geg. Element $\curvearrowright$
  $$\begin{aligned} V_g &= g + V_0 \\ &= \{v \in V : \exists\, w \in V_0,\, v = g + w\} \\ &= \text{geg. Hyperebene (lin. Mannigfaltigkeit) in } V. \end{aligned}$$

  V_0^* – dualer (adjungierter) Raum zu V_0:
  $$\|F\|_* \equiv \|F\|_{V_0^*} := \sup_{\substack{v \in V_0 \\ v \neq 0}} \frac{<F,v>}{\|v\|},\quad F \in V_0^*,$$
  $< \cdot,\cdot >: V_0^* \times V_0 \to I\!R^1$ – Dualitätsprodukt,
  $< F, v >:= F(v)$.

- Btr. folgendes abstraktes Variationsproblem:

  (1) $\boxed{\text{Ges. } u \in V_g : a(u,v) \ = < F, v > \quad \forall v \in V_0}$

  für geg. $F \in V_0^*$ und geg. <u>stetige</u> (*) <u>Bilinearform</u> $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to I\!R^1$.

- Homogenisieren des Variationsproblems (= Formulierung im UR V_0) für theoretische Untersuchungen:

  <u>Ansatz:</u> $u = g + w \in V_g$ mit <u>bekanntem</u> $g \in V_g$ und <u>gesuchtem</u> $w \in V_0$.

  Dann gilt wegen der Bilinearität von $a(\cdot,\cdot)$

  (2) $\boxed{\text{Ges. } w \in V_0 : a(w,v) = \underbrace{< F, v > - a(g,v)}_{:=<\hat{F},v>} \quad \forall v \in V_0}$

  und (1) und (2) sind offenbar äquivalent.

  <u>Desweiteren gilt:</u> Aus
  $$\left.\begin{array}{l} 1)\ F \in V_0^* \\ 2)\ |a(g,v)| \leq \mu_2 \|g\|\,\|v\| \quad \forall v \in V_0 \\ \quad (\Leftarrow a(\cdot,\cdot) : V \times V \mapsto I\!R^1 \text{ stetig}) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{F} \in V_0^*.$$

Tatsächlich:

- Linearität von $< \hat{F}, v > := < F, v > -a(g,v)$ trivial !
- †: $| < \hat{F}, v > | \le | < F, v > | + |a(g,v)| \le (\|F\|_* + \mu_2 \|g\|) \|v\| \quad \forall v \in V_0$,
  d.h. $\|\hat{F}\|_* \le \|F\|_* + \mu_2 \|g\|$ #

■ Btr. im folgenden das (eventuell vorher homogenisierte) abstrakte Variationsproblem in V_0:

$(1)_0$ $\boxed{\text{Ges. } u \in V_0 : a(u,v) \; = < F, v > \quad \forall v \in V_0}$,

wobei folgende Standardvoraussetzungen erfüllt seien:

$$
(3) \left\{ \begin{array}{ll}
1) & F \in V_0^* \text{ – lineares, beschränktes Funktional auf } V_0, \\
2) & a(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \to I\!R^1 \text{ – Bilinearform auf } V_0: \\
2a) & V_0\text{–elliptisch } (= V_0 \text{ – p.d.} = V_0\text{–koerziv}): \\
& \exists\, \mu_1 = \text{const.} > 0 : \mu_1 \|v\|^2 \le a(v,v) \quad \forall v \in V_0, \\
2b) & V_0\text{–beschränkt } (= V_0\text{–stetig}): \\
& \exists\, \mu_2 = \text{const.} > 0 : |a(u,v)| \le \mu_2 \|u\| \, \|v\| \quad \forall u,v \in V_0.
\end{array} \right.
$$

■ Formulierung von $(1)_0$ als Operatorgleichung in V_0^*:
Durch

(4) $< Au, v > := \; a(u,v) \quad \forall u,v \in V_0$

wird ein linearer, beschränkter Operator

$$A : V_0 \mapsto V_0^*$$

definiert, d.h. $A \in L(V_0, V_0^*) = [V_0 \mapsto V_0^*]$:
Tatsächlich, für jedes festes $u \in V_0$ definiert

$$a(u,\cdot) : V_0 \mapsto I\!R^1$$

ein lineares, beschränktes (stetiges) Funktional auf V_0:

- Linearität: trivial,
- †: $|a(u,v)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vor. 2b)}}}{\le} \mu_2 \|u\| \, \|v\| \quad \forall v \in V_0$.

Dieses Funktional bezeichnen wir mit $Au \in V_0^*$.
Offenbar ist Abb. $A : V_0 \mapsto V_0^*$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{trivial}}}{\underline{\text{linear}}}$ und $\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Ü 2.2}}}}{\underline{\text{stetig}}}$!

$\boxed{\textbf{Ü 2.2}}$ Man zeige: $\|A\|_{[V_0 \to V_0^*]} \leq \mu_2$!

Damit ist $(1)_0$ äquivalent zu

$$\text{Ges. } u \in V_0 : < Au, v > = < F, v > \quad \forall v \in V_0$$

bzw.

(5) $$\boxed{\text{Ges. } u \in V_0 : Au = F \text{ in } V_0^*}\ .$$

<u>Resultat:</u>

Operatorgleichung		Variationsproblem
(5) Ges. $u \in X = V_0$: $Au = b$ in $Y = V_0^*$ mit $b = F \in V_0^*$ geg.	$\Longleftrightarrow$ $\uparrow$ (4) $< Au, v > = a(u, v)$ $\forall u, v \in V_0$	$(1)_0$ Ges. $u \in V_0$: $a(u, v) = < F, v >$ $\forall v \in V_0$

■ <u>Formulierung von $(1)_0$ als Operatorgleichung in V_0:</u>

Wegen des Riesz'schen (isometrischen) Isomorphismus (Satz von Riesz; siehe [5] ANALYSIS III, S. 47):

$$J \in [V_0^* \mapsto V_0] : \ (JF, v) \ = < F, v > \quad \forall F \in V_0^* \quad \forall v \in V_0,$$

ist (5) offenbar äquivalent zu

(6) $$\boxed{\text{Ges. } u \in V_0 : JAu = JF \text{ in } V_0}\ .$$

$\boxed{\textbf{Ü 2.3}}$ Man zeige: 1. $\|JF\| = \|F\|_* \quad \forall F \in V_0^*$,
$\|J\|_{[V_0^* \to V_0]} = 1$.

2. $\exists\, J^{-1} \in [V_0 \mapsto V_0^*] : \quad < J^{-1}u, v > = (u, v) \quad \forall u, v \in V_0$,
$\|J^{-1}u\|_* = \|u\| \quad \forall u \in V_0$,
$\|J^{-1}\|_{[V_0 \mapsto V_0^*]} = 1$.

■ **<u>Satz 2.9</u>** (Satz von Lax & Milgram, 1954)

<u>Vor.:</u> 1. $F \in V_0^*$,

2. $a(\cdot,\cdot) : V \times V_0 \to I\!R^1$ – Bilinearform:

2a) V_0–elliptisch: $\mu_1\|v\|^2 \le a(v, v) \quad \forall v \in V_0$,

2b) V_0 - beschränkt: $|a(u, v)| \le \mu_2\|u\|\,\|v\| \quad \forall u, v \in V_0$.

<u>Bh.:</u> $\exists!\, u \in V_0 : \ a(u, v) \ = < F, v > \quad \forall v \in V_0. \qquad (1)_0$

<u>Beweis:</u> (konstruktiv: $\to$ Banachscher Fixpunktsatz 2.6)

- Das abstrakte Variationsproblem $(1)_0$ ist offenbar zu folgenden Operatorgleichungen äquivalent:

(5) $u \in V_0$: $Au = F$ in V_0^*,

(6) $u \in V_0$: $JAu = JF$ in V_0,

Fixpktgl.: (7) $u \in V_0$: $u = u - \varrho(JAu - JF)$ in V_0,
mit fixiertem $\varrho \in I\!R^1, \varrho \neq 0$,

(8) $u \in V_0$: $u = K_\varrho u + b$ in $V_0 = X$,
mit $K_\varrho = (I - \varrho JA) \in L(X)$ und
$b = \varrho JF \in X$.

- <u>Zeigen:</u>

Für $\varrho \in (0, 2\mu_1/\mu_2^2)$ gilt: $K_\varrho \in L(X) : \|K_\varrho\| < 1$
$\to$ Banachscher Fixpunktsatz 2.6 anwendbar !

Sei $v \in V_0$ beliebig. Btr.

$$\begin{aligned}\|K_\varrho v\|^2 &= (K_\varrho v, K_\varrho v) = ((I - \varrho JA)v, (I - \varrho JA)v) = \\ &= \|v\|^2 - 2\varrho\underset{\text{(i)}}{(JAv, v)} + \varrho^2\underset{\text{(ii)}}{\|JAv\|^2} \le\end{aligned}$$

NR: (i) $(JAv, v) \;=\; <Av, v> \overset{(4)}{=} a(v,v) \underset{2a)}{\overset{(3)}{\geq}} \mu_1 \|v\|^2 \quad \forall v \in V_0,$

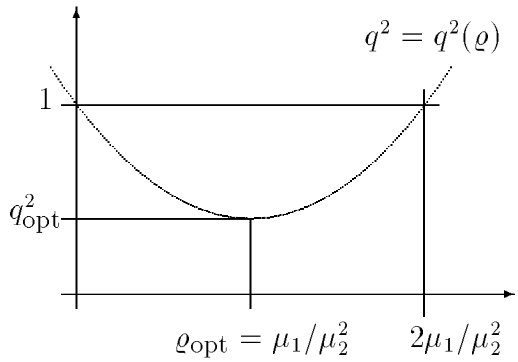
(ii) $\|JAv\| \;=\; \|Av\|_* = \sup\limits_{\substack{w \in V_0 \\ w \neq 0}} \frac{|<Av,w>|}{\|w\|} \overset{(4)}{=}$

$= \sup\limits_{w \in V_0} \frac{|a(v,w)|}{\|w\|} \underset{2b)}{\overset{(3)}{\leq}} \mu_2 \|v\|.$

$$\overset{(i),(ii)}{\leq} \; (1 - 2\varrho\mu_1 + \varrho^2\mu_2^2)\;\|v\|^2.$$

<u>Also:</u> $\|K_\varrho\| = \sup\limits_{v \in V_0} \frac{\|K_\varrho v\|}{\|v\|} \leq q(\varrho) := \sqrt{1 - 2\varrho\mu_1 + \varrho^2\mu_2^2}.$

<u>Es gilt offenbar für $q^2(\varrho)$:</u>



$0 < q^2_{\text{opt}} = q^2(\varrho_{\text{opt}}) \leq q^2(\varrho) < 1,$
$\forall \varrho \in (0, 2\mu_1/\mu_2^2),$
$\varrho_{\text{opt}} = \mu_1/\mu_2^2,$
$q^2_{\text{opt}} = q^2(\varrho_{\text{opt}}) = 1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 = 1 - \xi^2,$
mit $\xi = \mu_1/\mu_2$.

- Banachscher Fixpunktsatz 2.6 liefert: $\exists!\; u \in V_0 : (8) \equiv (7) \equiv (6) \equiv (5) \equiv (1)_0 \Leftrightarrow (1)$.

q.e.d.

■ Der Banachsche Fixpunktsatz 2.6 liefert aber für $(8) \equiv \ldots \equiv (1)_0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (1)$ neben der $\exists!$ sofort auch ein praktisches <u>Konstruktionsprinzip</u> und Fehlerabschätzungen.

<u>Korollar 2.3:</u>

<u>Vor.:</u> wie Satz 2.9, d.h. Standardvoraussetzungen (3).

Bh.: 1. $u_{n+1} = K_\varrho u_n + b \equiv u_n - \varrho(JAu_n - JF) \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ in V_0 (9)
für bel. fix. $\varrho \in (0, 2\mu_1/\mu_2^2)$ und $u_0 \in V_0$; u ist Lsg. von $(1)_0$.

2. Es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

a) $\|u_n - u\| \leq q^n \|u - u_0\|$ (a-priori),

b) $\|u_n - u\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|u_1 - u_0\|$ (a-priori Schranke),

c) $\|u_n - u\| \leq \frac{q}{1-q} \|u_n - u_{n-1}\|$ (a-posteriori Schranke),

mit $0 < q_{\text{opt}} = q(\varrho_{\text{opt}}) \leq q = q(\varrho) < 1$ für $\varrho \in \left(0, 2\frac{\mu_1}{\mu_2^2}\right)$
$\varrho_{\text{opt}} = \mu_1/\mu_2^2,\ q_{\text{opt}} = \sqrt{1 - \xi^2},\ \xi = \mu_1/\mu_2.$

Bemerkungen zum Iterationsverfahren (9):

$u_{n+1} = K_\varrho u_n + b \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n - \varrho J(Au_n - F) \quad | \leftarrow (\cdot, v)$

$\Leftrightarrow \quad (u_{n+1}, v) = (u_n, v) - \varrho\,(J(Au_n - F), v) \quad \forall v \in V_0$

$\Leftrightarrow \quad (u_{n+1}, v) = (u_n, v) - \varrho\,(< Au_n, v > - < F, v >) \quad \forall v \in V_0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{u_{n+1} \in V_0 : (u_{n+1}, v) = (u_n, v) - \varrho(a(u_n, v) - < F, v >) \quad \forall v \in V_0}$

■ Äquivalenz von Variationsproblem (VP) und Minimumproblem (MP) für symmetrische und postitive Bilinearform:

Satz 2.10 ((VP) $\Leftrightarrow$ (MP))

Vor.: 1. $F \in V_0^*$,

2. Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : V_0 \times V_0 \to I\!R^1$ sei

- symmetrisch: $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V_0$,
- positiv: $a(v, v) > 0 \quad \forall v \in V_0 : v \neq 0$.

Bh.: Dann sind VP und MP äquivalent, d.h.

$$\text{(VP)} \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{Ges. } u \in V_0\text{:}\\ a(u, v) = < F, v >\\ \forall v \in V_0\end{array}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{Ges. } u \in V_0\text{:}\\ J(u) = \inf\limits_{v \in V_0} J(v)\end{array}} \quad \text{(MP)}$$

mit dem Ritzschen Energiefunktional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - < F, v > .$$

Beweis:

- Für bel. $u, v \in V_0$ und bel. $t \in I\!R^1$ gilt:

$$(10) \qquad J(u + \underbrace{\overset{\overset{V_0}{\cup}}{tv}}_{=\delta u}) = \frac{1}{2}\, a(u+tv, u+tv) - < F, u+tv >$$

Euler: $\nearrow$ „Variation von u"

$$= \tfrac{1}{2}a(u,u) + ta(u,v) + \tfrac{t^2}{2}a(v,v) - < F, u > - t < F, v >$$

$$= J(u) + t\underbrace{[a(u,v) - < F, v >]}_{a(u,\delta u) - <F,\delta u>} + \underbrace{\frac{t^2}{2}\, a(v,v)}_{\frac{1}{2}a(\delta u,\delta u)}.$$

(wobei $u \in V_g$ über u steht)

- <u>(VP) $\Rightarrow$ (MP):</u>
  Sei $u \in V_0$ Lsg. von (VP), d.h. $a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0$.
  Aus (10) folgt dann für $t = 1$:

$$J(u+v) = J(u) + \underbrace{[a(u,v) - < F, v >]}_{=0} + \frac{1}{2}\, a(v,v) > J(u) \quad \forall v \in V_0 : v \neq 0.$$

  Damit ist u offenbar <u>eindeutiger</u> Minimalpkt. von $J(\cdot)$.

- <u>(MP) $\Rightarrow$ (VP):</u>
  Sei $u \in V_0$ nun Minimalpunkt von $J(\cdot)$, d.h. $J(u) = \min\limits_{v \in V_0} J(v)$.
  Dann muß notwendigerweise

$$\frac{d}{dt}J(u+tv)|_{t=0} = 0 \quad \forall \text{ (fix) } v \in V_0 : \ v \neq 0$$
$$\|$$
$$[a(u,v) - < F, v >] + ta(u,v)|_{t=0} = a(u,v) - < F, v >,$$

  d.h. $a(u,v) = < F, v > \ \forall v \in V_0$, d.h. $u \in V_0$ ist Lsg. des (VP).

q.e.d.

$\boxed{\textbf{Ü 2.4}}$ Man zeige mit elementaren Mitteln: (MP) $\Rightarrow$ (VP).

<u>Hinweis:</u> indirekt.
Ann.: $\exists\, v \in V_0 : a(u,v) - < F, v > = c \neq 0 \ (v \neq 0)$.
Zeigen: $J(u) + t \cdot c + \frac{t^2}{2}\, a(v,v) \geq J(u) \quad \forall t \in I\!R^1$
$\Rightarrow$ ↯ #

■ **Beispiele:** Siehe Kap. 4 (kurz) und [11] Nu II (ausführlich).

Hier: 1D elliptische RWA
→ modelliert z.B. 1D Wärmeleit-Wärmetransport-Problem.

- Klassische Formulierung der RWA:

Ges. $u(x) \in X := C^2(0,1) \cap C[0,1) \cap C^1(0,1]$:

Dgl: $-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,1)$,

RB: $u(0) = g_0$,

$-a(1)u'(1) = g_1$,

mit geg. $a \in C^1(0,1] : a(x) \geq a_0 = \text{const.} > 0 \quad \forall x \in (0,1]$,

$b, c \in C(0,1) : c(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,1)$,

$f \in C(0,1),\ g_0, g_1 \in \mathbb{R}^1$.

- Variationsformulierung (= verallgem. bzw. schwache Formulierung)

$$\int_0^1 \text{Dgl.} \cdot \underset{\substack{v \\ \delta u \\ v(0)=0\,!}}{\text{Testfkt.}}\, dx : \quad \int_0^1 (-(au')'v + bu'v + cuv)\, dx = \int_0^1 fv\, dx \quad \forall v \in \underset{C_0^\infty}{V_0}\ ?$$

$$\int_0^1 (au'v' + bu'v + cuv)\, dx \underbrace{-au'v|_0^1}_{\underbrace{-a(1)u'(1)}_{g_1} v(1) - (-a(0)u'(0)\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{v(0)})} = \int_0^1 fv\, dx$$

(1) $\shortparallel$ $(1)_g$ $\shortparallel$ $(\mathrm{VP})_g$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } u \in V_g := g_0 + V_0\ (?): \\ \underbrace{\displaystyle\int_0^1 (au'v' + bu'v + cuv)\, dx}_{=a(u,v)} = \underbrace{\displaystyle\int_0^1 fv\, dx - g_1 v(1)}_{=<F,v>} \quad \forall v \in V_0\ (?), \quad \text{? Kap. 3} \\ \text{mit} \quad V_0 = \{v \in H^1(0,1) \overset{?}{=} W_2^1(0,1) : v(0) = 0\} \overset{?}{=} \overline{C_0^\infty}^{\|\cdot\|}, \\ \qquad (u,v) := \displaystyle\int_0^1 (u'v' + uv)\, dx,\ \|u\| := \sqrt{\displaystyle\int_0^1 ((u')^2 + (u)^2)\, dx}, \\ \qquad C_0^\infty = C_0^\infty[0,1] := \{v \in C^\infty[0,1] : v(0) = 0\}. \end{array}}$$

- Minimumproblem unter den Voraussetzungen:

(i) $b = 0 \curvearrowright a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch,

(ii) $a \in L_\infty(0,1) : a(x) \geq a_0 = \text{const.} > 0 \quad \forall$ f.ü. $x \in (0,1)$,

(iii) $c \in L_\infty(0,1) : c(x) > 0 \quad \forall$ f.ü. $x \in (0,1)$,

(ii), (iii) $\curvearrowright a(\cdot,\cdot)$ positiv.

$$(\mathrm{VP})_g \Leftrightarrow (\mathrm{MP})_g \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ges. } u \in V_g : J(u) = \inf\limits_{v \in V_g} J(u), \\ \text{mit } J(u) := \frac{1}{2} a(v,v) - < F, v >. \end{array} \right.$$

- $\boxed{\textbf{Ü 2.5}}$ Homogenisieren Sie $(\mathrm{VP})_g$ und $(\mathrm{MP})_g$

$$\text{(i) - (iii)} \rightarrow \begin{array}{ccccc} (\mathrm{VP})_g & \rightarrow & (\mathrm{VP})_0 & \Leftrightarrow & (\mathrm{VP})_g \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ (\mathrm{MP})_g & \rightarrow & (\mathrm{MP})_0 & \Leftrightarrow & (\mathrm{MP})_g \end{array}$$

- Frage: Unter welchen Bedingungen an die Eingangsdaten ($\underline{a, b, c, f,}$ g_0, g_1, $(0,1)$) sind die Voraussetzungen des Satzes 2.9 von Lax & Milgram erfüllt ?

$\boxed{\textbf{Ü 2.6}}$ Zeigen Sie, daß z.B. unter den Bedingungen

(i) $b = 0$,

(ii) $a \in L_\infty(0,1) : a_1 \geq a(x) \geq a_0 = \text{const.} > 0 \quad \forall$ f.ü. $x \in (0,1)$,

(iii)$c \in L_\infty(0,1) : c_1 \geq c(x) \geq c_0 = \text{const.} > 0 \quad \forall$ f.ü. $x \in (0,1)$,

(iv)$f \in L_2(0,1)$,

die Vor. des Satzes 2.9 von Lax & Milgram erfüllt sind, und geben Sie μ_1 und μ_2 an ! Geben Sie die Fixpunktiteration (9) für das gewählte Bsp. an !

2.4 Kompaktheit

- Ein anderer Begriff von „Kleinheit“ eines Operators ist seine Kompaktheit !

- Bevor die Kompaktheit eines Operators $K : X \rightarrow Y$ ($M \subset X$ † $\Rightarrow KM \subset Y$ relativ kompakte Menge) definiert wird, werden einige grundlegende Begriffe und Aussagen über die Kompaktheit von Mengen in normierten Räumen ($\Lsh$ B-Räume) zusammengefaßt.

2.4.1 Kompaktheit von Mengen

- **Def. 2.4:** (Kompakte Teilmengen)
  Eine Teilmenge $M \subset X$ eines topologischen Raumes X heißt kompakt, gdw. zu jeder Überdeckung von M mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung existiert.

- Im weiteren sei X ein B-Raum (bzw. ↷ norm. Raum).
  Dann gelten folgende Aussagen:

  1) $M \subset X$ kompakt $\Leftrightarrow$ jede beschränkte Folge in M einen Häufungspunkt in M hat.

  2) $M \subset X$ kompakt $\Rightarrow M = \bar{M}$ und †.

- **Def. 2.5:** (relativ kompakte Teilmengen)
  $M \subset X$ relativ kompakt gdw. $\bar{M}$ kompakt.

- **Def. 2.6:** (endliches ϵ-Netz: $\{u_1, \ldots, u_{n(\epsilon)}\}$)
  Sei $M \subset X$. Die Menge der Punkte $\{u_1, \ldots, u_{n(\epsilon)}\} \subset M$ heißt endliches ϵ-Netz für M, gdw. $\min\limits_i \|u - u_i\| < \epsilon \quad \forall u \in M$.

- Es gilt:

  1) $M \subset X$ relativ kompakt $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists$ endl. ϵ-Netz für M.

  2) $M \subset X$ relativ kompakt $\Rightarrow M$ †.

- **Beispiele:** $X = \mathbb{R}^n, C(\bar{\Omega}), L_p(\Omega)$:

  1) Kompaktheit in $\mathbb{R}^n$ (Heine-Borel): $X = \mathbb{R}^n$:
     $M \subset \mathbb{R}^n$ relativ kompakt, gdw. M †.
     $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt gdw. $M = \bar{M}$ und †.

  2) Kompaktheit in $C(\bar{\Omega})$ (Arzela-Ascoli): $X = C(\bar{\Omega})$:
     Sei $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (d.h. abgeschlossen und †).

$M \subset C(\bar{\Omega})$ ist relativ kompakt	gdw.	1)	M †, d.h. $\|M\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c$,
		2)	M ist gleichgradig stetig.*)

     *) M ist gleichgradig stetig $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |u(y) - u(x)| \leq \epsilon$
     $\forall y \in K(x, \delta(\epsilon)) \cap \bar{\Omega}; \forall x \in \bar{\Omega}, \forall u \in M.$

     $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0 :$
     $\sup\limits_{u \in M} |u(y) - u(x)| \leq \epsilon$
     $\forall x, y \in \bar{\Omega} : |y - x| := \|y - x\|_{R^n} \leq \delta.$

  3) Kompaktheit in $L_p(\Omega)$ (Kolmogoroff): $X = L_p(\Omega)$:
     Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ †.

$M \subset L_p(\Omega)$ ist relativ kompakt gdw.

1) $M \ddagger$, d.h. $\|M\|_{p,\Omega} \leq c$,
2) $\sup\limits_{u \in M} \|u(x+h) - u(x)\|_{p,\Omega_{\textcircled{h}}} \leq \epsilon(|h|)$, Nullforts. $h \in I\!\!R^n$, wobei $\epsilon(|h|) \to 0$ für $|h| \to 0$,

---

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \delta = \delta(\epsilon) > 0$:
$\sup\limits_{u \in M} \|u(x+h) - u(x)\|_{p,\Omega_{\textcircled{h}}} \leq \epsilon$ Nullfort.
$\forall h \in I\!\!R^n : |h| := \|h\|_{R^n} \leq \delta$,

---

wobei $\Omega_{\textcircled{h}} := \{x \in I\!\!R^n : [x, x+h] \subset \Omega\}$ für $h \in I\!\!R^n$.

$\omega_1(t,u)_p := \sup\limits_{|h| \leq t} \|u(x+h) - u(x)\|_{L_p(\Omega_{\textcircled{h}})}$ heißt L_p- Stetigkeitsmodul 1. Ordnung

$$\sup_{u \in M} \omega_1(t,u)_p \leq \epsilon(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

■ **Satz 2.11:**

Vor.: X – normierter Raum.

Bh.: X – endlichdimensional $\Leftrightarrow$ Einheitskugel $\bar{K}(0,1) := \{u \in X : \|u\| \leq 1\}$ ist kompakt.

Beweis:

1) X – endlichdim. $\Rightarrow \bar{K}(0,1)$ abgesch. u. $\ddagger \Leftrightarrow$ kompakt.
2) Sei nun $\bar{K}(0,1)$ kompakt.
$\Rightarrow \exists \; \underbrace{K\left(u_k, \tfrac{1}{2}\right)}_{\subset X}, k = 1, \ldots, n : \bar{K}(0,1) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} K\left(u_k, \tfrac{1}{2}\right)$.

Dann gilt: $X = V := \text{span}\,\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Tatsächlich, $V \subseteq X$ o.k.; zeigen $X \subseteq V$:
Ann.: $\exists \, u \in X : u \notin V$:

$\Rightarrow$ für bel. (fix) $v \in V \ \exists\ z = \frac{u-v}{\|u-v\|} : \|z\| = 1$:
$u = v + \|u-v\|\, z$

$\Rightarrow \ \exists\ K\left(u_k, \frac{1}{2}\right) : z \in K\left(u_k, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \ u = \underbrace{v + \|u-v\| u_k}_{\in V} + \|u-v\|(z-u_k)$

$\Rightarrow \ d(u,v) = \inf\limits_{v\in V} \|u-v\| \leq \|u-v\|\, \|\overbrace{z-u_k}^{\leq\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{2}\|u-v\| \quad \forall v \in V$

$\Rightarrow \ d(u,V) \leq \frac{1}{2} \inf\limits_{v\in V} \|u-v\| = \frac{1}{2} d(u,V)$

$\Leftrightarrow \ d(u,V) = 0 \Leftrightarrow u \in V$, da V endlichdim. und daher $V = \bar{V}$. $\lightning$

q.e.d.

2.4.2 Kompaktheit linearer Operatoren

- **Def. 2.7:** (kompakte lineare Operatoren)
  Seien X, Y – normierte Räume.
  Dann heißt ein lin. Operator $K : X \overset{\mapsto}{\to} Y$ kompakt (vollstetig), gdw. das Bild beschränkter Mengen relativ kompakt ist, d.h.

$$M \subset D(K) \underset{\substack{= \\ \text{i. Folg.}}}{\subseteq} X \ \nparallel \Rightarrow KM := \{Kv \in Y : v \in M\} \subset Y \text{ rel. komp.}$$

$\boxed{\textbf{Ü 2.7}}$ Man zeige folgende einfache Aussagen über kompakte lineare Operatoren:

1. Kompaktheit $\Longrightarrow$ Stetigkeit.
   $K : X \mapsto Y$ - lin. $\qquad K \in L(X,Y)$
2. $L_c(X,Y) := \{K : X \mapsto Y$: linear, kompakt $\} \subset L(X,Y)$ – Teilraum !
3. X – norm. Raum, Y – B-Raum.
   $\{A_n\} \subset L_c(X,Y) : A_n \to A \in L(X,Y)$ in $L(X,Y)$.
   Dann gilt: $A \in L_c(X,Y)$,
   d.h. $L_c(X,Y)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L(X,Y)$.
4. W, X, Y, Z – normierte Räume; $A \in L(W,X), B \in L(X,Y), C \in L(Y,Z)$.
   Falls B kompakt ist, dann sind auch $B \circ A \in L(W,Y)$ und $C \circ B \in L(X,Z)$ kompakt.

   Hinweis: lin. stetige Operatoren:

   a) $\nparallel$ Mengen $\to$ $\nparallel$ Mengen.

   b) rel. komp. Mengen $\to$ rel. komp. Mengen.
   ϵ-Netz $\qquad \|A\| \cdot \epsilon$-Netz

5. $L_c(X) := L_c(X,X)$ bildet in $L(X)$ ein (zweiseitiges) Ideal.

6.* Sei $K \in L_c(X,Y)$ – kompakt.
Dann gilt: $u_n \rightharpoonup u$ in $X \Rightarrow Ku_n \to Ku$ in Y.

7.* X – Hilbertraum, $(\cdot,\cdot), \|\cdot\|$:
$K \in L_c(X)$ $\Leftrightarrow$ aus $u_n \rightharpoonup u$; $v_n \rightharpoonup v$ folgt $(Ku_n, v_n) \to (Ku, v)$,
$\Leftrightarrow$ aus $u_n \rightharpoonup u$ folgt $Ku_n \to Ku$.

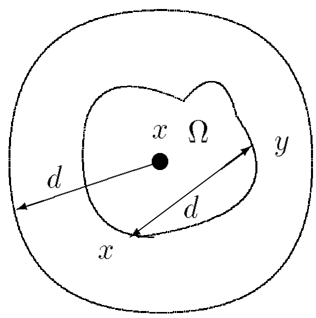
8. X – endlichdimensionaler normierter Raum:
Dann gilt: $L_c(X) = L(X)$
Kompaktheit = Stetigkeit.

Hinweis: a) X endlichdim. gdw. $\bar{K}(0,1)$ kompakt.
b) X endlichdim. gdw. $I \in L(X)$ kompakt.

9. X, Y – normierte Räume; $K \in L(X,Y)$.
Dann gilt: $R(K)$ endlichdim. $\Rightarrow K \in L_c(X,Y)$ kompakt.

- Beispiele kompakter Operatoren:
  $\Rightarrow$ Schwach singuläre Integraloperatoren

$\Omega \subset I\!R^n, \bar{\Omega}$ kompakt, $d \geqq \operatorname{diam} \Omega :=$
$(\Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1})$ $:= \sup\limits_{x,y\in\Omega} |x-y|$
$(n = 1, \underline{2,3})$



Def. 2.8: (schwach singuläre Integraloperatoren)
Der Integraloperator
$$Ku(x) := \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)\,dy$$
heißt schwach singulär, falls der Kern eine Darstellung der Form
$$K(x,y) = \frac{B(x,y)}{r^\alpha} = \frac{B(x,y)}{|x-y|^\alpha}$$
mit $B(x,y) \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$ und $0 < \alpha < n,\ r = |x-y|$.

Lemma 2.2:

$$0 \le \int_\Omega \frac{dy}{r^\beta} \le |S_1| \frac{d^{n-\beta}}{n-\beta} < \infty \quad \forall x \in \Omega,$$

wobei $\bar{S}_1 = \{x \in I\!R^n : |x| \le 1\}$ – Einheitskugel $= \bar{K}(0,1)$,

$$|S_1| = \begin{array}{c}\text{Oberfläche der}\\ \text{Einheitskugel}\end{array} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 2\pi & n = 2, \\ 4\pi & n = 3 \end{cases}$$

$n \in I\!N,\ n \ge 1,\ n > \beta \ge 0.$

Beweis:

$$\underset{x\in\Omega}{0 \le \int_\Omega \frac{dy}{r^\beta}} \le \int_{|y-x|\le d} \frac{dy}{r^\beta} = |S_1| \int_0^d \frac{r^{n-1}}{r^\beta}\,dr = |S_1| \int_0^d r^{n-\beta-1}\,dr$$

$$\uparrow$$

$$dy = r^{n-1}\,dr\,dS_1 = |J|\,dr\,dS_1$$

$$= |S_1| \left.\frac{r^{n-\beta}}{n-\beta}\right|_0^d = |S_1| \frac{d^{n-\beta}}{n-\beta}.$$ **q.e.d.**

Btr. nun lineare Abbildung

$$v(x) = Ku(x),\ u \in X$$

unter der zusätzlichen Voraussetzung:

$$B(x,y) \text{ ist stetig } \forall x,y \in \bar{\Omega} : x \ne y,$$

und untersuchen Abbildungseigenschaften (stetig, kompakt) von $K : X \mapsto Y$.

Satz 2.12:

Vor.: $\alpha < n/p'$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ 1 < p \le \infty,$

Bh.: $K \in L(L_p(\Omega), C(\bar{\Omega}))$ und kompakt.

Beweis: $X = L_p(\Omega),\ Y = C(\bar{\Omega}),\ 1 < p < \infty$ ($p = \infty$, o.k.).

1) $K \in L(X,Y)$: $\|K\|_{L(X,Y)} \le c \left(|S_1| \frac{d^{n-\alpha p'}}{n-\alpha p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$
mit $c \geqq \|B(x,y)\|_{L_\infty(\Omega\times\Omega)}$.

Tatsächlich,

(a) linear: o.k.; $v(x) = Ku(x) \in C(\bar{\Omega})$ o.k. (2. (↓))

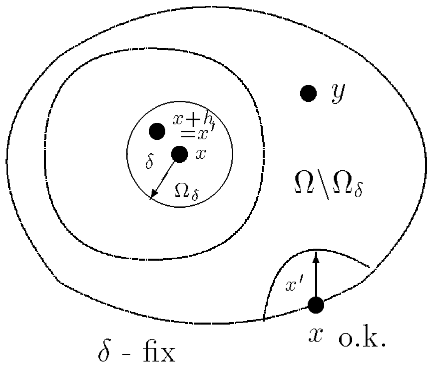
$$
\begin{aligned}
\text{(b)}\quad |v(x)| &= \Big|\int_\Omega \tfrac{B(x,y)}{r^\alpha} u(y)\,dy\Big| \\
&\le \int_\Omega \tfrac{|B(x,y)|}{r^\alpha}\,|u(y)|\,dy \qquad \swarrow \text{Hölder-Ungl.} \\
&\le c\int_\Omega |u(y)| r^{-\alpha}\,dy \le \\
&\le c\left(\int_\Omega |u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega r^{-\overset{\beta}{\overset{\|}{\alpha p'}}}\,dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
\text{Lemma 2.2} \searrow\quad &\le c\left(|S_1|\,\tfrac{d^{n-\alpha p'}}{n-\alpha p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{Lp(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ v(x)}}{\|Ku\|_{C(\bar\Omega)}} \le c\left(|S_1|\,\tfrac{d^{n-\alpha p'}}{n-\alpha p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{Lp(\Omega)}. \qquad \#
$$

2) $M \subset X = L_p(\Omega) \ddagger \;\Rightarrow\; KM \subset Y = C(\bar\Omega)$
relativ kompakt
gdw.
a) $KM \ddagger$
b) KM gleichgradig stetig (Arzela-Ascoli).

Sei $M = \{u \in L_p(\Omega) : \|u\|_{L_p(\Omega)} \le \text{const.} = c_1\} \subset L_p(\Omega) \ddagger$
(a) $\|Ku\|_{C(\bar\Omega)} \le \|K\|_{L(X,Y)}\|u\|_X \le \|K\| \cdot c_1 \quad \forall u \in M.$
(b) <u>Zeigen:</u> $\{v = Ku : u \in M\} = KM$ gleichgradig stetig !

$$
|v(\underbrace{x+h}_{x'}) - v(x)| = \left|\int_\Omega \left[\frac{B(x+h,y)}{|x+h-y|^\alpha} - \frac{B(x,y)}{|x-y|^\alpha}\right] u(y)\,dy\right|
$$



$$
\int_\Omega = \int_{\Omega\backslash\Omega_\delta} + \int_{\Omega_\delta}
$$

$\Omega\backslash(\Omega_\delta \cap \Omega) \quad \Omega_\delta \cap \Omega$

Bild 2.4

$$
\le \underset{\substack{\text{(i)} \\ \text{klein, für kleine } |h|}}{\Big|\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta} [\;-\;] u(y)\,dy\Big|} + \underbrace{\underset{\text{(ii)}}{\int_{\Omega_\delta} \frac{c|u(y)|}{|x+h-y|^\alpha}\,dy} + \underset{\text{(iii)}}{\int_{\Omega_\delta} \frac{c|u(y)|}{|x-y|^\alpha}\,dy}}_{\text{klein, für } \delta \text{ klein}}
$$

(i) $\left|\frac{B(x+h,y)}{|x+h-y|^\alpha} - \frac{B(x,y)}{|x-y|^\alpha}\right| \le \epsilon(\delta, |h|) \quad \forall y \in \Omega \setminus \Omega_\delta$

mit $\epsilon(\delta, |h|) \to 0$ für $|h| \to 0$ und fix. $\delta > 0$.

$$\begin{aligned} \Big| \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\delta} [\ \ -\ \ ] u(y)\, dy \Big| &\le \epsilon(\delta, |h|) \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\delta} |u(y)|\, dy \\ &\le \epsilon(\delta, |h|) \int\limits_{\Omega} |u(y)|\, dy \\ &\le \epsilon(\delta, |h|)\, |\Omega|^{\frac{1}{p'}}\, \|u\|_{L_p(\Omega)} \end{aligned}$$

(ii) $\int\limits_{\Omega_\delta} \frac{|u(y)|}{|x+h-y|^\alpha}\, dy \le \left(|S_1|\, \frac{(2\delta)^{n-\alpha p'}}{n-\alpha p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L_p(\Omega)}$

(iii) $\int\limits_{\Omega_\delta} \frac{|u(y)|}{|x-y|^\alpha}\, dy \le \left(|S_1|\, \frac{(2\delta)^{n-\alpha p'}}{n-\alpha p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{L_p(\Omega)}$

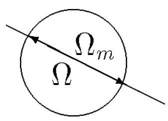
<u>Resultat:</u> $x' = x + h$ **q.e.d.**

$$|v(x') - v(x)| \le \{\overbrace{\epsilon(\delta, h)\, |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \cdot c_1}^{2.\quad \le \frac{\epsilon}{2}} + \overbrace{c_2\, \delta^{\frac{n}{p'} - \alpha} \cdot c_1}^{1.\quad \le \frac{\epsilon}{2}} \le \epsilon$$

d.h. {KM} ist gleichgradig stetig.

<u>Satz 2.13:</u>

<u>Vor.:</u> $\Omega_m := \Omega \cap H_m =$ Schnitt der m-dim. Hyperebene H_m $(m \le n)$ mit Ω: $\mathrm{meas}_{\mathbb{R}^m}(\Omega_m) > 0$.



H_1

$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (n = 2,\ m = 1)$

$q \ge p, \quad \alpha < \frac{n}{p'} + \frac{m}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

<u>Bh.:</u> $K \in L(L_p(\Omega) \to L_q(\Omega_m))$ und kompakt.

<u>Beweis:</u> Analog zu Satz 2.12 unter Benutzung des Kompaktheitskriteriums von Kolmogoroff.

q.e.d.

Bemerkungen:

1. $m = n,\ q \geq p,\ \alpha < \frac{n}{p'} + \frac{n}{q}$ $\quad :\Rightarrow K \in L(L_p(\Omega) \to L_q(\Omega))$ kompakt.
2. $m = n,\ q = p,\ \alpha < n$ $\quad :\Rightarrow K \in L(L_p(\Omega) \to L_p(\Omega))$ kompakt.
3. $q > p,\ \alpha = \frac{n}{p'} + \frac{m}{q}$ $\quad :\Rightarrow K \in L(L_p(\Omega) \to L_q(\Omega_m))$ nur stetig.
4. Bem. 1 und 2 folgen aus Satz 2.13, während Bem. 3 gesonderten Beweis erfordert.

2.4.3 Kompakte Störungen des Einheitsoperators und die Fredholmsche Alternative

■ Sei im weiteren $K \in L(X)$ kompakt; X – norm. Raum.

Btr. $A = I - K$

$\Rightarrow$ • $A = I - K$ muß nicht notwendig regulär sein, ja nicht einmal injektiv.

• Aber der folgende Satz zeigt, daß $A = I - K$ „fast“ injektiv ist.

Satz 2.14: ($N(A) = \ker A =$ Kern von A)

Vor.: $A = I - K,\ K \in L(X)$ – kompakt.

Bh.: dim $N(A) < \infty$,

endlichdim. Teilraum von X

Beweis: (indirekt)

Ann.: $\dim N(A) = \infty$:

$\Rightarrow \exists\, \{u_n\} \subset N(A)$: a) $\{u_n\} \nrightarrow$

d.h. $\boxed{u_n = Ku_n}$ b) $\nexists$ Häufungspunkt

K kompakt $\Rightarrow$ $\{Ku_n\}$ relativ kompakt

$\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $\{Ku_{n_k}\}$

$\Rightarrow$ $\{u_{n_k} = Ku_{n_k}\}$ konvergiert

$\uparrow$

$(I - K)u_{n_k} = 0$!

$\Rightarrow$ $\{u_n\}$ hat konvergente Teilfolge $\{u_{n_k}\}$ $\lightning$ zu b).

q.e.d.

Satz 2.15: ($R(A) = \text{im } A = \text{Bild von } A$)

> Vor.: $A = I - K,\ K \in L(X)$ – kompakt.
>
> Bh.: $R(A) = \overline{R(A)}$.

Beweis:

- Sei $\{x_k\} \subset X : Ax_k \to y$.
  Zu zeigen: $\exists\, x \in X : Ax = y \in R(A)$.
- Ann.: $\{d(x_k, N(A)) := \inf\limits_{u \in N(A)} \|x_k - u\|\}\ \dagger$:

  $\Rightarrow \exists\, \{u_k\} \subset N(A) : \{x_k - u_k\}\ \dagger$

  $$\Rightarrow Ax_k = A(x_k - u_k) = x_k - u_k - \underbrace{K(x_k - u_k)}_{\text{relativ kompakt}} \tag{1}$$

  $\Rightarrow \exists$ konverg. Teilfolge $\{K(x_{k_n} - u_{k_n})\}$ der Folge $\{K(x_k - u_k)\}$

  $$\Rightarrow x_k - u_k \overset{(1)}{=} \underset{\substack{\text{konv.}\\ \downarrow \\ y}}{Ax_k} + \underset{\text{konv.}}{K(x_k - u_k)} \xrightarrow{k\to\infty} x \in X \qquad \text{(o. B. d. Allgem.: } K_n \rightsquigarrow K\text{)}$$

  $\underline{\exists\, x \in X}$

  $\overset{(1)}{\Rightarrow} y = x + Kx = Ax \in R(A) \qquad \#$
- Ann.: $\{d(x_k, N(A))\}$ sei unbeschränkt: ($\curvearrowright$ $\lightning$)

  $\Rightarrow \forall\, \{u_k\} \subset N(A) \curvearrowright \|x_k - u_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

  $\Rightarrow$ Btr. $t_k = \frac{x_k - u_k}{\|x_k - u_k\|}\ \dagger \qquad \|t_k\| = 1$

  $$\Rightarrow (1) \qquad \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{\|x_k - u_k\|}} \underset{\substack{\downarrow\\ y}}{Ax_k} = \underset{\substack{\|\\ t_k}}{\frac{x_k - u_k}{\|x_k - u_k\|}} - K \underset{\substack{\|\\ t_k}}{\frac{x_k - u_k}{\|x_k - u_k\|}}$$

  $$\Rightarrow t_k - Kt_k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{2}$$

  $\Rightarrow K$ kompakt, $\{t_k\}\ \dagger \ \Rightarrow \exists$ konv. Teilfolge von $\{Kt_k\}$

  $$\overset{(2)}{\Rightarrow} \exists\, t \in X : t_k = \underset{\substack{\downarrow\\ t}}{Kt_k} + \underset{\to 0}{(t_k - Kt_k)} \to t \in X$$

  $\Rightarrow t \in N(A)$, da $t_k - Kt_k \to t - Kt = 0$

  $\Rightarrow$ Aus der Darstellung

  $$x_k = u_k + \|x_k - u_k\| t_k = \underset{\in N(A)}{u_k + \|x_k - u_k\| t} + \underset{\in N(A)}{\|x_k - u_k\|(t_k - t)}$$

folgt $d(x_k, N(A)) \le \|x_k - (u_k + \|x_k - u_k\|\, t)\| \le \|x_k - u_k\|\, \|t_k - t\|$
für bel. Folge $\{u_k\} \subset N(A)$.
Wählen nun z.B. $\{u_k\} \subset N(A) : \|x_k - u_k\| \le 2d(x_k, N(A))$,
so gilt $d(x_k, N(A)) \le 2d(x_k, N(A))\underbrace{\|t_k - t\|}_{\to 0}$ ↷ $d(x_k, N(A)) \to 0$ ↯

q.e.d.

Satz 2.16: ($N(A) = \{0\}$, d.h. A injektiv)

Vor.: $A = I - K,\ K \in L(X)$ – kompakt
$N(A) = \{0\}$

Bh.: Dann ist A abgeschlossen (d.h. das Bild abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen) und als Abbildung von X nach $R(A)$ regulär, d.h. $A \in L(X, R(A))$ und $\exists\ A^{-1} \in L(R(A), X)$.

Beweis:

- $\forall M = \bar{M} \subset X \Rightarrow AM = \overline{AM} \subset X$
  analog zum Bew. von Satz 2.15: $X \mapsfrom M$ u. $N(A) \mapsfrom \{0\}$.
- $A \in L(X, R(A))$ als Op. von X nach $R(A)$ bijektiv (inj. auf), d.h.
  $\exists\ A^{-1} : R(A) \mapsto X$.
  $A^{-1} \in L(R(A), X)$, da A abgeschlossen (siehe Bew. Satz 2.15).
  Lin. Op. stetig gdw. Urbild abgeschlossener Mengen ist abge.

q.e.d.

Bemerkung:

1) $N(I - K) = \{0\} \Rightarrow \exists\ A^{-1} = (I - K)^{-1} \in L(R(A), X)$.
   Nach der Riesz-Schauder-Theorie gilt sogar: $R(A) = X$!
   d.h. $\exists\ A^{-1} \in L(X)$, d.h. A ist regulär.
2) Falls $A = I - K$ nicht injektiv (d.h. $N(I - K) \setminus \{0\} \neq \emptyset$), dann gilt:

$$\tilde{A} : \underbrace{X|_{N(A)}}_{\text{Faktorraum}} \mapsto R(A) \text{ regulär,}$$

wobei $\tilde{A}(u + N(A)) := Au$.

Bemerkung: Riesz-Schauder-Theorie zum Spektrum $\sigma(K)$ kompakter Operatoren $K \in L_c(X)$:

1) $\sigma(K)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Punkten, die sich nur im Punkt 0 häufen können.

2) X – unendlichdim. $\Rightarrow 0 \in \sigma(K)$.

3) $\lambda \in \sigma(K) : \lambda \neq 0$ sind EW.
Die dazugeh. Räume der EV bzw. Hauptvektoren sind endlichdimensional.

■ Die **Fredholm-Theorie** gibt eine Antwort auf die Frage, für welche rechte Seiten $b \in Y$ die Aufgabe

(3) Ges. $u \in X : Au = b$ in Y

eine Lösung hat, wobei $A : X \mapsto Y$ – linear.

Zur Charakterisierung von $R(A)$ wird dabei der duale (= B-Raum-adjungierter = „adjungierter") Operator benötigt.

Def. 2.9: (dualer Operator)
Seien X, Y – B-Räume (bzw. normierte Räume) und $A : X \mapsto Y$ ein linearer Operator. Ein linearer Operator $A^* : Y^* \mapsto X^*$ heißt zu A dual, gdw.

(4) $$< A^*y^*, x > \; = \; < y^*, Ax > \quad \forall x \in X \quad \forall y^* \in Y^*,$$

wobei $< \cdot, \cdot > \; = \; < \cdot, \cdot >_{X^* \times X}: \quad X^* \times X \to I\!R^1$
$= \; < \cdot, \cdot >_{Y^* \times Y}: \quad Y^* \times Y \to I\!R^1$
die entsprechenden Dualitätsprodukte bezeichnen.

Lemma 2.3: ($\exists !\ A^* : Y^* \mapsto X^*$)

Vor.: A bilde stark konvergente Folgen auf zumindest schwach konvergente Folgen ab, d.h. $x_n \to x$ in $X \Rightarrow Ax_n \rightharpoonup Ax$ in Y.

Bh.: $\exists !\ A^* : Y^* \mapsto X^*$: (4).

Beweis:

- Sei $y^* \in Y^*$.
  Zeigen: a) $\exists\ x^* = A^*y^* \in X^*: \quad < x^*, x > \stackrel{!}{\equiv} < y^*, Ax > \quad \forall x \in X$,
  b) $A^* : y^* \in Y^* \to x^* \in X^*$ linear,
  c) Eindeutigkeit.

- a) <u>Linearität:</u> des Funktionals $x^* \in X^*$ trivial.
  <u>Stetigkeit:</u> $\{x_n\} \subset X$: $\quad x_n \to x$ in X
  $\Rightarrow \quad Ax_n \rightharpoonup Ax$ in Y
  $$\Rightarrow < x^*, x_n > = < y^*, Ax_n > \to < y^*, Ax > = < x^*, x >$$
  b) Linearität der Abb. A^* trivial.
  c) Eindeutigkeit trivial.

q.e.d.

<u>Korollar 2.4:</u>
$\exists!\, A^* \in L(Y^*, X^*)$ zu geg. $A \in L(X, Y)$, und es gilt $\|A^*\|_{L(Y^*,X^*)} = \|A\|_{L(X,Y)}$.

<u>Beweis:</u>
$A \in L(X, Y) \curvearrowright\ x_n \to x$ in $X \Rightarrow Ax_n \to Ax$ in Y.
<u>Lemma 2.3:</u> $\exists\,!\ A^* : Y^* \mapsto X^*$.
<u>mms:</u> A^* ist stetig, und es gilt: $\|A^*\|_{L(Y^*,X^*)} = \|A\|_{L(X,Y)}$. **q.e.d.**

Mit Hilfe des <u>dualen Operators A^*</u> läßt sich nun unmittelbar eine <u>notwendige Bed.</u> an $b \in Y$ für Lösbarkeit von (3) ableiten:

Sei $u \in X$ eine Lsg. von (3), d.h. $Au = b$.
Dann gilt $\forall y^* \in N(A^*) \subset Y^*$:

$$< y^*, b > = < y^*, Au > = < \underbrace{A^* y^*}_{=0}, u > = 0,$$

d.h. $b \in N(A^*)^\perp := \{y \in Y : < y^*, y > = \ 0 \quad \forall y^* \in N(A^*)\}$.

$$\Rightarrow \qquad \boxed{R(A) \subseteq N(A^*)^\perp}\ .$$

<u>Satz 2.17:</u>

<u>Vor.:</u> X, Y – B-Räume ($\curvearrowright$ norm. Räume),
$A : X \mapsto Y$ – linear,
$A^* : Y^* \mapsto X^*$ – zu A dualer Operator.

<u>Bh.:</u> $\qquad \overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$.

<u>Beweis:</u>

- Zeigen: $y \notin \overline{R(A)} \Rightarrow y \notin N(A^*)^\perp = \overline{N(A^*)^\perp}$.

- Satz v. Hahn & Banach ([5] ANALYSIS III: Pkt. 10, S. 40 Korollar)
  $\exists\, y^* \in Y^* : < y^*, y > = 1$ und $< y^*, z > = 0 \quad \forall z \in \overline{R(A)}$
  $$\begin{aligned} \Rightarrow < y^*, Ax > &= 0 \quad \forall x \in X \\ \Rightarrow < A^*y^*, x > &= 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow A^*y^* = 0 \Leftrightarrow y^* \in N(A^*) \\ \Rightarrow < y^*, y > &= 1 \;\Rightarrow y \notin N(A^*)^\perp. \end{aligned}$$

q.e.d.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Satz 2.15: } R(A) = \overline{R(A)} \text{ für } A = I - K,\ K - \text{kompakt} \\ \text{Satz 2.17: } \overline{R(A)} = N(A^*)^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow R(A) = N(A^*)^\perp.$$

Satz 2.18: (Fredholmsche Alternative)

Vor.: $K \in L(X)$ kompakt, $A = I - K \in L(X)$, X – B-Raum (bzw. norm. Raum).

Bh.: $R(A) = N(A^*)^\perp$, d.h. die Operatorgleichung

(3) Ges. $u \in X : Au = b$ in $Y = X$

ist lösbar, gdw. $< y^*, b > = 0 \quad \forall y^* \in N(A^*)$.

Beweis: folgt sofort aus Satz 2.15 und Satz 2.17.

q.e.d.

Bemerkung:
Unter den Vor. von Satz 2.18 läßt sich analog zeigen

$$R(A^*) = N(A)^\perp,$$

d.h.

$$(3)^* \qquad \text{Ges. } y^* \in Y^* : A^*y^* = c^* \text{ in } X^*$$

ist lösbar, gdw. $< c^*, x >= 0 \quad \forall x \in N(A)$.
Außerdem gilt:

$$\dim N(A) = \dim N(A^*) = \operatorname{codim} R(A) < \infty,$$

d.h. $R(A)$ hat endliche Kodimension. In diesem Sinne ist A „fast" surjektiv.
Aus K kompakt folgt K^* kompakt.

$\boxed{\text{Ü 2.8}}$ Was wissen Sie unter Verwendung der Sätze 2.14 – 2.18 und der gemachten Bemerkungen über die Lösbarkeit der Operatorgleichungen

$$\begin{array}{lllll} \text{Ges. } u \in X: & Au & = & b & \text{in } Y \\ \text{Ges. } u \in X: & Au & = & 0 & \text{in } Y \\ \text{Ges. } y^* \in Y^*: & A^*y^* & = & c^* & \text{in } X^* \\ \text{Ges. } y^* \in Y^*: & A^*y^* & = & 0 & \text{in } X^* \end{array}$$

mit $A = I - K$, K – kompakt, X – B-Raum. Vergleichen Sie diese Aussagen mit Ihrem Wissen über die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme: Ges. $u \in I\!\!R^n : A\underline{u} = \underline{b}$ in $I\!\!R^n$ bzw.

$$\text{Ges. } u \in X = I\!\!R^n : A\underline{u} = \underline{b} \text{ in } Y = I\!\!R^m.$$

Bemerkung: zu X, Y – Hilbert-Räume: $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$:
Ein linearer Operator

$$A^{\circledast} : Y \underset{\overset{\longrightarrow}{J_Y^{-1}}}{\overset{\overset{J_Y}{\longleftarrow}}{\equiv}} Y^* \mapsto X \underset{\overset{\longrightarrow}{J_X^{-1}}}{\overset{\overset{J_X}{\longleftarrow}}{\equiv}} X^* = \overline{R(A^{\circledast})} \oplus N(A)$$

$$\text{Riesz} \qquad \text{Riesz} \qquad Y = \overline{R(A)} \oplus N(A^{\circledast})$$

heißt zum linearen Operator $A : X \mapsto Y$ adjungiert, gdw.

$$\begin{array}{rcll} (A^{\circledast} y, x)_X & = & (y, Ax)_Y & \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \\ \| & & \| & \\ < \underbrace{J_X^{-1} A^{\circledast} J_Y}_{\substack{:=A^* = A^{\circledast} \\ \text{id.}}} y^*, x > & = & < J_Y y^*, Ax > & \forall x \in X \quad \forall y^* \in Y^*. \end{array}$$

Spezialfälle:
$X = Y : A^{\circledast} = A$ – selbstadjungiert (s.a.);
$X = Y = I\!\!R^n, A^{\circledast} = A^T$,
$X = Y = C^n : A^{\circledast} = \bar{A}^T = A^H$.

■ **Kombinieren Aussagen der Punkte**

- 2.2: Kontraktivität: $K_2 \in L(X) : \rho(K_2) < 1$,
- 2.4: Kompaktheit: $K_4 \in L(X)$: kompakt, d.h. $K_4 \in L_c(X)$,

wobei X – B-Raum. Dann ist der Operator

$$A = I - K_2 - K_4 \in L(X)$$

regulär, d.h. $\exists\ A^{-1} \in L(X)$, falls $N(A) = \{0\}$.

__**Beweis:**__

$$A = I - K_2 - K_4 = \underbrace{(I - K_2)}_{\text{regulär}} \overbrace{(I - K)}^{N(I-K)=0} \text{ mit } \underbrace{K = (\underbrace{I}_{\substack{\uparrow \\ \text{reg.}}} - K_2)^{-1} \underbrace{K_4}_{\substack{\uparrow \\ \text{kompakt}}}}_{\text{kompakt}}$$

q.e.d.

3 Funktionenräume: Eine Einführung in die Theorie der Sobolev-Räume

<u>Lit.:</u> [1] [Adams R.A.: Sobolev Spaces. Academic Press, San Francisco, 1975], [15], [16].

3.1 Die verallgemeinerte Ableitung nach Sobolev und Distributionen

■ Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$–Gebiet (*), $\Omega \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
Definieren

$\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$ = Raum aller beliebig oft stetig differenzierbaren, reellen Fkt. mit kompaktem Träger in Ω,

und führen in $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$ folgende <u>Konvergenz</u> ein:

$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$:

$$\boxed{\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ in } \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega), \text{ gdw. } \begin{array}{l} \text{a) } \exists\, K \subset \Omega - \text{kompakt:} \\ \quad \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \notin K \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{b) } \partial^\alpha \varphi_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \text{ auf } K \quad \forall \alpha \end{array}} \tag{1}$$

$\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$, gdw. $\varphi - \varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$.

$$\begin{aligned} D(\Omega) &= \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega) \text{ versehen mit der Konvergenz (1)} \\ &= \text{Raum der Grundfunktionen.} \end{aligned}$$

■ <u>**Motivation:**</u> $\Omega = (-1, +1)$
Sei $u \in C^1[-1,1]$, d.h. $u' \in C[-1,1]$.
Wegen der Formel der partiellen Integration gilt dann:

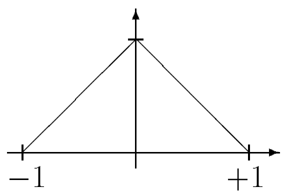
$$\int_{-1}^{1} uv'\,dx = -\int_{-1}^{1} u'v\,dx + \underbrace{uv|_{-1}^{1}}_{=0} \quad \forall v \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$$

Also gilt:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} uv'\,dx = -\int_{-1}^{1} u'v\,dx \quad \forall v \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)}$$

Sei nun

$$u(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq -1 \end{cases} \tag{2}$$



Offenbar: $u \in C[-1,+1]$, aber $u \notin C^1[-1,+1]$!

Aber es existiert eine lokal integrierbare (d.h. über jede kompakte Teilmenge K von Ω (hier: †)) Fkt. $w \in L_{\text{loc}}(\Omega)$:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} uv'\,dx = -\int_{-1}^{1} wv\,dx \quad \forall v \in \overset{\bullet}{C}^{\infty}(\Omega)}$$

Tatsächlich,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} uv'\,dx &= \int_{-1}^{0}(1+x)v'\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)v'\,dx = \\
&= -\int_{-1}^{0}(+1)v\,dx + (1+x)v|_{-1}^{0} - \int_{0}^{1}(-1)v\,dx + (1-x)v|_{0}^{1} \\
&= -\int_{-1}^{1} wv\,dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(\Omega)
\end{aligned}$$

mit $w = \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ in } (-1,0) \\ -1 \text{ in } (0,1) \end{array} \right\} \underset{\uparrow}{=:} u' \in L_{\infty}(\Omega) \subset L_{\text{loc}}(\Omega)$.

verallgem. Ableitung
(nach S. L. Sobolev)

- **Def. 3.1.:** (Verallgem. Ableitung nach S. L. Sobolev)
  Die Fkt. $w \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ heißt verallgemeinerte Ableitung nach Sobolev vom Typ α der Fkt. $u \in L_{\text{loc}}(\Omega)$, falls

  (3) $$\int_{\Omega} u\partial^{\alpha}v\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} wv\,dx \qquad \forall v \in \overset{\bullet}{C}^{\infty}(\Omega).$$

  Wir schreiben: $w = \partial^{\alpha}u$.

- $\boxed{\textbf{Ü 3.1}}$ Man zeige: $\nexists$ zweite verallg. Abl. $u'' \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ von (2) !

- Eigenschaften der verallgemeinerten Ableitung:

  1) Für $u \in C^k(\bar{\Omega})$ stimmen klassische und verallgemeinerte Ableitung bis zur Ordnung k überein.

2) Die verallgem. Abl. ist eindeutig festgelegt bis auf eine Menge vom Maß Null, d.h. zwei verallgem. Abl. unterscheiden sich höchstens auf einer Menge vom Maße Null in $I\!R^n$.
3) Die verallgem. Abl. erhalten viele Eigenschaften (z.B. Rechenregeln) der klassischen Abl. (aber nicht alle !).

■ Bemerkung:

Begriff der verallgem. Abl. kann auch auf andere Differentialoperatoren, wie div, rot etc. übertragen werden z.B. auf div $u := \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]$:
$w = \text{div } u \in L_{\text{loc}}(\Omega): \quad \int_\Omega u^T \nabla\varphi \, dx = -\int_\Omega w \cdot \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$
zu geg. Vektorfeld $u \in (L_{\text{loc}}(\Omega))^n$.

- **Def. 3.2.:** (Distribution = verallgem. Fkt; $D'(\Omega)$)
  Jedes lineare, stetige Funktional über $D(\Omega)$ heißt Distribution bzw. verallgemeinerte Fkt. Die Menge aller Distributionen (= lin. Raum) bezeichnen wir mit $D'(\Omega)$:
  $$< \cdot, \cdot >: D'(\Omega) \times D(\Omega) \to I\!R^1,$$
  d.h. u: $\varphi \in D(\Omega) \to < u, \varphi > \in I\!R^1$:
  - linear: o.k.,
  - stetig: $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ in $D(\Omega) \Rightarrow < u, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

■ Beispiele:

1) Sei $u \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ (z.B. $u \in L_p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}(\Omega)$; $p \geq 1$).
Dann wird durch die Beziehung

$$(4) \qquad < \tilde{u}, \varphi > := \int_\Omega u(x)\varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

eindeutig eine Distribution $\tilde{u} \in D'(\Omega)$ (Bew.: mms) definiert und mit $u \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ identifiziert.
Distributionen, die die Darstellung (4) haben, heißen regulär. Gibt es eine derartige Darstellung nicht, dann heißt die Distribution singulär.

2) Sei $\xi \in \Omega$ fixiert. Durch

$$(5) \qquad < \delta_\xi, \varphi > := \varphi(\xi) \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

wird offenbar (mms) eine Distribution $\delta_\xi \in D'(\Omega)$ definiert: i.Z.: $\delta_\xi = \delta(x - \xi)$ = Diracsche Delta-Distribution. δ_ξ ist eine singuläre Distribution (mms*).

- Ableitung von Distributionen $u \in D'(\Omega)$:
  Ist $u \in D'(\Omega)$, dann gilt dies offenbar (mms) auch für

  (6) $\qquad < v_\alpha, \varphi > := (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi > \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$

  d.h. $v_\alpha \in D'(\Omega) \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i \geq 0,\ \alpha_i \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, n}.$

  Wir schreiben
  $$\partial^\alpha u := v_\alpha \in D'(\Omega)$$
  und nennen $\partial_\alpha u$ distributive Ableitung von u. Offenbar besitzt eine Distribution Ableitungen beliebiger Ordnung im Sinne (6).

- $\boxed{\textbf{Ü 3.2}}$ Man berechne die distributive 2. Ableitung $u'' \in D'(\Omega)$ von (2) !

- Distributive Ableitung und verallgem. Ableitung nach S. L. Sobolev:
  Ist die distributive Abl. $\partial^\alpha u \in D'(\Omega)$ einer lokal integrierbaren Fkt. $u \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ als Distribution regulär, d.h. ebenfalls lokal integrierbar, dann existiert die Abl. nach Sobolev i.S. der Def. 3.1 und beide Ableitungen werden identifiziert (bis auf eine Menge vom Maße Null):

$$\begin{array}{rcll} < \partial^\alpha u, \varphi > & := & (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi > & \forall \varphi \in D(\Omega) \\ \| & & \quad\quad \| & \quad\quad \overset{\bullet}{\|} \\ \int\limits_\Omega \partial^\alpha u \varphi \, dx & := & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx & \forall \varphi \in C^\infty(\Omega) \end{array}$$

3.2 Die Räume $W_p^k(\Omega)$ und einige elementare Eigenschaften dieser Räume

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – (†) Gebiet (mit hinreichend glattem Rand), $\Omega \neq \emptyset,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$

- Wh.: L_p-Räume (B-Räume)

$$\begin{aligned} L_p(\Omega) &:= \Big\{ u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^1 \text{ – meßbar: } \|u\|_{L_p(\Omega)} < \infty \Big\}, \\ &\quad \text{wobei } 1 \leq p < \infty, \\ &\quad \|u\|_{L_p(\Omega)} = \|u\|_{0,p,\Omega} := \left(\int\limits_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

$$L_\infty(\Omega) := \Big\{u : \Omega \mapsto I\!R^1 \text{ – meßbar: } \|u\|_{L_\infty(\Omega)} < \infty\Big\},$$
$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \|u\|_{0,\infty,\not\Omega} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

$L_2(\Omega)$ = Hilbert-Raum:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \|u\|_{0,\not 2,\not\Omega} = (u,u)^{0,5}_{L_2(\Omega)},$$
$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = (u,v)_{0,\not 2,\not\Omega} := \int\limits_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Der Schrägstrich „/“ soll andeuten, daß diese Indizes der Einfachheit halber im folgenden auch machmal weggelassen werden können.

$$\begin{array}{lcl} [L_p(\Omega)]^* & = & L_q(\Omega),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1<p<\infty, \\ [L_1(\Omega)]^* & = & L_\infty(\Omega), \\ [\mathrm{L}_\infty(\Omega)]^* & \neq & L_1(\Omega),\ \text{d.h. } L_1(\Omega) \text{ ist nicht Dualraum zu } L_\infty(\Omega)\ ! \end{array}$$

- **Def. 3.3.:** Sobolev-Räume $W^k_p(\Omega),\ 1 \le p \le \infty,\ k = 0,1,\ldots$:

$$W^k_p(\Omega) := \{u \in L_p(\Omega) : \ \exists \text{ verallg. Abl. } \partial^\alpha u \in L_p(\Omega) \text{ nach Sobolev } \forall \alpha : 0 \le |\alpha| \le k\},$$

$$\|u\|_{W^k_p(\Omega)} = \|u\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int\limits_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^k_\infty(\Omega)} = \|u\|_{k,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Bez.: $\partial^\alpha u = u$ für $|\alpha| = 0$,
$W^0_p(\Omega) = L_p(\Omega)$.

- Eigenschaften der Räume $W^k_p(\Omega)$:

  1) $W^k_p(\Omega)$ sind Banach-Räume:
     - separabel ($\exists$ abzählbare dichte Teilmenge),
     - uniform konvex für $1 < p < \infty$,
     - reflexiv ($X = X^{**}, X = W^k_p(\Omega)$) für $1 < p < \infty$.
  2) $H^k(\Omega) = W^k_2(\Omega)$ sind Hilbert-Räume:

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \|u\|_{k,2,\Omega} = (u,u)^{0,5}_{H^k(\Omega)},$$

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} = (u,v)_{k,2,\Omega} := \sum_{0\le|\alpha|\le k} \int\limits_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v\,dx.$$

3) Definieren:

$$\tilde{W}_p^k(\Omega) = \left[H_p^k(\Omega)\right] := \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{k,p,\Omega}}_{\substack{\text{Abschluß}\\ \text{Vervoll–}\\ \text{ständigung}}} \text{ in } W_p^k(\Omega).$$

Im allgem. gilt:

$$\tilde{W}_p^k(\Omega) \underset{(\neq)}{\subset} W_p^k(\Omega)\ !$$

Falls Ω beschränkt ist und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, dann gilt

$$\tilde{W}_p^k(\Omega) = W_p^k(\Omega)$$

und folglich sind $C^\infty(\bar{\Omega})$ bzw. $C^l(\bar{\Omega})$ mit $l \geq k$ dicht in $W_p^k(\Omega)$.

- <u>Vereinbarung:</u>
  Um zu vermeiden, daß $\tilde{W}_p^k(\Omega) \neq W_p^k(\Omega)$ gilt, setzen wir im folgenden immer voraus:

  (1) $\quad\Omega$ ‡ und $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

  Falls diese Voraussetzung nicht benötigt wird, dann werden wir das gesondert erwähnen !

- <u>Der Begriff der verallgemeinerten Randfunktion:</u>
  Sei $\Omega \subset I\!R^N$, $N \geq 2$, ‡ und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $1 \leq p < \infty$. Es gibt genau einen linearen, stetigen Operator

  (2) $\quad\gamma \in L(W_p^1(\Omega), L_p(\partial\Omega))$:
  $g(x) \equiv \gamma u(x) = u(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega})$.
  i.Z.: $\gamma u(x) = u|_\Gamma$, $\Gamma = \partial\Omega$.

  Die Fkt. $g \in L_p(\partial\Omega)$ heißt <u>verallg. Randfkt.</u> von $u \in W_p^1(\Omega)$. Zwei verallgem. Randfkt. zu $u \in W_p^1(\Omega)$ unterscheiden sich höchstens auf einer Menge vom Oberflächenmaß Null. Aus (2) folgt, daß $\exists\ c = \text{const.} \geq 0$:

  (3) $$\underset{\substack{\|\\ \gamma u}}{\|g\|_{L_p(\partial\Omega)}} \leq c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \quad \forall\ u \in W_p^1(\Omega),$$

  d.h. $\quad\|\gamma\|_{L(W_p^1(\Omega), L_p(\partial\Omega))} \leq c.$

  γ heißt auch Trace-Operator.
  Als Operator $\gamma : W_p^1(\Omega) \mapsto L_p(\partial\Omega)$ ist γ <u>nicht</u> surjektiv !
  <u>Bem.:</u> $\gamma \in L(H^1(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ ist Abbildung auf ($\twoheadrightarrow$).
  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$, vgl. Def. 3.6 !

- **<u>Def. 3.4.:</u>** Sobolev-Räume $\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty,\ k = 0, 1, \ldots$:
  $\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega) := \overline{\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p,\Omega}}$, d.h. Abschluß von $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$ in $W^k_p(\Omega)$.
  Hier wird die Voraussetzung (1) nicht benötigt !

- <u>Eigenschaften der Räume $\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega)$:</u>

  1) $\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega)$ ist abgeschlossener Teilraum von $W^k_p(\Omega)$, da $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$ linearer Teilraum von $W^k_p(\Omega)$ ist.
  2) $\overset{\circ}{W}{}^0_p(\Omega) = L_p(\Omega)$, da $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$ liegt.
  3) $\gamma u := u|_{\Gamma = \partial\Omega} = 0 \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$.
  4) $\gamma\, \partial^\alpha u = 0 \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega) \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq k-1,\ \ k \geq 1$.
  5) $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^k_2(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum.

- **<u>Def. 3.5.:</u>** Die Räume $W^{-k}_q(\Omega)$.
  Sei $1 < p < \infty,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$;
  $W^{-k}_q(\Omega) := \{u \in D'(\Omega) : \|u\|_{-k,q,\Omega} < \infty\}$,
  mit der sogen. „negativen" Norm (mms) $\|u\|_{W^{-k}_q(\Omega)} = \|u\|_{-k,q,\Omega} := \sup\limits_{\substack{\varphi \in D(\Omega) \\ \varphi \not\equiv 0}} \frac{|<u,\varphi>_{D' \times D}|}{\|\varphi\|_{k,p,\Omega}}$.

- **<u>Lemma 3.1:</u>** $W^{-k}_q(\Omega) = [\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega)]^*$

  <u>Vor.:</u> Sei $1 < p < \infty,\ q^{-1} + p^{-1} = 1,\ k = (0), 1, 2, \ldots$

  <u>Bh.:</u> Dann können die Räume $W^{-k}_q(\Omega)$ und $[\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega)]^*$ identifiziert werden.

  <u>Beweis:</u>

  a) Sei $u \in [\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega)]^*$ ein lineares, stetiges Funktional über $X = \overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega)$.
  Setzen
  $$< \tilde{u}, \varphi >_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} := < u, \varphi >_{X^* \times X} \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$
  Dann gilt:
  $$| < \tilde{u}, \varphi >_{D' \times D} | = | < u, \varphi >_{X^* \times X} | \leq \|u\|_{X^*} \|\varphi\|_X \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$
  d.h. $\tilde{u} \in W^{-k}_q(\Omega)$ und $\|\tilde{u}\|_{-k,q,\Omega} \leq \|u\|_{X^*}$ (mms).

b) Sei umgekehrt $\tilde{u} \in W_q^{-k}(\Omega)$, dann gilt

(4) $$| < \tilde{u}, \varphi >_{D' \times D} | \leq \|\tilde{u}\|_{-k,q,\Omega} \, \|\varphi\|_{k,p,\Omega} \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Da $D(\Omega) \overset{\overset{\text{Menge}}{\downarrow}}{=} \overset{\bullet}{C}^{\infty}(\Omega)$ in $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ dicht liegt, läßt sich $\tilde{u}$ durch die Beziehung

(5) $$< u, \varphi >_{X^* \times X} := \lim_{n \to \infty} < \tilde{u}, \varphi_n >_{D' \times D}$$

mit $\overset{\bullet}{C}^{\infty}(\Omega) \ni \varphi_n \to \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ in $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$
eindeutig zu einem linearen, stetigen Funktional

$$u \in [\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)]^*$$

fortsetzen (mms).
Desweiteren gilt wegen (4) und (5)

$$\|u\|_{X^*} \leq \|\tilde{u}\|_{-k,q,\Omega}.$$

In diesem Sinn, d.h. a) $[\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)]^* \ni u \overset{!}{\to} \tilde{u} \in W_q^{-k}(\Omega)$

b) $W_q^{-k}(\Omega) \ni \tilde{u} \overset{!}{\to} u \in [\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)]^*$,

kann man $W_q^{-k}(\Omega)$ mit $[\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)]^*$ identifizieren und $\|u\|_{X^*} = \|\tilde{u}\|_{-k,q,\Omega}$.

q.e.d.

■ Bem.: $\ldots \underset{\hookrightarrow}{\subset} W_2^2(\Omega) \underset{\hookrightarrow}{\subset} W_2^1(\Omega) \underset{\hookrightarrow}{\subset} L_2(\Omega) \underset{\hookrightarrow}{\subset} W_2^{-1}(\Omega) \underset{\hookrightarrow}{\subset} W_2^{-2}(\Omega) \underset{\hookrightarrow}{\subset}.$

■ Spezielle Räume:

- $H(\mathrm{div}, \Omega) := \{u \in [L_2(\Omega)]^d : \mathrm{div}\ u \in L_2(\Omega)\} = H$-Raum mit $(u, v)_{H(\mathrm{div},\Omega)} := (u, v)_{[L_2(\Omega)]^d} + (\mathrm{div}\ u, \mathrm{div}\ v)_{L_2(\Omega)}$.
- Analog definiert man: $H(\mathrm{rot}, \Omega)$, $H^{-1}(\mathrm{div}, \Omega), \ldots$.

■ **Def. 3.6.:** Die Sobolev-Slobodeckij-Räume $H^s(\Omega)$, s – reell:

- $s = k$ – ganzzahlig: $H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega)$;
  siehe **Def. 3.3** ($s \geq 0$) und **Def. 3.5** ($s < 0$).
- $s > 0$: $s = k + \sigma$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$, $\sigma \in (0, 1)$:
  $H^s(\Omega) = \{u \in H^k(\Omega) : |u|_{k+\sigma,\Omega} < \infty\}$ (sep. H-Raum),
  $\|u\|^2_{H^s(\Omega)} \equiv \|u\|^2_{s,\Omega} := \|u\|^2_{k,\Omega} + |u|^2_{k+\sigma,\Omega}$ (Norm),

$(u,v)_{H^s(\Omega)} \equiv (u,v)_{s,\Omega} := (u,v)_{k,\Omega} + (u,v)_{k+\sigma,\Omega}$ (Skalarprodukt),
$|u|^2_{k+\sigma,\Omega} := (u,u)_{k+\sigma,\Omega}$,
$(u,v)_{k+\sigma,\Omega} := \sum\limits_{|\alpha|=k} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{(\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y))(\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y))}{|x-y|^{n+2\sigma}} \, dx\, dy.$

- $s < 0$:
  $H^s(\Omega) = [\overset{\circ}{H}{}^{-s}(\Omega)]^*$, wobei $\overset{\circ}{H}{}^{-s}(\Omega) = \overline{\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{-s,\Omega}}$.

■ Die Sobolev- und die Sobolev-Slobodeckij-Räume können auch auf Mannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, also insbesondere auf $\Gamma = \partial\Omega$ definiert werden, z.B.:

$W_p^k(\Gamma)$, $H^s(\Gamma)$! (siehe Lit., z.B. [16]).

3.3 Satz über äquivalente Normierungen

■ **Def. 3.7.:** $\|\cdot\|_{(1)} \simeq \|\cdot\|_{(2)}$.
Zwei Normen $\|\cdot\|_{(1)}$ und $\|\cdot\|_{(2)}$ heißen auf dem linearen Raum X äquivalent, gdw. $\exists$ positive, fix. Konstanten $\underline{c}$ und $\bar{c}$:

(1) $\underline{c}\|u\|_{(2)} \le \|u\|_{(1)} \le \bar{c}\|u\|_{(2)} \quad \forall u \in X.$

■ Bemerkung:
Viele wichtige Eigenschaften (B-Raum, Stetigkeit, Konvergenz etc.) ändern sich beim Übergang zu äquivalenten Normen nicht !

■ **Satz 3.1:** Normierungstheorem von S. L. Sobolev.

Vor.: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ † Gebiet: $\partial\Omega \in C^{0,1}$,
$1 \le p < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$,
f_i: $W_p^k(\Omega) \mapsto \mathbb{R}^1 (\mapsto [0,\infty))$, $i = 1, \ldots, l$ – System von Halbnormen:
- $\exists\, c_i = \text{const.} > 0 : 0 \le f_i(u) \le c_i \|u\|_{k,p,\Omega} \quad \forall u \in W_p^k(\Omega)$,
- $\left.\begin{array}{l} f_i(v) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, l \\ v \in P_{k-1} := \{\sum\limits_{|\alpha| \le k-1} c_\alpha x^\alpha\} \end{array}\right\} \Rightarrow v \equiv 0.$

Bh.: $\|u\|^*_{k,p,\Omega} := (\sum\limits_{i=1}^{l} f_i^p(u) + |u|^p_{k,p,\Omega})^{\frac{1}{p}} \simeq \|u\|_{k,p,\Omega}$,
wobei
$|u|_{k,p,\Omega} := (\sum\limits_{|\alpha|=k} \int\limits_\Omega |\partial^\alpha u|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$
die Standardhalbnorm in $W_p^k(\Omega)$ bezeichnet ($\ker |\cdot|_{k,p,\Omega} = P_{k-1}$).

Beweis:

a) $$\|u\|^*_{k,p} := \left(\sum_{i=1}^{l} f_i^p(u) + |u|^p_{k,p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{l} c_i^p \|u\|^p_{k,p} + |u|^p_{k,p}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\substack{\uparrow \\ |u|_{k,p} \leq \|u\|_{k,p}}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{l} c_i^p + 1\right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{k,p},$$

d.h. es gilt trivialerweise

$$\underline{c}\,\|u\|^*_{k,p} \leq \|u\|_{k,p} \quad \text{mit} \quad \underline{c} = \left(\sum_{i=1}^{l} c_i^p + 1\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

b) Der Beweis der anderen Seite der Äquivalenzungleichung ist <u>leider</u> <u>nicht konstruktiv</u> (bzgl. $\bar{c}$) und <u>nichttrivial</u> ($\curvearrowright$ indirekt). Wir benötigen dazu das folgende Kompaktheitsresultat von Rellich (Rellichscher Auswahlsatz)

$$\boxed{W_p^k(\Omega) \hookrightarrow W_p^{k-1}(\Omega)}$$

(mms bzw. Einbettungssätze Pkt. 3.8).

<u>Ann.</u>. $\nexists\, \bar{c} = \text{const.} > 0 : \|u\|_{k,p} \leq \bar{c}\,\|u\|^*_{k,p} \quad \forall u \in W_p^k(\Omega)$
$\Rightarrow \exists\, \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset W_p^k(\Omega) : m \leq \frac{\|u_m\|_{k,p}}{\|u_m\|^*_{k,p}},\ m = 1, 2, \ldots$
Btr. $v_m = \frac{u_m}{\|u_m\|_{k,p}} \Rightarrow$ 1) $\|v_m\|_{k,p} = 1$
2) $\|v_m\|^*_{k,p} = \frac{\|u_m\|^*_{k,p}}{\|u_m\|_{k,p}} \leq \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Aus 2), d.h. $\|v_m\|^*_{k,p} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, folgt:

- $|v_m|^p_{k,p} = \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha v_m\|^p_{0,p} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$
- $f_i(v_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, l.$

Aus $\{v_m\}$ ⫯ in $W_p^k(\Omega) \;\Rightarrow\; \{v_m\}$ relativ kompakt in $W_p^{k-1}(\Omega)$
$\Downarrow$
$\exists\, \{v_{m'}\} \subset \{v_m\} : v_{m'} \to v \in W_p^{k-1}(\Omega)$ in $W_p^{k-1}(\Omega)$

Resultat: $\boxed{\begin{array}{l} v_{m'} \to v \text{ in } W_p^{k-1}(\Omega) \\ \|\partial^\alpha v_{m'}\|_{0,p} \to 0, |\alpha| = k \end{array}} \underset{\text{mms}}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{l} v_{m'} \to v \text{ in } W_p^{k}(\Omega) \\ \partial^\alpha v = 0 \quad \forall \alpha : |\alpha| = k \end{array}}$

$\supseteq$ trivial

$\boxed{\ker |\cdot|_{k,p} = P_{k-1}}$

$\subseteq$ mms

$\Rightarrow v(x) = p_{k-1}(x) \in P_{k-1}$ da $\partial^\alpha v = 0 \quad \forall \alpha : |\alpha| = k.$

Weiters gilt: $f_i(v_{m'}) \to f_i(v) = 0$ da $v_{m'} \to v$ in $W_p^k(\Omega)$
$\forall i = 1, \ldots, l$ $\qquad f_i(v_m) \to 0$

$\Rightarrow \quad v = 0$ $\qquad \lightning \qquad \|v_{m'}\|_{p,k} = 1 = \|v\|_{p,k}$
da $v \in P_{k-1}$ $\qquad\qquad v_{m'} \xrightarrow[m' \to \infty]{W_p^k(\Omega)} v$

q.e.d.

■ $\boxed{\textbf{Ü 3.3}}$ Man zeige, daß auf den folgenden Räumen die nachstehend angeführten Normen äquivalente Normen zur Ausgangsnorm sind:

- in $W_p^1(\Omega)$:

  a) $\|u\|^*_{1,p,\Omega} := \left(|\int\limits_\Omega u\, dx|^p + |u|^p_{1,p,\Omega} \right)^{\frac{1}{p}}$ (vgl. Pkt. 3.4.2)

  b) $\|u\|^*_{1,p,\Omega} := \left(|\int\limits_{\partial\Omega} u\, ds|^p + |u|^p_{1,p,\Omega} \right)^{\frac{1}{p}}$

  c) $\|u\|^*_{1,p,\Omega} := \left(\int\limits_{\partial\Omega} |u|^p\, ds + |u|^p_{1,p,\Omega} \right)^{\frac{1}{p}}$

- in $W_p^k(\Omega)$:

  $\|u\|^*_{k,p,\Omega} := \left(\sum\limits_{l=0}^{k-1} \int\limits_{\partial\Omega} |\frac{\partial^l u}{\partial \vec{n}^{\,l}}|^p\, ds + |u|^p_{k,p,\Omega} \right)^{\frac{1}{p}}$

  wobei $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_n)^T$ – Außennormale an $\partial\Omega$, $|\vec{n}\,| = 1$.

- in $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ (die Voraussetzung $\partial\Omega \in C^{0,1}$ entfällt)

  $\|u\|^*_{k,p,\Omega} := |u|_{k,p,\Omega}$,

  d.h. in den Teilräumen $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ von $W_p^k(\Omega)$ ist die Standardhalbnorm $|\cdot|_{k,p,\Omega}$ eine zu $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ äquivalente Norm !

3.4 Einige Ungleichungen in Sobolev-Räumen

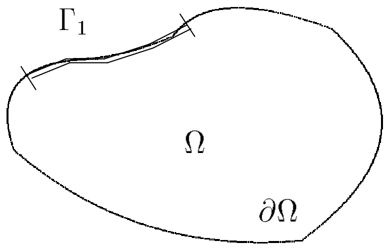
- Die folgenden Ungleichungen folgen direkt aus dem Normierungstheorem von S. L. Sobolev durch geschickte Wahl des Halbnormensystems $\{f_i(\cdot)\}$.

3.4.1 Ungleichungen vom Friedrichs-Typ

- Sei $\Gamma_1 \subset \Gamma$: $\text{meas}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Gamma_1) := \int\limits_{\Gamma_1} ds > 0$,

  $V_0 := \left\{v \in W_p^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\right\} \subset W_p^1(\Omega)$,

  $V_0 = \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ falls $\Gamma_1 = \Gamma$; $1 \leq p < \infty$.



- **<u>Lemma 3.2:</u>**

  <u>Vor.:</u> $1 \leq p < \infty$; $\Gamma_1 \subset \Gamma$: $\text{meas}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Gamma_1) > 0$.

  <u>Bh.:</u> Dann gilt $\forall u \in V_0$ die Ungleichung

  $$(2)' \qquad \int\limits_\Omega |u|^p \, dx \leq \bar{c}^p \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx.$$

  Für $\Gamma_1 = \Gamma$ nennt man (2') auch Friedrichs-Ungleichung: $\bar{c} = c_F$.

  <u>Beweis:</u>
  Wir zeigen mit Hilfe des Normierungssatzes 3.1:
  $\|u\|^*_{1,p,\Omega} := \left(f_1^p(u) + |u|^p_{1,p,\Omega}\right)^{\frac{1}{p}} \simeq \|u\|_{1,p,\Omega}$ in $W_p^1(\Omega)$
  mit $f_1(u) := \left(\int\limits_{\Gamma_1} |u|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}}$. Tatsächlich, $f_1(u)$ erfüllt die Voraussetzungen des Normierungssatzes:

  - $f_1(\cdot) : W_p^1(\Omega) \mapsto [0,1)$ Halbnorm (mms)

- $$\begin{aligned} 0 \le f_1(u) &= \Big(\int_{\Gamma_1} |u|^p \, ds\Big)^{\frac{1}{p}} &\le& \Big(\int_{\Gamma} |u|^p \, ds\Big)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|u\|_{L_p(\Gamma)} &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(siehe Pkt. 3.2)}}}{\le}& c\|u\|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in W_p^1(\Omega) \end{aligned}$$
- $v \in P_0$, d.h. $v \equiv c \equiv$ const.: $0 = f_1(v) = \Big(\int_{\Gamma_1} |v|^p \, ds\Big)^{\frac{1}{p}} = |c| \; (\text{meas}_{I\!R^{n-1}}(\Gamma_1))^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow$ $c = v = 0$,

d.h. die Vor. des Satzes 3.1 sind erfüllt. Folglich $\exists\, \underline{c}, \bar{c} =$ const. > 0:

(2) $$\underline{c}\, \|u\|^*_{1,p} \le \|u\|_{1,p} \le \bar{c}\, \|u\|^*_{1,p} \quad \forall u \in W_p^1(\Omega).$$

Insbesondere gilt also:

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \le \bar{c}^p \left(\int_{\Gamma_1} |u|^p \, ds + \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right) \quad \forall u \in W_p^1(\Omega).$$

Für Fkt. $u \in V_0 \subset W_p^1(\Omega)$ erhalten wir hieraus sofort

(2)′ $$\int_\Omega |u|^p \, dx \le \bar{c}^p \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \quad \forall u \in V_0.$$

q.e.d.

■ **<u>Korollar 3.1:</u>**
Auf V_0 wird $|\cdot|_{1,p,\Omega}$ eine zu $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ äquivalente Norm:

(2)″ $$\underline{c}\, |u|_{1,p,\Omega} \le \|u\|_{1,p,\Omega} \le \bar{c}\, |u|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in V_0.$$

■ <u>Bemerkung:</u> (siehe Ü VII, Aufgabe $\boxed{28}$)
Die <u>klassische Friedrichs-Ungleichung</u> $(\Gamma_1 = \Gamma, p = 2)$

$$\int_\Omega u^2 \, dx \le \bar{c}^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \quad \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$$

läßt sich <u>konstruktiv</u> beweisen:

$$\bar{c} = c_F \le \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{i=1,\ldots,n} (b_i - a_i),$$

wobei $\Omega \subset \sqcap = \Big\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n : a_i < x_i < b_i \,;\ i = \overline{1, n} \Big\}$.

3.4.2 Ungleichungen vom Poincaré-Typ

■ **Lemma 3.3:**

Vor.: $1 \leq p < \infty$,
$\omega \subset \Omega$: meas $\omega = \int\limits_{\omega} dx > 0$.

Bh.: Dann gilt für alle $u \in W_p^1(\Omega)$ die Ungleichung

(3) $$\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx \leq \bar{c}^p \left\{ |\int\limits_{\omega} u \, dx|^p + \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right\}.$$

Für $\omega = \Omega$ nennt man (3) Poincaré-Ungleichung, manchmal auch Unglei–chung von Poincaré-Friedrichs mit $\bar{c} = c_P$.

Beweis:
Wir zeigen mit Hilfe des Normierungssatzes 3.1:

$$\|u\|^*_{1,p,\Omega} := (\underbrace{|\int_w u \, dx|^p}_{=: f_1(u)} + |u|^p_{1,p,\Omega})^{\frac{1}{p}} \simeq \|u\|_{1,p,\Omega} \text{ in } W_p^1(\Omega).$$

Tatsächlich, $f_1(u) := |\int\limits_{w} u \, dx|$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 3.1:

- $f_1(\cdot) : W_p^1(\Omega) \mapsto [0, \infty)$ Halbnorm (mms),
- $0 \leq f_1(u) = |\int\limits_{\omega} 1 \cdot u \, dx| \overset{\text{Hölder}}{\leq} (\text{meas } \omega)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$
  $\leq (\text{meas } \omega)^{\frac{1}{q}} \|u\|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in W_p^1(\Omega)$,
- Sei $v \in P_0$, d.h. $v = c = \text{const.}$ und $f_1(v) = 0$,
  $\Rightarrow 0 = f_1(v) = |c \int\limits_{\omega} dx| = |c| \cdot$ meas $\omega \Leftrightarrow c = v = 0$.

q.e.d.

3.5 Die Formel der partiellen Integration

■ Für auf $\bar{\Omega}$ stetig differenzierbaren Fkt. $w \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt offenbar die Beziehung

(1) $$\int\limits_{\Omega} \partial_i w \, dx = \int\limits_{\Gamma} w \cdot n_i \, ds \quad \forall w \in C^1(\bar{\Omega}),$$

wobei $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_n)^T$ – Außennormale: $|\vec{n}| = 1$,
$n_i = \cos \sphericalangle (\vec{n}, x_i) = \cos \sphericalangle (\vec{n}(x), x_i)$.

Aus (1) folgt mit $w = u \cdot v$, $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ die klasssische Formel der partiellen Integration

$$(2) \qquad \int\limits_\Omega \partial_i u \cdot v \, dx = -\int\limits_\Omega u \partial_i v \, dx + \int\limits_\Gamma uv \cos \sphericalangle (\vec{n}, x_i) \, ds \quad \forall u, v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

■ **<u>Lemma 3.4:</u>**

<u>Vor.:</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2, ^*$ und $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Formal kann auch der Fall $n = 1$ eingeschlossen werden.

<u>Bh.:</u> Dann gilt die „Bilanzidentität“:

$$(1) \qquad \boxed{\int\limits_\Omega \partial_i w \, dx = \int\limits_\Gamma w \cdot n_i \, ds \quad \forall w \in W_1^1(\Omega).}$$

<u>Beweis:</u> Abschließungsprinzip !!
Da $C^1(\bar{\Omega})$ dicht ist in $W_1^1(\Omega)$, kann jede Fkt. $w \in W_1^1(\Omega)$ durch glatte Fkt. $w_m \in C^1(\bar{\Omega})$ approximiert werden:

$$\begin{array}{l} C^1(\bar{\Omega}) \ni w_m \xrightarrow[m \to \infty]{W_1^1(\Omega)} w \in W_1^1(\Omega) \\ \|\underset{\gamma w}{\underset{\|}{w}} - \underset{\gamma w_m}{\underset{\|}{w_m}}\|_{L_1(\Gamma)} \leq c \|w - w_m\|_{W_1^1(\Gamma)} \qquad \text{(siehe Pkt. 3.2.)} \end{array}$$

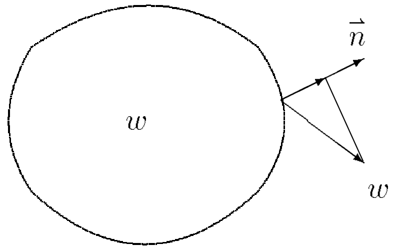
Im klassischen Sinne gilt (1):

$$\begin{array}{ccccc} \int\limits_\Omega \partial_i w_m \, dx & = & \int\limits_\Gamma w_m \cdot n_i \, ds & & \\ \downarrow & & \downarrow & & m \to \infty \\ \int\limits_\Omega \partial_i w \, dx & = & \int\limits_\Gamma w \cdot n_i \, ds. & & \end{array}$$

q.e.d.

- <u>Bemerkung zum Begriff „Bilanzidentität":</u>

  Sei
  $$w = (w_1, \ldots, w_n)^T \text{ – Vektorfeld: } w_i \in W_1^1(\Omega) \quad \forall i = \overline{1,n}.$$
  Aus (1) folgt sofort:
  $$\int\limits_\Omega \operatorname{div} w\, dx \equiv \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \partial_i w_i\, dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_\Gamma w_i n_i\, ds = \int\limits_\Gamma w^T \cdot \vec{n}\, ds,$$
  d.h.



- <u>Folgerungen aus (1):</u>

  1) Die Formel der partiellen Integration:

  $$(2) \qquad \int\limits_\Omega \partial_i u \cdot v\, dx = -\int\limits_\Omega u \cdot \partial_i v\, dx + \int\limits_\Gamma uv \cdot n_i\, ds$$

  $\forall u \in W_p^1(\Omega), \quad \forall v \in W_q^1(\Omega),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 < p < \infty,$

  <u>Beweis:</u> Setzen in (1) $w = u \cdot v \in W_1^1(\Omega)$.

  2) Die 1. Greensche Formel für $(-\Delta)$:

  $$\int\limits_\Omega \nabla^T u \nabla v\, dx = -\int\limits_\Omega \Delta u \cdot v\, dx + \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot v\, ds$$

  $\forall u \in W_2^2(\Omega), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega).$
  <u>Beweis:</u> Setzen in (1) $w = \partial_i u \cdot v \in W_1^1(\Omega)$ und $\sum\limits_{i=1}^n$. #

  3) Die 2. Greensche Formel für $(-\Delta)$:

  $$\int\limits_\Omega (\Delta u \cdot v - u \Delta v)\, dx = \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v\, ds - \int\limits_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds \quad \forall u, v \in W_2^2(\Omega).$$

  <u>Beweis:</u> folgt unmittelbar aus der 1. Greenschen Formel. #

  4) Die 1. Greensche Formel für Δ^2:

  $$\int\limits_\Omega \Delta u \Delta v\, dx = \int\limits_\Omega \Delta^2 u \cdot v\, dx - \int\limits_\Gamma \partial_n \Delta u \cdot v\, ds + \int\limits_\Gamma \Delta u \cdot \partial_n v\, ds$$

$\forall u \in W_2^4(\Omega), \quad \forall v \in W_2^2(\Omega), \partial_n = \partial / \partial \vec{n}$.

Beweis: $\int\limits_\Omega \partial_i^2 u \partial_i^2 v \, dx \quad 2\times$ partiell integrieren. #

3.6 Die Ungleichung von Poincaré und das Bramble-Hilbert-Lemma

■ **Lemma 3.5.:** (Lemma von Bramble/Hilbert, 1971)

Vor.: $\Delta \subset \mathbb{R}^n - \dagger$ Gebiet: $\partial\Delta \in C^{0,1}$,
$1 \leq p < \infty$ und $k \in \{0, 1, \ldots\}$ fixiert,
$l(\cdot) \in [W_p^{k+1}(\Delta)]^* : l(q) = 0 \quad \forall q \in P_k := \{ \sum\limits_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \kappa^\alpha \}$.

Bh.: Dann existiert eine Konstante $c = \text{const.} > 0$:

(1) $\qquad |l(u)| \leq c |u|_{k+1,p,\Delta} \quad \forall u \in W_p^{k+1}(\Delta)$,

wobei $c = c(\Delta) \|l\|_*$ mit

$$\|l\|_* \overset{(\geq)}{=} \sup_{\substack{v \in W_p^{k+1}(\Omega) \\ v \not\equiv 0}} \frac{|l(v)|}{\|v\|_{k+1,p,\Delta}} =: \|l\|_{[W_p^{k+1}(\Delta)]^*},$$

$c(\Delta) = \text{const.}\ (\Delta, p, k) > 0$.

Beweis:

- $l(u) = l(u) + l(q) = l(u+q) \quad \forall q \in P_k \quad \forall u \in W_p^{k+1}$, da $l(q) = 0$.
- $|l(u)| = |l(u+q)| \leq \|l\|_* \|u+q\|_{k+1,p,\Delta} \quad \forall q \in P_k \quad \forall u \in W_p^{k+1}(\Delta)$;
  $\Rightarrow |l(u)| \leq \|l\|_* \underbrace{\inf_{q \in P_k} \|u+q\|_{k+1,p,\Delta}}_{=: \|\hat{u}\|_{W_p^{k+1}(\Delta)|P_k}} \quad \forall u \in W_p^{k+1}(\Delta)$.
- Zeigen: $\inf\limits_{q \in P_k} \|u+q\|_{k+1,p,\Delta} \leq c(\Delta) |u|_{k+1,p,\Delta} \quad \forall u \in W_p^{k+1}(\Delta)$
  für $p = 2$ (Hilbert-Räume) und $k = 1$, aber Beweistechnik kann sofort auf die anderen Fälle übertragen werden !!
- Verwenden dazu die Poincaré-Ungleichung (vgl. Pkt. 3.4.1 und Ü VII):

(2) $$\int\limits_\Delta |u|^p \, dx \leq \bar{c}_P \left\{ |\int\limits_\Delta u \, dx|^p + \int\limits_\Delta |\nabla u|^p \, dx \right\} \quad \forall u \in W_p^1(\Delta)$$

mit $\bar{c}_P = c_P^p$ für $p = 2$.

- $\|u+q\|_2^2 = \|u+q\|_1^2 + |u|_2^2 \quad \forall u \in W_2^2(\Delta) \quad \forall q \in P_1$;

$$(3) \qquad \|u+q\|_1^2 = \|u+q\|_0^2 + \sum_{i=1}^n \|\partial_i(u+q)\|_0^2$$

$$\overset{(2)}{\leq} \bar{c}_P \left\{ \left(\int_\Delta (u+q)\,dx \right)^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Delta (\partial_i(u+q))^2\,dx \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \|\partial_i(u+q)\|_0^2 =$$

$$= \bar{c}_P \left(\int_\Delta (u+q)\,dx \right)^2 + (\bar{c}_P+1) \sum_{i=1}^n \|\partial_i(u+q)\|_0^2 \leq$$

$$\overset{(2)}{\leq} \bar{c}_P \left(\int_\Delta (u+q)\,dx \right)^2 + (\bar{c}_P+1)\bar{c}_P \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\int_\Delta \partial_i(u+q)\,dx \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \int_\Delta \left(\underbrace{\partial_j(\partial_i(u+q))}_{=\partial_{ji}u} \right)^2 dx \right\} =$$

$$= \bar{c}_P \left(\int_\Delta (u+q)\,dx \right)^2 + (\bar{c}_P+1)\bar{c}_P \sum_{i=1}^n \left(\int_\Delta \partial_i(u+q)\,dx \right)^2 +$$

$$+ (\bar{c}_P+1)\bar{c}_P |u|_2^2 \quad \forall u \in W_2^2(\Omega) \quad \forall q \in P_1.$$

- Zu jedem fixierten $u \in W_2^2(\Delta)$ $\exists!$ $q(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \in P_1$:

$$(4) \qquad \boxed{\begin{array}{lcl} \int_\Delta q(x)\,dx & = & -\int_\Delta u(x)\,dx \\ \int_\Delta \partial_i q(x)\,dx & = & -\int_\Delta \partial_i u(x)\,dx,\ i = 1,2,\ldots,n. \end{array}}$$

Tatsächlich, (4) ist ein GS zur Bestimmung der Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ bei geg. $u \in W_2^2(\Delta)$:

$$(4) \qquad \boxed{\begin{array}{lcl} a_0|\Delta| + \sum_{i=1}^n a_i \int_\Delta x_i\,dx & = & -\int_\Delta u(x)\,dx \\ a_i|\Delta| & = & -\int_\Delta \partial_i u(x)\,dx, i = \overline{1,n} \end{array}}$$

Offenbar ist (4) eindeutig lösbar.

Folglich, $\forall$ (fix) $u \in W_2^2(\Delta)$ $\exists!$ $q \in P_1$:

$$\|u+q\|_1^2 \leq (\bar{c}_P+1)\bar{c}_P|u|_2^2$$

Also gilt:

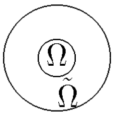
$$\inf_{q \in P_1} \|u+q\|_2^2 \leq ((\bar{c}_P+1)\bar{c}_P + 1)\,|u|_2^2,$$

d.h. $c(\Delta) = \sqrt{(\bar{c}_P+1)\bar{c}_P + 1}$. **q.e.d.**

3.7 Fortsetzungsproblematik

- Fragestellung: $B = B(\Omega)$ – Banach-Raum von Fkt. über Ω,
  $\tilde{B} = B(\tilde{\Omega})$ – Banach-Raum von Fkt. über $\tilde{\Omega}$.

  $\Omega \subset \tilde{\Omega}(\dagger)$ Ges. ist Vorschrift, die jeder Fkt. $u \in B(\Omega)$ eine Fkt. $\tilde{u} \in B(\tilde{\Omega})$ zuordnet:

  1) $u(x) = \tilde{u}(x),\ x \in \Omega$ (f.ü.),
     d.h. $u = \tilde{u}|_\Omega$

  2) $\|\tilde{u}\|_{B(\tilde{\Omega})} \leq c\|u\|_{B(\Omega)} \quad \forall u \in B(\Omega), u \to \tilde{u} = \Pi u.$

  $\tilde{u}$ nennt man Fortsetzung von u unter Beibehaltung der Klasse B.

- Historie:

[1934]	H. Whitney:	$B = C^k$
[1941]	R. M. Hestenes:	$B = C^k$
[1953]	V.M. Babič:	Übertragung der Hestenes-Fortsetzung auf $B = W_p^k$
[1961]	A. P. Calderon:	$B = W_p^k$: Mittels Integraldarstellung
	⋮	
[1981]	S. G. Michlin:	$B = W_p^k$: Fortsetzung mit kleinster Fortsetzungskonstante [13]
	⋮	

- Lit.: S. G. Michlin: Konstanten in einigen Ungleichungen der Analysis. Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig 1981, [13].

- Es gilt folgender Satz über die Fortsetzung von Fkt. der Klasse $W_p^k(\Omega)$ unter Beibehaltung der Klasse:

  Satz 3.2: (Fortsetzungssatz)

  Vor.: $\Omega \subset I\!\!R^n : \dagger;\ \Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}$,
  $\tilde{\Omega} \subset I\!\!R^n : \dagger,\ \bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$,
  $1 \leq p \leq \infty,\ k = 0, 1, \ldots.$

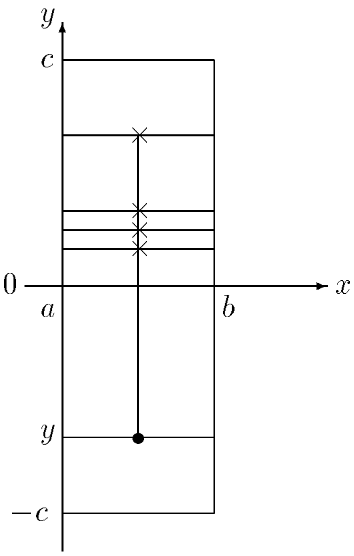
Bh.: Dann existiert (nicht eindeutig !) ein linearer, beschränkter Fortsetzungsoperator

$$\Pi \in L\left(W_p^k(\Omega), \overset{\circ}{W}{}_p^k(\tilde{\Omega})\right),$$

d.h. $v = \pi u$: 1. $v|_\Omega = u$
2. $\|v\|_{k,p,\tilde{\Omega}} \leq c\|u\|_{k,p;\Omega} \quad \forall u \in W_p^k(\Omega)$

Beweis: siehe Lit., z:B. [13]. ($\downarrow$ Ü 3.4 + Bem.).

■ $\boxed{\textbf{Ü 3.4}}$



$k = 3$

Sei
$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y) \in I\!R^2 : a < x < b,\ 0 < y < c\}, \\ \Omega_1 &= \{(x,y) \in I\!R^2 : a < x < b,\ -c < y < 0\}, \\ \bar{\tilde{\Omega}} &= \bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_1,\ \Omega \subset \tilde{\Omega}. \end{aligned}$$

$\exists!$ (mms) $(k+1)$ reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$:

$$\boxed{(-1)^l\lambda_1 + (-\tfrac{1}{2})^l\lambda_2 + \ldots + \left(-\tfrac{1}{k+1}\right)^l \lambda_{k+1} = 1,\ l = \overline{0,k}}$$

Man zeige, daß die (Hestenes-)Fortsetzung

$$\tilde{u}(x,y) := \begin{cases} u(x,y) & 0 \leq y \leq c \\ \lambda_1 u(x,-y) + \ldots + \lambda_{k+1} u\left(x, \frac{y}{k+1}\right), & -c \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$a \leq x \leq b$, eine Fortsetzung von u unter Beibehaltung der Klassen $B = C^k, W_2^k, W_2^l \quad (\forall l = 0, 1, \ldots, k)$ ist !

3.8 Einbettungssätze

■ **Lemma 3.6:**

Vor.: $\Omega \subset I\!R^n$ †, $n \overset{(1)}{\geq} 2$ (Bew. $n = 1$: mms)

Bh.: Dann gilt für alle $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ die Integraldarstellung

(1) $$u(x) = \sum_{i=1}^{n} (K_i \partial_i u)(x) \quad \forall \text{ f.ü. } x \in \Omega \text{ (in } L_p)$$

mit $\partial_i u = \partial u / \partial x_i$ und den schwach singulären Integraloperatoren

$$(K_i v)(x) := \int_\Omega k_i(x,y) v(y)\, dy;\ k_i(x,y) = \frac{B_i(x,y)}{|x-y|^{n-1}},\ B_i(x,y) = \frac{1}{|s_1|} \frac{x_i - y_i}{|x-y|}.$$

Beweis:

- Sei $u \in \overset{\bullet}{C}^\infty(\Omega)$. Dann gilt nach der 2. Greenschen Formel

$$
\begin{aligned}
(2)\quad u(x) &= -\int_\Omega E(x-y)\Delta u(y)\,dy + \int_\Gamma E(x-y)\underbrace{\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}}_{=0}\,ds_y - \int_\Gamma \underbrace{u(y)}_{=0}\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y}\,ds_y \\
&= -\int_\Omega E(x-y)\Delta u(y)\,dy, \quad \forall x \in \bar{\Omega}
\end{aligned}
$$

mit der Fundamentallösung des Laplace-Operators

$$
E(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{|s_1|}\ln|x-y|, & \text{für } n=2 \\ \frac{1}{(n-2)|s_1|}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}, & \text{für } n>2 \\ \text{mms}, & \text{für } n=1 \end{cases}
$$

Bew. von (2) siehe [7] [Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1986, S. 35] sowie [8].

■ Für $n > 2$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
(2)' \quad u(x) &= -\frac{1}{(n-2)|s_1|}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}|x-y|^{2-n}\,dy = \\
&= \frac{1}{(n-2)|s_1|}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial|x-y|^{2-n}}{\partial y_i}\,dy + 0 = \\
&\quad \underline{\text{NR:}}\ \frac{\partial}{\partial y_i}|x-y|^{2-n} = (2-n)|x-y|^{2-n-1}\frac{1}{2}\frac{2(x_i-y_i)}{|x-y|}(-1) \\
&= \frac{1}{|s_1|}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\frac{x_i-y_i}{|x-y|}\,dy \\
&= \sum_{i=1}^{n}(K_i\partial_i u)(x),
\end{aligned}
$$

mit dem schwach singulären (vgl. Def. 2.8) Integraloperator

$$(K_i v)(x) := \int_\Omega k_i(x,y)v(y)\,dy,$$

wobei

$$
\begin{aligned}
k_i(x,y) &:= \frac{B_i(x,y)}{|x-y|^{n-1}} = \frac{B_i(x,y)}{r^{n-1}},\ r = |x-y|, \\
B_i(x,y) &= \frac{1}{|s_1|}\frac{x_i-y_i}{|x-y|} \in L_\infty(\Omega\times\Omega), \text{ stetig für } x \neq y.
\end{aligned}
$$

- Für $n = 2$ gilt: Analog

$$(2)' \quad u(x) = \frac{1}{|s_1|}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}\ln|x-y|\,dy$$
$$= -\frac{1}{|s_1|}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}\ln|x-y|\,dy$$

NR: $\frac{\partial}{\partial y_i}\ln|x-y| = \frac{1}{|x-y|}\frac{1}{2}\frac{2(x_i-y_i)}{|x-y|}(-1)$

$$= \frac{1}{|s_1|}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{1}{|x-y|}\frac{x_i-y_i}{|x-y|}\,dy$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(K_i\partial_i u)(x),$$

mit dem schwach singulären (vgl. Def. 2.8) Integraloperator

$$(K_i v)(x) := \int_\Omega k_i(x,y)v(y)\,dy$$

wobei

$$k_i(x,y) := \frac{B_i(x,y)}{|x-y|}$$
$$B_i(x,y) = \frac{1}{|s_1|}\frac{x_i-y_i}{|x-y|} \in L_\infty(\Omega\times\Omega), \text{ stetig für } x \neq y.$$

- Abschließungsprinzip: $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \ni u \xleftarrow[m\to\infty]{\|\cdot\|_{1,p,\Omega}} u_m \in \overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$,

d.h. $u_m \to u$ in $L_p(\Omega)$, $\partial_i u_m \to \partial_i u$ in $L_p(\Omega)$ für $m \to \infty$

$i = 1, 2, \dots, n$

$\downarrow$

$$u \xleftarrow{L_p(\Omega)} u_m = \sum_{i=1}^{n} K_i\partial_i u_m \xrightarrow{L_p(\Omega)} \sum_{i=1}^{n} K_i\partial_i u,$$
$$m \to \infty$$

da $\partial_i u_m \xrightarrow{L_p(\Omega)} \partial u$ und $K_i \in L(L_p(\Omega), L_p(\Omega))$
(mms bzw. siehe Bem. zu Satz 2.13: $\alpha = n-1 < n$).

d.h. $\boxed{u = \sum_{i=1}^{n} K_i\partial_i u \ \text{ in } L_p(\Omega)}$ (1) **q.e.d.**

- **Def. 3.8.:** (Einbettung, Einbettungsoperator)
X, Y – B-Räume: $X \subset Y$ **(mengenmäßig nach evtl. „Identifizierung“)**. Der Einbettungsoperator $E : X \to Y$ ordnet jedem $u \in X$ das „gleiche“ Element $u \in Y$ zu. Die Einbettung heißt stetig (bzw. kompakt), gdw. E stetig (bzw. kompakt = vollstetig) ist.

i.Z. $X \subset Y$ – stetige Einbettung,
$X \hookrightarrow Y$ – kompakte Einbettung.

■ **Satz 3.3.:** (Einbettung für $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$)

Vor.: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ † (keine Vor. an $\partial\Omega$!), $1 \overset{(=)}{<} p,\ q \overset{(=)}{<} \infty$

Bh.: 1. $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, falls $p > n$, d.h. zu jeder Fkt. (Äquivalenzklasse) $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ existiert eine äquivalente Fkt. $u \in C(\bar{\Omega})$ und der Einbettungsoperator $E \in L(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega), C(\bar{\Omega}))$ – kompakt.

$m = n$
$\mathcal{H}_m = \mathbb{R}^n$

2. Sei nun $p \leq n$. Dann gilt:
   a) $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ stetig für $q \leq q_* := \frac{pn}{n-p}$ und $q < \infty$.
   b) $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ kompakt für $q < q_*$.

3. Sei $p \leq n$ und $\Omega_m = \Omega \cap \mathcal{H}_m$: $\text{meas}_{\mathbb{R}^m}(\Omega_m) > 0$, wobei $\mathcal{H}_m$ – m-dimensionale Hyperebene (↷ „glatte“ Mannigfaltigkeit) mit $n-p \leq m \leq n$, $m \geq 1$. Dann gilt:
   a) $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega_m)$ stetig für $q \leq q_*(m) := \frac{pm}{n-p}$ und $q < \infty$.
   b) $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega_m)$ kompakt für $q < q_*(m)$.

Beweis:

- Ausgangspkt.:
  * Lemma 3.6.: $u(x) = Ku(x) := \sum_{i=1}^{n} (K_i \partial_i u)(x)$ mit

$$(K_i v)(x) := \int_\Omega \underbrace{\frac{B_i(x,y)}{|x-y|^{n-1}}}_{=:k_i(x,y)} v(y)\, dy,\ \alpha = n-1,$$

$$B_i(x,y) := \frac{1}{|s_1|} \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \in L_\infty(\Omega \times \Omega) \text{ und stetig für } x \neq y.$$

  * Sätze 2.12, 2.13 & Bem.: Abbildungseigenschaften schwach singulärer Integraloperatoren.

- zu 1.: $\alpha = n - 1 < \frac{n}{p'} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, gdw. $\frac{n}{p} < 1$, gdw. $n < p$
  S. 2.12→ $\Downarrow$
  $K_i \in L(L_p(\Omega), C(\bar{\Omega}))$ und kompakt.

$\Rightarrow$ a) $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} (K_i \underbrace{\partial_i u}_{\in L_p(\Omega)})(x) \in C(\bar{\Omega}) \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$

b) $M \subset \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ $\dagger$, d.h. $\|u\|_{1,p,\Omega} \le c = \text{const.} \quad \forall u \in M$

$\Rightarrow \|\partial_i u\|_{0,p,\Omega} \le c \quad \forall u \in M$, d.h. $\partial_i M \subset L_p(\Omega)$ $\dagger$

$\Rightarrow KM := \{\underset{\substack{\| \\ u}}{Ku} : u \in M\} = M \subset C(\bar{\Omega})$ rel. kompakt,

da $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i \partial_i M \subset C(\bar{\Omega})$ relativ kompakt.

#

- <u>zu 3.:</u> ($\Rightarrow$ 2. $\quad \Omega = \Omega_m, \mathcal{H}_m = I\!R^n$)

  $\alpha = n - 1 \ge \frac{n}{p'} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, gdw. $p \le n$

  S. 2.13 $\quad \Downarrow$

  Bem.

  $$K_i \in L(L_p(\Omega), L_q(\Omega_m)) \begin{cases} \text{stetig, falls } \alpha = n-1 \le \frac{n}{p'} + \frac{m}{q} \\ \text{kompakt, falls } \alpha = n-1 < \frac{n}{p'} + \frac{m}{q} \end{cases}$$

  $$\alpha = n - 1 \overset{(<)}{\le} \frac{n}{p'} + \frac{m}{q}, \text{ gdw. } \begin{aligned} n-1 &\overset{(<)}{\le} n\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{m}{q} \\ \frac{n}{p} - 1 &\overset{(<)}{\le} \frac{m}{q} \\ \frac{n-p}{p} &\overset{(<)}{\le} \frac{m}{q} \\ q &\overset{(<)}{\le} \frac{pm}{n-p} = q_*(m) \\ &\ \ \& \ q < \infty \end{aligned}$$

  $\Downarrow$

  $$u(x) = \sum_{i=1}^{n} (K_i \underbrace{\partial_i u}_{\in L_p(\Omega)})(x) \in L_q(\Omega_m) \qquad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$$

  a) stetig, falls $\quad q \le q_*(m)$
  $\qquad\qquad\qquad\quad q < \infty$

  b) kompakt, falls $q < q_*(m)$.

q.e.d.

■ **<u>Satz 3.4.:</u>** (Einbettung für $W_p^1(\Omega)$)

<u>Vor.:</u> $\Omega \subset I\!R^n$ $\dagger$: $\Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}$; $1 \overset{(=)}{<} p, \ q \overset{(=)}{<} \infty$.

<u>Bh.:</u> Bh. 1.-3. des Satzes 3.3. bleiben richtig, wenn man $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ durch $W_p^1(\Omega)$ ersetzt.

<u>Beweis:</u>

- Wählen $\tilde{\Omega} \subset I\!R^n$ beschränkt: $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$.
  Nach <u>Satz 3.2</u> können wir alle Fkt. $u \in W_p^1(\Omega)$ auf $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\tilde{\Omega})$ so fortsetzen, daß der Fortsetzungsoperator $\sqcap \in L(W_p^1(\Omega), \ \overset{\circ}{W}{}_p^1(\tilde{\Omega}))$ ist, d.h.:
  - $\tilde{u} = \sqcap u|_{\Omega} = u$;

- Fortsetzungsvorschrift $\sqcap$ ist linear;
- $\sqcap$ ist stetig, d.h. $\|\tilde{u}\|_{1,p,\tilde{\Omega}} \leq c\|u\|_{1,p,\Omega}$.

- Wenden <u>Satz 3.3</u> auf $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\tilde{\Omega})$ an:
  $E_{\tilde{\Omega}} \quad : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\tilde{\Omega}) \mapsto X(\tilde{\Omega}) = C(\bar{\tilde{\Omega}}), L_q(\tilde{\Omega}), L_q(\tilde{\Omega}_m)$: stetig (kompakt).
- Dann gilt mit $I_\Omega \tilde{u} = \tilde{u}|_\Omega = u$
  $E_\Omega = I_\Omega E_{\tilde{\Omega}} \sqcap : W^1_p(\Omega) \mapsto X(\Omega) = C(\bar{\Omega}), L_q(\Omega), L_q(\Omega_m)$: stetig (kompakt).

  stetig | stetig

  stetig
  kompakt

- <u>z.B.:</u> zu 1.: $W^1_p(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, falls $p > n$.
  (i) $\tilde{u} = \sqcap u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\tilde{\Omega}); \sqcap \in L(W^1_p(\Omega), \overset{\circ}{W}{}^1_p(\tilde{\Omega}))$,
  (ii) $\tilde{u} = E_{\tilde{\Omega}}\tilde{u} \in C(\bar{\tilde{\Omega}}) : E_{\tilde{\Omega}} \in L(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\tilde{\Omega}), C(\bar{\tilde{\Omega}}))$ und kompakt,
  (iii) $u = I_\Omega \tilde{u} \in C(\bar{\Omega}) : I_\Omega \in L(C(\bar{\tilde{\Omega}}), C(\bar{\Omega}))$,
  und es gilt:
  - $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|\tilde{u}\|_{C(\bar{\tilde{\Omega}})} \leq c_E\|\tilde{u}\|_{1,p,\tilde{\Omega}} \leq c_E c_\pi \|u\|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in W^1_p(\Omega)$
  - $E_\Omega = I_\Omega E_{\tilde{\Omega}} \sqcap \in L(W^1_p(\Omega), C(\bar{\Omega}))$ und kompakt.

q.e.d.

■ **<u>Satz 3.5.:</u>** (Einbettung für $W^k_p(\Omega)$)

<u>Vor.:</u> $\Omega \subset I\!R^n \ddagger$: $\Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}$ (stückweise glatt)
$1 \leq p,\ q < \infty,\ 0 \leq j < k$ ganzzahlig, $k = 1, 2, \ldots$

<u>Bh.:</u> 1) $W^k_p(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega})$ kompakt, falls $(k-j)p > n$.

2) Sei nun $(k-j)p \leq n$. Dann sind die Einbettungen $W^k_p(\Omega) \subset W^j_q(\Omega)$ bzw. $\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^j_q(\Omega)$

- stetig, falls $q \leq q_* := \frac{pn}{n-p(k-j)}$ und $q < \infty$;
- kompakt, falls $q < q_*$.

Die Aussagen über die Einbettungen $\overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^j_q(\Omega)$ benötigen keine Voraussetzungen über $\Gamma = \partial\Omega$.

Beweis: folgt aus rekursiver Anwendung der Sätze 3.3. und 3.4.

zu 1.

- $j = k-1$: $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1}(\bar{\Omega})$, falls $p > n$.
  Tatsächlich,
  $u \in W_p^k(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha u \in W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \quad \#$
  $\forall |\alpha| \leq k-1$
- $j = k-2$: $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow C^{k-2}(\bar{\Omega})$, falls $2p > n$.
  Tatsächlich,
  $W_p^k(\Omega) \underset{\text{stetig}}{\subset} W_q^{k-1}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-2}(\bar{\Omega})$, falls $q > n$,
  $q = \frac{pn}{n-p}$
  d.h. $\frac{pn}{n-p} > n$, gdw. $2p > n \quad \#$ usw.

zu 2.: analoges Vorgehen (mms). **q.e.d.**

■ $\boxed{\textbf{Ü 3.5}}$ Man verallgemeinere die Bh. 3. der Sätze 3.3. und 3.4. analog auf die Räume $W_p^k(\Omega)$, d.h.

$$W_p^k(\Omega) \subset W_q^j(\Omega_m), \text{ falls ?}$$

$$W_p^k(\Omega) \hookrightarrow W_q^j(\Omega_m), \text{ falls ?}$$

wobei $\Omega_m = \bar{\Omega} \cap \mathcal{H}_m$ (siehe Satz 3.3) !

Bemerkungen:

1) Die angeführten Aussagen sind scharf !!
   (vgl. auch Ü VII: z.B. $n = 2 : H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, aber $H^1(\Omega) \not\subset C(\bar{\Omega})$!)
2) $\bar{\Omega}_m = \bar{\Omega} \cap \mathcal{H}_m$
   $\mathcal{H}_m \mapsto m$-dim. Hyperebene $\mapsto m$-dim. stückweise glatten Mannigfaltigkeit
   Insbesondere: $m = n-1$ ↷ $\bar{\Omega}_{n-1} = \bar{\Omega} \cap \mathcal{H}_{n-1} \subset \Gamma$ bzw. $= \Gamma$.
   $\Rightarrow$ Aussagen über Spuren von Fkt. $u \in W_p^k(\Omega)$ auf Γ oder Teilen von Γ.

4 Projektionsverfahren für lineare Operatorglei– chungen

- Btr. lineare Operatorgleichung (vgl. Pkt. 2.3: (5))

(1) $\boxed{\text{Ges. } u \in V_0 : Au = F \text{ in } V_0^*,}$

wobei $V_0 \subset V$ – abgeschlossener Teilraum des reellen H-Raums $V, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot)$;
V_0^* – dualer Raum zu V_0;
$A \in L(V_0, V_0^*)$, $F \in V_0^*$ geg.

- Wir setzen voraus (<u>zumindestens</u> im Pkt. 4.2), daß $A \in L(V_0, V_0^*)$

  a) V_0 – elliptisch und
  b) V_0 – beschränkt ist,

d.h. die durch die Beziehung

(2) $$a(u,v) \ := \ < Au, v > \quad \forall u, v \in V_0$$

induzierte Bilinearform $a(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \to I\!R^1$ ist

  a) V_0 – elliptisch: $\exists\, \mu_1 = \text{const.} > 0 : \mu_1 \|v\|^2 \leq a(v,v) \quad \forall v \in V_0$,
  b) V_0 – beschränkt: $\exists\, \mu_2 = \text{const.} > 0 : |a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|\,\|v\| \quad \forall u, v \in V_0$.

- Damit ist (1) äquivalent zum <u>abstrakten Variationsproblem</u>

$(1)_0$ $\boxed{\text{Ges. } u \in V_0 : a(u,v) \ = < F, v > \quad \forall v \in V_0.}$

- Das Problem $(1)_0$ entsteht in der Regel durch Homogenisierung (siehe Pkt. 2.3) des <u>abstrakten Variationsproblems</u>

$(1)_g$ $\boxed{\text{Ges. } u \in V_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0,}$

wobei $V_g = g + V_0 \ = \ \{v \in V : \exists\, w \in V_0,\ v = g + w\}$
$= $ geg. Hyperebene; $g \in V$ geg.

- Ziel: Konstruktion von Näherungslsg. ($\leftrightarrow$ Skelettlsg.) !
In der Regel sind V, V_0 bzw. V_g unendlichdim. Räume bzw. Hyperebene, z.B. (typisch für skal. PDgl. 2. Ordnung, vgl. Pkt. 4.3):

$$\begin{aligned} V &= W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n\ \dagger; \\ V_0 &= \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = 0\},\ \Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega,\ \text{meas}_{n-1}(\Gamma_1) > 0; \\ V_g &= \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = g_1\},\ g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1). \end{aligned}$$

Wir suchen nun Näherungslösungen u_h (bzw. u_n) in endlichdimensionalen Teilhyperebenen V_{gh} (bzw. V_{gn}), von denen man erwartet, daß

$$\|u - u_h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad (\text{bzw. } \|u - u_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0)$$

(vgl. auch Pkt. 1.4: $n \mapsto h$ = Diskretisierungsparameter).

4.1 Prinzipien

4.1.1 Galerkin-Verfahren

- Ausgangspkt.: Variationsformulierung

$(1)_g$ Ges. $u \in V_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0.$

- Idee: Suchen Näherungslsg. $u_h \in V_{gh} = g_h + V_{0h} \subset V_g$ an die exakte Lsg. $u \in V_g$ von $(1)_g$ so, daß für u_h die Variationsgleichung $(1)_g$ $\forall$ Testfkt. $v_h \in V_{0h}$.

- <u>Galerkin-Schema:</u>

$$V_h = \underbrace{\operatorname{span}\{p^{(i)}}_{\substack{\text{Ansatzfkt.}\\ \downarrow \\ \text{linear unabhängig}}} : \underbrace{i \in \overline{\omega}_h}_{\substack{\text{Indexmenge zur}\\ \text{„Durchnumerierung“ der Ansatzfkt.}}}\} = \{v_h = \sum_{i\in\overline{\omega}_h} v^{(i)}p^{(i)}\} \subset V$$

$$\dim V_h = |\overline{\omega}_h| = \overline{N}_h = N_h + \partial N_h < \infty$$

$$V_{gh} = \underbrace{V_h \cap V_g}_{\substack{\neq \emptyset \\ \text{Vor. (!)}}} = g_h + V_{0h} = \left\{ v_h = \underbrace{\left[\sum_{i\in\gamma_h := \bar{\omega}_h\setminus\omega_h} u_*^{(i)}p^{(i)}\right]}_{\substack{=: g_h \in V_g \cap V_h \\ \text{geg. (fix)}}} + \underbrace{\sum_{i\in\omega_h} v^{(i)}p^{(i)}}_{\in V_{0h}\subset V_0} \right\} \subset V_g$$

$$V_{0h} = V_h \cap V_0 = \{v_h = \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)}p^{(i)}\} \subset V_0; \ \dim V_{0h} = N_h.$$

$(1)_{gh}$

Ges. $u_h \in V_{gh} : a(u_h, v_h) \; = \; < F, v_h > \quad \forall v_h \in V_{0h}$

$\uparrow$ Testraum

NL

Wahl der Basis: $\sqcap = \{p^{(i)} : i \in \bar{\omega}_h\}$

$$u_h = \sum_{i\in\omega_h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ges. !}}}{u^{(i)}} p^{(i)} + \sum_{i\in\gamma_h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geg. !}}}{u_*^{(i)}} p^{(i)}$$

Galerkin-Isomorphismus (mms)

$v_h = p^{(k)} \in V_{0h} = \operatorname{span}\{p^{(j)} : j \in \omega_h\}, \quad \forall k \in \omega_h$

$a(\cdot,\cdot)$ – bilinear, $< F, \cdot >$ linear

Ges. $\underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i\in\omega_h}$: $\quad \sum_{i\in\omega_h} u^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)}) \; = \; < F, p^{(k)} > - \sum_{i\in\gamma_h} u_*^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)})$

$\forall k \in \omega_h$

$\underline{(1)}_{gh}$ SL Galerkin-System

Ges. $\underline{u}_h \in I\!R^{N_h}$: $\; K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \quad$ (lineares GS)

mit $\; K_h = [a(p^{(i)}, p^{(k)})]_{k,i\in\omega_h}$ – $(N_h \times N_h)$-Matrix

Steifigkeitsmatrix

$\underline{f}_h = [< F, p^{(k)} > - \sum_{i\in\gamma_h} u_*^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)})]_{k\in\omega_h} \in I\!R^{N_h}$

Lastvektor

■ $\boxed{\textbf{Ü 4.1}}$ Wie transformiert sich das GS $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$, falls zu einer neuen Basis $[\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(N_h)}] = [p^{(1)}, \ldots, p^{(N_h)}]\, B$ übergegangen wird ? Hierbei ist $B = [b_{ki}]_{k,i=1,\ldots,N_h}$ eine reguläre $(N_h \times N_h)$–Matrix und die obige Schreibweise bedeutet

$$\varphi^{(i)} = \sum_{k=1}^{N_h} b_{ki} p^{(k)}.$$

4.1.2 Galerkin-Petrow-Verfahren

- Ausgangspkt.: Variationsproblem $(1)_g$.

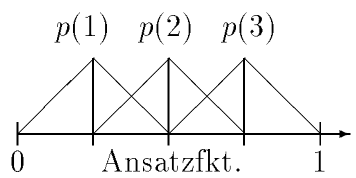
- Ansatzfkt.:
$$\begin{aligned} V_h &= \{v_h = \sum_{i\in\overline{\omega}_h} v^{(i)}p^{(i)}\} \subset V, \\ V_{gh} &= \{v_h = \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)}p^{(i)} + \sum_{i\in\gamma_h} u_*^{(i)}p^{(i)}\} \subset V_g, \\ V_{0h} &= \{v_h = \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)}p^{(i)}\} \subset V_0. \end{aligned}$$

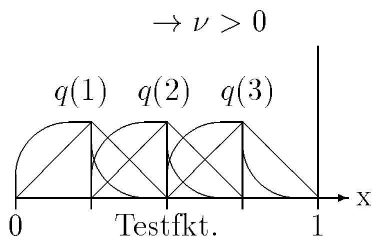
- Testfkt.: $U_{0h} = \text{span}\,\{q^{(i)} : i \in \omega_h\} = \{v_h = \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)}q^{(i)}\} \subset V_0,$
  i.a. $U_{0h} \neq V_{0h}$, aber $\dim U_{0h} = \dim V_{0h} = |\omega_h| = N_h$.

- Galerkin-Petrow-Schema:
  Ges. $u_h \in V_{gh}$: $a(u_h, v_h) = < F, v_h > \quad \forall v_h \in U_{0h};$
  $\updownarrow$
  Ges. $\underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i\in\omega_h} \in I\!R^{N_h}$: $\sum_{i\in\omega_h} u^{(i)}a(p^{(i)}, q^{(k)}) = < F, q^{(k)} > - \sum_{i\in\gamma_h} u_*^{(i)}a(p^{(i)}, q^{(k)})$
  $k \in \omega_h$

$$K_h\underline{u}_h = \underline{f}_h$$

- Moderne Anwendung des Galerkin-Petrow-Verfahrens: Upwind-FEM,
  z.B.: Diffusions-Konvektionsprobleme (vgl. Ü VIII - X)
  Ges. $u \in V_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(0,1) : \int_0^1 (u'v' + \nu u'v)\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \quad \forall v \in V_0$





Ziel: Erhalt der M-Matrix-Eigenschaft von K_h !

4.1.3 Das Ritz-Verfahren als Spezialfall des Galerkin-Verfahrens

- Ausgangspkt.: = Minimumproblem (siehe Pkt. 2.3; insb. Satz 2.10):

  $(2)_g$ $\boxed{\text{Ges. } u \in V_g : J(u) = \inf_{v \in V_g} J(v)}$

  mit $V_g = g + V_0 \subset V$ $(\uparrow)$ und dem Ritzschen Energiefunktional

  (3) $J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - \, < F, v >,$

  und unter den Voraussetzungen:

$$
(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1) & F \in V^* \; ! \; \leftarrow \text{(abschwächbar !)} \\ & \\ 2) & a(\cdot,\cdot) : V \times V \mapsto I\!R^1 - \text{stetig und auf } V_0 \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \text{symmetrisch und positiv !} \end{array} \right.
$$

- Bem.: zu Vor. (4) und Satz 2.10 $\to (2)_{g=0}$:
  Homogenisierungsansatz: $v = g + w \in V_g, \;\; w \in V_0$:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \;\; J(u) &= J(g+w) = \tfrac{1}{2}\,(a(g,g) + a(g,w) + a(w,g) + a(w,w)) - \\
&\qquad\qquad - < F, g > - < F, w > \\
&= \tfrac{1}{2}\, a(w,w) - \underbrace{\left[< F, w > - \frac{1}{2}\,(a(g,w) + a(w,g)) \right]}_{=: <\hat{F}, w>} + J(g)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \boxed{\inf_{v \in V_g} J(v) \Leftrightarrow \inf_{w \in V_0} \left[\tfrac{1}{2}\, a(w,w) - < \hat{F}, w > \right]}
$$

- Ansatz: siehe Galerkin-Verfahren Pkt. 4.1.1:
  $\to$ Ansatzfkt. $\{p^{(i)} : i \in \bar{\omega}_h\} \subset V \Rightarrow V_h, V_{0h}, V_{gh}$!

■ Ritz-Idee:

$(2)_{gh}$ NL
Ges. $u_h \in V_{gh} : J(u_h) = \min\limits_{v_h \in V_{gh}} J(v_h) \geq J(u)$

Ritz-Isom. $\quad \frac{\partial J(u_h)}{\partial u^{(k)}} = 0 \quad \forall k \in \omega_h; \quad u_h = \sum\limits_{i \in \omega_h} u^{(i)} p^{(i)} + \sum\limits_{i \in \gamma_h} u_*^{(i)} p^{(i)}$

$(\underline{2})_{gh}$ Ges. $\underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i \in \omega_h}$: $\quad \sum\limits_{i \in \omega_h} u^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)}) = < F, p^{(k)} > - \sum\limits_{i \in \gamma_h} u_*^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)})$
$\forall k \in \omega_h$

SL

Ges. $\underline{u}_h \in I\!R^{N_h}$: $\quad K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$
mit $K_h = [a(p^{(i)}, p^{(k)})]_{k,i \in \omega_h}$!

Ritz'sches GS $\quad \underline{f}_h = [< F, p^{(k)} > - \sum\limits_{i \in \gamma_h} u_*^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)})]_{k \in \omega_h}$

■ Bem.: Unter den Vor. (4) gilt: Ritz-System = Galerkin-System !
$\Rightarrow$ Galerkin-Ritz-System !

■ Übungsaufgaben zum Ritz-Verfahren:

Ü 4.2 Man zeige, daß K_h symmetrisch und positiv definiert ist !

Ü 4.3 Man zeige, daß unter der Vor. $(4)_{2)}$ durch

$$[\cdot, \cdot] := a(\cdot, \cdot)$$

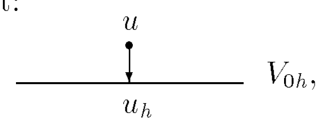
auf V_0 ein Skalarprodukt definiert wird. Dieses Skalarprodukt heißt im Unterschied zum von V in V_0 induzierten Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ energetisches Skalarprodukt und die ihm entsprechende Norm $|\cdot|$,

$$|\cdot|^2 := [\cdot, \cdot] \equiv a(\cdot, \cdot),$$

Energienorm.

Ü 4.4 Man zeige, daß unter den Vor. (4) für $g = 0$ gilt:

$$\min_{v_h \in V_{0h}} J(v_h) \Leftrightarrow \min_{v_h \in V_{0h}} |u - v_h|,$$



wobei $u \in V_0$ die eindeutige Lsg. von $(2)_{g=0}$ ist.

Hinweise:
1. Satz 2.10: $a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0$.
2. $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - < F, v > + \frac{1}{2}a(u,u) - \frac{1}{2}a(u,u) =$
$= \frac{1}{2}\,|u - v|^2 - \frac{1}{2}\,a(u,u)$.

Ü 4.5 Es gelten die Vor. (4) mit $g = 0$, d.h. $V_g = V_0, V_{gh} = V_{0h}$.
Dann wird durch die Beziehung

$$P_R u \in V_{0h} : a(P_R u, v_h) = a(u, v_h) \quad \forall v_h \in V_{0h} \quad \forall u \in V_0$$

eindeutig ein linearer, stetiger Operator $P_R \in L(V_0, V_{0h})$ definiert (vgl. auch Sätze 2.9, 2.10 unter den Standardvor.), der bzgl. des energetischen Skalarproduktes $[\cdot,\cdot]$ ein Orthoprojektor, d.h. $P_R^2 = P_R$ und $[P_R u, v] = [u, P_R v] \quad \forall u, v \in V_0$. Dieser Orthoprojektor heißt Ritz-Projektor. Man zeige weiter, daß dann gilt:

$$|u - P_R u| = \inf_{v_h \in V_{0h}} |u - v_h| \quad \forall \text{ (fix) } u \in V_0.$$

4.1.4 Weitere Prinzipien

- Least-Square-Prinzip: (Methode der kleinsten Quadrate)

Ausgangspkt.: Operatorgleichung
Ges. $u \in X : Au = b$ in Y (5)
mit $A \in L(X,Y)$ und $b \in Y$ geg.;
X – H-Raum, $\|\cdot\|_X, (\cdot,\cdot)_X$, z.B. $X = V_0$;
Y – H-Raum, $\|\cdot\|_Y, (\cdot,\cdot)_Y$, z.B. $Y = V_0^*$.

Least-Square-Idee: $X_h = \text{span}\,\{p^{(i)} : i \in \omega_h\} \subset X$

$(5)_h$ $\quad \boxed{\text{Ges. } u_h \in X_h : \|Au_h - b\|_Y = \inf_{v_h \in X_h} \|Av_h - b\|_Y}$

$\boxed{\textbf{Ü 4.6}}$ Man stelle das zu $(5)_h$ gehörige GS $(\underline{5})_h$ $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ zur Bestimmung des Koeffizientenvektors $\underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i\in\omega_h} \in I\!R^{N_h}$ im Ansatz $u_h = \sum\limits_{i\in\omega_h} u^{(i)} p^{(i)} \in X_h \subset X$ auf.

Interpretieren Sie die Methode der kleinsten Quadrate als spezielles Galerkin-Petrov-Verfahren !

Hinweis: $\frac{\partial \|Au_h - b\|_Y^2}{\partial u^{(k)}} = 0 \quad \forall k \in \omega_h$.

Bem.: Bei Anwendung auf elliptische PDgl. ist die sogenannte starke (L_2-)Formulierung ($X = H^2(\Omega)$, $Y = L_2(\Omega)$ für PDgl. 2. Ordnung) Ausgangspunkt:

$$\int\limits_\Omega (\text{Fehler})^2\, dx + \int\limits_\Gamma (\text{Fehler})^2\, ds \to \min\ !$$

- Kollokations-Prinzip:
  - Siehe Ü I – IV: Kollokationsmethode für Integralgleichungen (Igl.).
    [11] NUMERIK II: BEM-Kollokation.
  - Ausgangspkt: = Klassische Formulierung von PDgl. bzw. Igl.
    Die Näherungslsg. $u_h(x)$ wird so gesucht, daß die PDgl. bzw. Igl. in den (N_h) Kollokationspunkten $\zeta^{(i)}, i \in \omega_h$ erfüllt wird !

- Spektralmethoden: (siehe Literatur, z.B. [4]).

4.2 Analysis des Galerkin-Verfahrens

4.2.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Galerkin-Ritz-Systems

= Folgerung aus dem Satz 2.9 (Lax & Milgram) für das Ritz-Galerkin-System: $V_0 \mapsto V_{0h}$!

- O.B.d.Allg. (evtl. nach Homogenisierung, vgl. Pkt. 2.3) betrachten wir wieder das abstrakte Variationsproblem

$(1)_0$ $\boxed{\text{Ges. } u \in V_0 : a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0}$

unter den Standardvoraussetzungen (siehe Pkt. 2.3; $V_0 \subset V$ - abgeschlossener, nichttrivialer UR des H-Raumes $V, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot)$):

$$
(2)\quad \begin{cases}
1) & F \in V_0^*. \\
2) & a(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \to I\!R^1 \text{ - Bilinearform auf } V_0: \\
2a) & V_0\text{–elliptisch:} \qquad \mu_1 \|v\|^2 \le a(v,v) \quad \forall v \in V_0, \\
2b) & V_0\text{–beschränkt:} \quad |a(u,v)| \le \mu_2 \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in V_0.
\end{cases}
$$

- Es sei $V_{0h} = \text{span}\,\{p^{(i)} : i \in \omega_h\} \subset V_0$ – endlichdim. UR von V_0:
  - $\to$ besser: Familie von UR mit $h \in \Theta$:
    $\dim V_{0h} = N_h \to \infty$ für $h \to 0$ ($|h| \to 0$)
    (Bsp. siehe Ü X und Pkt. 4.3).
  - $\to$ $\{p^{(i)} : i \in \omega_h\}$ – sei Basis in V_0, d.h. linear unabhängig !

- Überblick: Ritz-Galerkin-Verfahren

GALERKIN	$V_{0h} \subset V_0$
Ausgangspkt.: VP $(1)_0$ Ges. $u \in V_0 : a(u,v) \;=\; < F, v > \;\; \forall v \in V_0$ Vor.: 1), 2), 2a), 2b)	
$u_h \in V_{0h} : a(u_h, v_h) \;=\; < F, v_h > \; \forall v_h \in V_{0h}$	

$\Longleftrightarrow$ $a(\cdot,\cdot)$ symmetr. positiv

RITZ	$V_{0h} \subset V_0$
Ausgangspkt.: MP Ges. $u \in V_0 : J(u) = \inf\limits_{v \in V_0} J(v)$ Vor.: 1), 2), 2a), 2b), 2c)	
$u_h \in V_{0h} : J(u_h) = \inf\limits_{v_h \in V_{0h}} J(v_h)$	

$v_h = p^{(k)}$, $k \in \omega_h$

$V_{0h} \ni u_h \leftrightarrow \underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i \in \omega_h} \in I\!R^{N_h}$

$u_h = \sum\limits_{i \in \omega_h} u^{(i)} p^{(i)}$

$\updownarrow$

$\underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i \in \omega_h} \in I\!R^{N_h}$

„$\leftrightarrow$“ Galerkin-Ritz-Isomorphismus

$V_{0h} = \text{span}\,\{p^{(i)} : i \in \omega_h\}$ Basis

$N_h = |\omega_h|, \;\; h \in \Theta$

$\dfrac{\partial J(u_h)}{\partial u^{(k)}} = 0$, $k \in \omega_h$

GALERKIN-RITZ-System = endlichdim. GS ($N_h \times N_n$)
Ges. $\underline{u}_h = [u^{(i)}]_{i \in \omega_h} \in I\!R^{N_h}$: $\sum\limits_{i \in \omega_h} u^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)}) \;=\; < F, p^{(k)} > \quad \forall k \in \omega_h$
$K_h \underline{u}_h \;=\; \underline{f}_h$

■ **Satz 4.1:** (Lax-Milgram für Galerkin-Ritz-Systems)

Vor.: 1. Standardvoraussetzungen (2): 1), 2), 2a), 2b),

2. $V_{0h} \subset V_0$ – endlichdim. UR von V_0.

Bh.: 1. $\exists!\ u_h \in V_{0h} : a(u_h, v_h) = < F, v_h > \quad \forall v_h \in V_{0h} \qquad (1)_{0h}$

2. Die Folge $\{u_h^n\} \subset V_{0h}$, die durch die Beziehung

(3) $u_h^{n+1} \in V_{0h} : (u_h^{n+1}, v_h) = (u_h^n, v_h) - \varrho(a(u_h^n, v_h) - < F, v_h >)$
$\forall v_h \in V_{0h}$

eindeutig definiert wird, konvergiert für eine beliebig gewählte Startnäherung

$u_h^0 \in V_{0h}$ und $\varrho \in (0, 2\mu_1/\mu_2^2)$ in $V_0 = (u_h^n, v_h)$ – gl. $(\|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$

gegen die eindeutig existierende Lsg. $u_h \in V_{0h}$ von $(1)_{0h}$.

3. Es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

a) $\|u_h - u_h^n\| \leq q^n \|u_h - u_h^0\|$ (a-priori)

b) $\|u_h - u_h^n\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|u_h^1 - u_h^0\|$ (a-priori-Schranke)

c) $\|u_h - u_h^n\| \leq \frac{q}{1-q} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|$ (a-posteriori-Schranke)

mit $0 \leq q_{\text{opt}} = q(\varrho_{\text{opt}}) \leq q(\varrho) := (1 - 2\mu_1\varrho + \mu_2^2\varrho^2)^{\frac{1}{2}} < 1$
für $\varrho \in (0, 2\mu_1/\mu_2^2)$; $\varrho_{\text{opt}} = \mu_1/\mu_2^2$, $q_{\text{opt}} = \sqrt{1-\xi^2}$, $\xi = \mu_1/\mu_2$.

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 2.9 von Lax & Milgram: $V_{0h} \subset V_0 \subset V$ – abgeschlossene, nichttriviale UR !

Beachte: Riesz-Isom.:

$$\begin{array}{rcccl} J & : & V_0^* & \mapsto & V_0 \\ & & \cup & \longleftarrow & \cup \text{ — Hahn-Banach !} \\ J_h = J|_{V_{0h}} & : & V_{0h}^* & \mapsto & V_{0h} \qquad \text{(mms)} \end{array}$$

(3) $\Leftrightarrow u_h^{n+1} = u_h^n - \varrho(J_h A_h u_h^n - J_h F_h)$ in V_{0h}.

q.e.d.

4.2.2 Iterative Auflösung des Galerkin-Ritz-Systems

- **Korollar 4.1:**

  Das Iterationsverfahren (3) in V_{0h} ist wegen des Galerkin-Ritz-Isomorphismus $u_h \leftrightarrow \underline{u}_h$ äquivalent zu folgendem Iterationsverfahren (IV) in $\mathbb{R}^{N_h}$:

  $$(\underline{3}) \qquad B_h \frac{\underline{u}_h^{n+1} - \underline{u}_h^n}{\varrho} + K_h \underline{u}_h^n = \underline{f}_h, \; n = 0, 1, \ldots; \; \underline{u}_h^0 \in \mathbb{R}^{N_h},$$

  mit der symmetrischen und positiv definiten Matrix (Gramer-Matrix bzgl. des Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)$ in $V_0(V)$)

  $$B_h = [(p^{(i)}, p^{(k)})]_{k,i \in \omega_h}.$$

  Beweis:

  $$(3) \qquad u_h^{n+1} \in V_{0h} : (u_h^{n+1}, v_h) = (u_h^n, v_h) - \varrho(a(u_h^n, v_h) - < F, v_h > \quad \forall v_h \in V_{0h}$$

  $$u_h^j = \sum_{i \in \omega_h} u_{j}^{(i)} p^{(i)}, \; j = n, n+1$$

  Iterationsindex

  $$v_h = p^{(k)}, \; k \in \omega_h$$

  $$(\underline{3}) \qquad \underline{u}_h^{n+1} \in \mathbb{R}^{N_h} : \sum_{i \in \omega_h} u_{n+1}^{(i)} (p^{(i)}, p^{(k)}) = \sum_{i \in \omega_h} u_n^{(i)} (p^{(i)}, p^{(k)}) - \varrho \sum_{i \in \omega_h} u_n^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)}) + $$
  $$+ \varrho < F, p^{(k)} > \quad \forall k \in \omega_h$$
  $$B_h \cdot \underline{u}_h^{n+1} = B_h \underline{u}_h^n - \varrho K_h \underline{u}_h^n + \varrho \underline{f}_h$$

  q.e.d.

- Bemerkung:

  Es gelten natürlich die Fehlerabschätzungen 3a) – 3c) aus Satz 4.1; wobei

  $\|v_h\| = \|\underline{v}_h\|_{B_h} \quad \forall v_h \leftrightarrow \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ mit $\|\underline{v}_h\|_{B_h} := (B_h \underline{v}_h, \underline{v}_h)_{\mathbb{R}^{N_h}}^{0.5}$,
  $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^{N_h}}$ – Euklidisches Skalarprodukt.

- Feststellung:

  Das IV $(\underline{3})$ ist nur dann effektiv, wenn das in jedem Iterationsschritt zu lösende GS

  $$B_h \underline{w}_h^n = \underline{d}_h^n := \underline{f}_h - K_h \underline{u}_h^n,$$
  $$\underline{u}_h^{n+1} = \underline{u}_h^n + \varrho \underline{w}_h^n$$

  schnell (d.h. $Q(B_h^{-1} * \underline{d}_h^n)$:= Anzahl der arithmetischen Operationen zur Auflösung des GS $\cong O(K_h * \underline{u}_h^n)$!!) auflösbar ist. In praktischen Anwendungen ist das i. allg. nicht der Fall ($\exists$ Ausnahmen !) !
  Wir bemerken, daß der Konvergenzfaktor (KF) $q = q_{\text{opt}} = \sqrt{1 - \xi^2} < 1$ unabhängig von h kleiner als 1 ist, da $\xi = \mu_1/\mu_2$ nicht von h abhängt !

- Ausweg: = Vorkonditionierung C_h !
  Sei $C_h = C_h^T$ p.d.:

$$
(4)\left\{\begin{array}{ll}
1. & Q(C_h^{-1} * \underline{d}_h^n) \cong O(K_h * \underline{u}_h^n) \\
2. & C_h \text{ ist spektraläquivalent zu } B_h, \\
 & \text{d.h. } \exists\, \gamma_1, \gamma_2 = \text{const.} > 0 : \gamma_1 C_h \leq B_h \leq \gamma_2 C_h, \text{ d.h.} \\
 & \gamma_1 (C_h \underline{v}_h, \underline{v}_h)_{\mathbb{R}^{N_h}} \leq (B_h \underline{v}_h, \underline{v}_h)_{\mathbb{R}^{N_h}} \leq \gamma_2 (C_h \underline{v}_h, \underline{v}_h)_{\mathbb{R}^{N_h}} \quad \forall \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{N_h}.
\end{array}\right.
$$

  Dann kann man anstelle von ($\underline{3}$) das IV ($\underline{5}$)

$$
(\underline{5}) \qquad C_h \frac{\underline{u}_h^{n+1} - \underline{u}_h^n}{\tau} + K_h \underline{u}_h^n = \underline{f}_h, \; n = 0, 1, \ldots; \; \underline{u}_h^0 \in \mathbb{R}^{N_h}
$$

  benutzen. Der folgende Satz zeigt, daß das Iterationsverfahren (IV) ($\underline{5}$) effizient ist:

- **Satz 4.2.:**

  Vor.:
  1. Standardvoraussetzungen (2): 1), 2), 2a), 2b),
  2. $V_{0h} \subset V_0$ – endlichdim., nichttriv. UR von V_0,
  3. Vor. (4).

  Bh.:
  1) Das IV ($\underline{5}$) konvergiert für $\tau \in (0, 2\nu_1/\nu_2^2)$ mit $\nu_1 = \mu_1\gamma_1$ und $\nu_2 = \mu_2\gamma_2$ gegen die Lösung

$$
\begin{array}{lr}
\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h} : K_h \underline{u}_h = f_h & (\underline{1})_{0h} \\
\updownarrow & \\
u_h \in V_{0h} : \quad a(u_h, v_h) = \, < F, v_h > \quad \forall v_h \in V_{0h} & (1)_{0h}.
\end{array}
$$

  2) Es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

     (a) $\|\underline{u}_h - \underline{u}_h^n\|_{C_h} \leq q^n \|\underline{u}_h - \underline{u}_h^0\|_{C_h}$

     (b) $\|\underline{u}_h - \underline{u}_h^n\|_{C_n} \leq \frac{q^n}{1-q} \|\underline{u}_h^1 - \underline{u}_h^0\|_{C_h}$

     (c) $\|\underline{u}_h - \underline{u}_h^n\|_{C_n} \leq \frac{q}{1-q} \|\underline{u}_h^n - \underline{u}_h^{n-1}\|_{C_h}$

     mit $\|\underline{v}_h\|_{C_h} = (\underline{v}_h, \underline{v}_h)_{C_h}^{0.5} := (C_h \underline{v}_h, \underline{v}_h)_{\cancel{\mathbb{R}^{N_h}}}^{0.5}$

     und $0 \leq q_{\text{opt}} = q(\tau_{\text{opt}}) \leq q(\tau) := (1 - 2\nu_1\tau + \nu_2^2\tau^2)^{0.5} < 1$,
     für $\tau \in (0, 2\nu_1/\nu_2^2)$, $\tau_{\text{opt}} = \nu_1/\nu_2^2$, $q_{\text{opt}} = \sqrt{1-\xi^2}$, $\xi = \nu_1/\nu_2$.

  3) Falls $\gamma_1, \gamma_2 \neq c(h)$, dann benötigt man $I(\epsilon) = O(\ln \epsilon^{-1})$ Iterationen und $Q(\epsilon) = O((K_h * \underline{u}_h^n) \cdot \ln \epsilon^{-1})$ arithmetische Operationen, um den Anfangsfehler mit Faktor $\epsilon \in (0,1)$ zu reduzieren, d.h. $\|\underline{u}_h - \underline{u}_h^{I(\epsilon)}\|_{C_h} \leq \epsilon \|\underline{u}_h - \underline{u}_h^0\|_{C_h}$.

■ **Beweis:**

- Analog zu Satz 4.1: $\|v_h\| = \|\underline{v}_h\|_{B_h} \mapsto \|\underline{v}_h\|_{C_h}$.
  Dann gilt:

  a) $a(v_h, v_h) = (K_h\underline{v}_h, \underline{v}_h) \geq \mu_1\|\underline{v}_h\|^2_{B_h} \geq \mu_1\gamma_1\|\underline{v}_h\|^2_{C_h} \quad \forall \underline{v}_h \in I\!R^{N_h}$,

  b) $|a(u_h, v_h)| = |(K_h\underline{u}_h, \underline{v}_h)| \leq \mu_2\|\underline{u}_h\|_{B_h}\|\underline{v}_h\|_{B_h} \leq$
  $\mu_2\gamma_2\|\underline{u}_h\|_{C_h}\|\underline{v}_h\|_{C_h} \quad \forall \underline{u}_h, \underline{v}_h \in I\!R^{N_h}$.

#

- Direkter Beweis (mms).
  Hinweis: – Fehlerschema: $\underline{z}_h^{n+1} := \underline{u}_h - \underline{u}_h^{n+1} = (I_h - \tau C_h^{-1}K_h)\underline{z}_h^n$

  – Abschätzung in der $\|\cdot\|_{C_h}$–Norm:

  $$\begin{aligned}\|z_h^{n+1}\|^2_{C_h} &= \|(I_h - \tau C_h^{-1}K_h)\underline{z}_h^n\|^2_{c_h} = (\cdot,\cdot)_{c_h} = \\ &= \text{usw. wie im Bew. von Satz 2.9 !}\end{aligned}$$ #

- Bh 3. folgt aus: $q^n \leq \epsilon$, gdw. $n \geq \frac{\ln \epsilon^{-1}}{\ln q^{-1}}$.

q.e.d.

■ Bemerkung: → siehe auch [11] NUMERIK II und [9] (für PDgl.)

1) Kandidaten für C_h:
   - SSOR [9],
   - ILU [9],
   - Multigrid–Vorkonditionierung [9], [11], [10],
   - Multilevel–Vorkonditionierung: z.B. BPX [9], [11], [10].

2) Der Satz 4.2 setzt nicht voraus, daß $K_h = K_h^T$. Aus der V_0-Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ folgt aber sofort, daß K_h positiv definit ist (mms).
   Falls $\boxed{K_h = K_h^T \text{ p.d.}}$, dann gilt:

   (a) Die Konvergenzabschätzungen für (5) lassen sich verbessern:
   $\nu_1 C_h \leq K_h \leq \nu_2 C_h \;\Rightarrow\; \tau_{\text{opt}} = 2/(\nu_1 + \nu_2),\; q_{\text{opt}} = \frac{1-\xi}{1+\xi},\; \xi = \frac{\nu_1}{\nu_2}$.

   (b) CG-Beschleungigung ist möglich und wird in der Praxis standardmäßig genutzt !

4.2.3 Diskretisierungsfehlerabschätzung: $\|u - u_h\|_X \leq$?

4.2.3.1 Der Satz von Cea und Abschätzungen in der Norm $\|\cdot\|$

■ **Satz 4.3:** (Satz/Lemma von Cea, 1964)

Vor.: 1) Standardvor. (2): 1), 2), 2a), 2b).

2) $V_{gh} = g_h + V_{0h} \subset V_g$ - endlichdim. Hyperebene mit $V_{0h} \subset V_0$ – endlichdim. UR (↑), $g_h \in V_g \cap V_h$ geg.

3)
$$\begin{array}{llll} u \in V_g: & a(u,v) = < F, v > & \forall v \in V_0 & (1)_g \\ u_h \in V_{gh}: & a(u_h, v_h) = < F, v_h > & \forall v_h \in V_{0h} & (1)_{gh} \end{array}$$

Bh.:

$$\underbrace{\|u - u_h\|}_{\text{Diskretisierungsfehler}} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \underbrace{\inf_{w_h \in V_{gh}} \|u - w_h\|}_{\text{Approximationsfehler}} \qquad (5)$$

Beweis:

$$\begin{array}{lll} (1)_g & a(u, v_h) = < F, v_h > & \forall v_h \in V_{0h} \subset V_0 \,! \\ -\,(1)_{gh} & a(u_h, v_h) = < F, v_h > & \forall v_h \in V_{0h} \\ \hline (6) & \underline{\underline{a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_{0h}}} & \end{array}$$

Wählen in (6) $v_h = u - u_h - (u - w_h) = w_h - u_h \in V_{0h} \quad \forall w_h \in V_{gh}$:

$$\mu_1 \|u - u_h\|^2 \overset{2a)}{\leq} \boxed{a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w_h)} \overset{2b)}{\leq} \mu_2 \|u - u_h\| \, \|u - w_h\|$$

$\Rightarrow$ (5) **q.e.d.**

■ **Ü 4.7** Falls $a(\cdot,\cdot)$ zusätzlich zu den Standardvor. (2) symmetrisch ist, d.h.

2c) $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u, v \in V_0$,

dann gilt für das homogenisierte Problem (bzw. $g = 0$) die verbesserte Abschätzung

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\tfrac{\mu_2}{\mu_1}} \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\| \qquad (5)_s$$

Hinweis: Benutzen Sie die in Ü 4.4 zu zeigende Äquivalenz !

- Bemerkungen:

1) Das „Diskretisierungsfehler-Problem" wurde auf ein reines „Approximationsfehler-Problem" zurückgeführt (= Stabilität) !

2) Abschätzungen der Art (5) heißen quasioptimal:

$$\inf_{v_h \in V_{gh}} \|u - v_h\| \;\leq\; \|u - u_h\| \;\leq\; \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf_{v_h \in V_{gh}} \|u - v_h\|.$$

3) Konvergenz $u_h \xrightarrow[h\to 0]{} u$ in $V \Leftrightarrow \inf\limits_{v_h \in V_{gh}} \|u - v_h\| \to 0$ für $h \to 0$.

4) Wir nennen die Familie $\{V_{0h}\}_{h\in\Theta}$ der endlichdimensionalen UR von V_0 limitiert vollständig, gdw.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\Theta}} \inf_{v_h \in V_{0h}} \|u - v_h\| = 0 \quad \forall u \in V_0.$$

Falls $g = 0$ bzw. $g \in V_{gh}$ $\forall h \in \Theta$, dann garantiert die limitierte Vollständigkeit die Konvergenz des Galerkin-Verfahrens.

Hinweis:
$$\left.\begin{array}{l} u = g + \mathbf{u},\ \mathbf{u} \in V_0 \\ v_h = g + \mathbf{v_h},\ \mathbf{v_h} \in V_{0h},\ \text{d.h. } g_h = g \in V_{gh} \end{array}\right\} \Rightarrow u - v_h = \mathbf{u} - \mathbf{v_h}$$

#

4.2.3.2 Der Nitsche-Trick und Abschätzungen in schwächeren Normen

- Btr. o. B. d. Allg. das homogenisierte Variationsproblem $(1)_0$ und das dazugehörige Galerkin-Schema $(1)_{0h}$:

$(1)_0$ Ges. $u \in V_0 : a(u,v) \;=\; <F, v> \quad \forall v \in V_0,$

$(1)_{0h}$ Ges. $u_h \in V_{0h} : a(u_h, v_h) \;=\; <F, v_h> \quad \forall v_h \in V_{0h}.$

- Sei H ein Hilbert-Raum mit einer schwächeren Norm $|\cdot|$ und dem dazugehörigen Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]$, d.h.

$$V_0,\ \|\cdot\|, (\cdot,\cdot) \quad \text{(z.B. } \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \text{ für PDgl. 2. Ordnung, Dirichletsche Rbd.)}$$

$$H,\ |\cdot|, [\cdot,\cdot] \quad \text{(z.B. } L_2(\Omega),\ H^{-\lambda}(\Omega),\ 0 \le \lambda < 1\text{)},$$

und es gelte

$$(7) \quad \begin{cases} V_0 \subset H \subset V_0^*; \\ \overline{V_0}^{|\cdot|} = H, \text{ d.h. } V_0 \text{ ist dicht in } H; \\ |v| \le c\|v\| \quad \forall v \in V_0,\ c = \text{const.} > 0. \end{cases}$$

- Aus (7) folgt offenbar
$$|u - u_h| \le c\,\|u - u_h\|,$$
d.h. in der $|\cdot|$–Norm konvergiert das Galerkin-Verfahren mindestens genauso schnell wie in der $\|\cdot\|$–Norm !

- Ziel: Falls $|\cdot|$–Norm echt schwächer ist als die $\|\cdot\|$–Norm,

  d.h. $V_0 \hookrightarrow H$ bzw. $\inf\limits_{\substack{v\in V_0\\ v\neq 0}} \frac{|v|}{\|v\|} = 0$,
  dann sollte man $|u - u_h| = o(\|u - u_h\|)$, d.h. eine schnellere Konvergenz, erwarten können.

- **Satz 4.4:** (Dualitätsargument von Aubin & Nitsche, 1968)

  Vor.: 1) Standardvoraussetzungen (2): 1), 2), 2a), 2b);

  2) $V_{0h} \subset V_0$ – endlichdim., abgeschl., nichttriv. UR von V_0;

  3) $u \in V_0 : (1)_0$ und $u_h \in V_{0h} : (1)_{0h}$;

  4) Die Räume H und V_0 erfüllen (7).

  Bh.: Dann gilt die Diskretisierungsfehlerabschätzung

$$(8) \qquad |u - u_h| \le \mu_2 \|u - u_h\| \sup_{\substack{g\in H\\ g\neq 0}} \left[\frac{1}{|g|} \inf_{v_{gh}\in V_0} \|w_g - v_{gh}\| \right],$$

wobei $w_g \in V_0$ die zu jedem fixierten $g \in H,\ g \neq 0$ eindeutig existierende Lösung (mms) der zu $(1)_0$ gehörenden adjungierten Aufgabe

$(1)_0^*$ $\qquad a(v, w_g) = [g, v] \quad \forall v \in V_0$

ist.

■ <u>**Beweis:**</u>

Offenbar gilt

$$|u - u_h| = \sup_{\substack{g \in H \\ g \neq 0}} \frac{[u - u_h, g]}{|g|}$$

Für $[u - u_h, g]$ erhalten wir nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} [u - u_h, g] &= [g, u - u_h] \overset{(1)_0^*}{=} a(u - u_h, w_g) \overset{\substack{\text{„Galerkin-Orthogonalität" !} \\ (6)}}{=} a(u - u_h, w_g - v_{gh}) \leq \\ &\leq \mu_2 \|u - u_h\| \, \|w_g - v_{gh}\| \quad \forall v_{gh} \in V_{0h} \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort (8). **q.e.d.**

■ <u>Bemerkung:</u>

In der Praxis (PDgl.) hat man oft die folgende Situation:

$$\begin{array}{lccccccc} & \|\cdot\|_W & & \|\cdot\|_{V_0} = \|\cdot\| & & \|\cdot\|_H = |\cdot| & & \|\cdot\|_{V_0^*} = \|\cdot\|_* \\ & W & \hookrightarrow & V_0 & \hookrightarrow & H & \hookrightarrow & V_0^* \\ [\text{ z.B.} & H^{1+\lambda} & \hookrightarrow & \overset{\circ}{H}{}^1 & \hookrightarrow & H^{-1+\lambda} & \hookrightarrow & H^{-1}, \lambda \in (0,1] \text{ z.B. } \lambda = 1] \end{array}$$

mit einem <u>Regularitätsresultat</u> (W-Koerzitivität) für $(1)_0^*$, d.h.

(9) $\qquad w_g \in V_0 \cap W$ und $\|w_g\|_W \leq c_R \|g\|_H$

und dem <u>Approximationsresultat</u>

(10) $\qquad \inf_{v_{gh} \in V_{0h}} \|w_g - v_{gh}\|_{V_0} \leq c_A h^\alpha \|w_g\|_W.$

Aus (8), (9) und (10) erhält man dann

$(8)'$ $\qquad \|u - u_h\|_H = |u - u_h| \leq \mu_2 \, c_R \, c_A \, h^\alpha \|u - u_h\|_{V_0}; \quad [\alpha = \lambda].$

4.3 Beispiel: RWA für elliptische PDgl. 2. Ordnung

- Systematische Behandlung von RWA für PDgl.: $\Longrightarrow$ Siehe [11] NUMERIK II !

- Btr. RWA in formaler klassischer Formulierung:

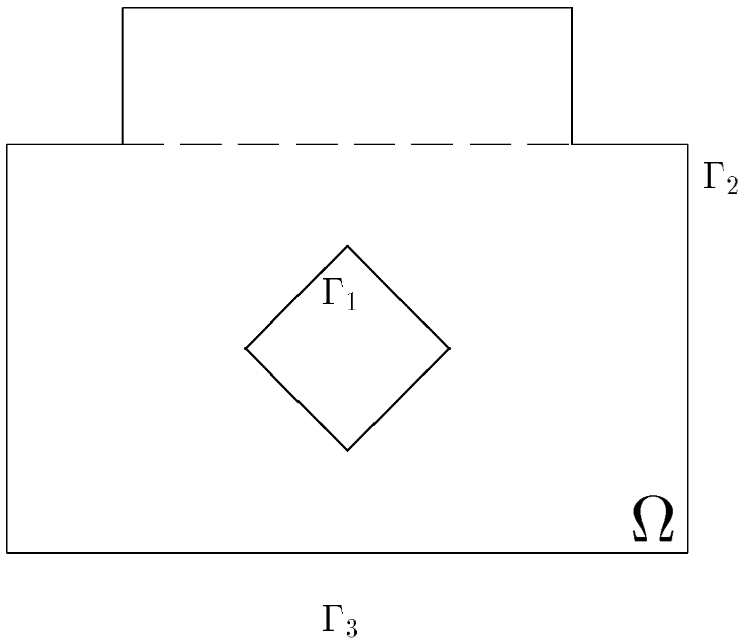
$(1)_{\mathrm{KF}}$ Ges. Fkt. $u(x_1, x_2)$:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = f(x),\ x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
u(x) &= g_1(x),\ x \in \Gamma_1 \text{ (1. Art = Dirichlet = wesentl. Rbd.)} \\
\frac{\partial u}{\partial N} &:= \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} n_i(x) = g_2(x),\ x \in \Gamma_2 \text{ (2. Art = Neumann)}, \\
\frac{\partial u}{\partial N} &= \alpha(x)(g_3(x) - u(x)),\ x \in \Gamma_3 \text{ (3. Art = Robin)},
\end{aligned}$$

mit $\Omega \subset I\!R^2$ $\dagger, \Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cap \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$:



$\vec{n} = (n_1, n_2)^T,\ n_i = \cos \sphericalangle(\vec{n}, x_i),\ |\vec{n}| = 1.$

- (1) modelliert z.B. ebenes Wärmeleitproblem: λ – Wärmeleitzahl, α – Wärmeübergangszahl, f – Intensität der Wärmequelle, g_1 – auf Γ_1 geg. Randtemperatur, g_2 – auf Γ_2 geg. Wärmestrom, g_3 – Außentemperatur an Γ_3.

- <u>Schritte zur formalen Herleitung der Variationsformulierung:</u>

  1) Multiplizieren Dgl. $(1)_{\mathrm{KF}}$ mit Testfkt. $v \in V_0 = \{v \in V = H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\}$ und integrieren über Ω:
  $$-\int\limits_\Omega \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)}_{2.} \cdot v\,dx - \int\limits_\Omega \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)}_{2.} \cdot v\,dx = \int\limits_\Omega fv\,dx, \quad \forall v \in V_0.$$

  2) <u>Partielle Integration</u> im Hauptteil (bei 2. Abl. !):
  $$\int\limits_\Omega \lambda\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,dx - \underbrace{\int\limits_\Gamma \lambda\frac{\partial u}{\partial x_1}n_1 v\,ds}_{} + \int\limits_\Omega \lambda\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,dx - \underbrace{\int\limits_\Gamma \lambda\frac{\partial u}{\partial x_2}n_2 v\,ds}_{} = \int\limits_\Omega fv\,dx, \quad \forall v \in V_0,$$
  d.h.
  $$\int\limits_\Omega \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx - \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial N}v\,ds = \int\limits_\Omega fv\,dx \quad \forall v \in V_0$$

  3) Einarbeitung der natürlichen Rbd. auf Γ_2 und Γ_3:
  $$\int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial N}v\,ds = \underbrace{\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial N}\underset{=0}{v}\,ds}_{=0} + \int\limits_{\Gamma_2} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial N}}_{=g_2}v\,ds + \int\limits_{\Gamma_3} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial N}}_{=\alpha(g_3-u)}v\,ds =$$
  $$= \int\limits_{\Gamma_2} g_2 v\,dx + \int\limits_{\Gamma_3} \alpha g_3 v\,ds - \int\limits_{\Gamma_3} \alpha uv\,ds$$

  4) Festlegung der linearen Mannigfaltigkeit (Hyperebene) V_g der zulässigen Fkt. = Menge, in der wir die Lsg. suchen (= Beachtung der wesentlichen Rbd.):
  $$V_g := \{v \in V : v|_{\Gamma_1} = g_1\}\,.$$

- <u>Resultat:</u> = Variationsformulierung:

$$(1)_{\mathrm{VF}} \quad \text{Ges. } u \in V_g : a(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in V_0$$
$$\underbrace{\int\limits_\Omega \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx + \int\limits_{\Gamma_3} \alpha uv\,ds}_{\text{Bilinearform}} = \underbrace{\int\limits_\Omega fv\,dx + \int\limits_{\Gamma_2} g_2 v\,ds + \int\limits_{\Gamma_3} \alpha g_3 v\,ds}_{\text{Linearform}}$$

- <u>Voraussetzungen:</u>

  1) $\lambda \in L_\infty(\Omega) : \exists\, \underline{\lambda}, \bar{\lambda} = \text{const.} > 0 : \;\; \underline{\lambda} \le \lambda(x) \le \bar{\lambda} \quad \forall$ f.ü. $x \in \Omega$;
  2) $\alpha \in L_\infty(\Gamma_3) : \exists\, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} = \text{const.} > 0 : \;\; \underline{\alpha} \le \alpha(x) \le \bar{\alpha} \quad \forall$ f.ü. $x \in \Gamma_3$;
  3) $f \in L_2(\Omega)$;
  4) $g_2 \in L_2(\Gamma_2),\; g_3 \in L_2(\Gamma_3)$;
  5) $g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, d.h. $\exists\, \tilde{g}_1 \in H^1(\Omega) : \tilde{g}_1|_{\Gamma_1} = g_1$;
  6) $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \dagger : \Gamma = \partial\Omega \in C^{0,1}$ (Lipschitz-stetiger Rand);
  7) $\operatorname{meas}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Gamma_1) > 0$.

- <u>Existenz- und Eindeutigkeit:</u> Satz 2.9 von Lax & Milgram:

  - Zunächst muß das Variationsproblem $(1)_{\text{VF}}$ homogenisiert werden:
    Ansatz: $u = \tilde{g}_1 + w$ mit $w \in V_0$ ges. und $\tilde{g}_1 \in H^1(\Omega)$ geg. (Vor. 5)):
    $(1)_{\text{VF}} \to (2)_0 \qquad$ Ges. $w \in V_0 : a(w,v) \;=\; < \hat{F}, v > \quad \forall v \in V_0$
    mit $< \hat{F}, v > \,=\, < F, v > - \, a(\tilde{g}_1, v)$.
  - Überprüfen nun die Vor. des Satzes von Lax & Milgram:
    1) $\hat{F} \in V_0^*$:
       * $< \hat{F}, \cdot >$ ist offenbar Linearform auf V_0.
       * $\hat{F} \dagger$, da

       $$\begin{aligned}(a)\; | < F, v > | &\le \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} + \|g_2\|_{0,\Gamma_2}\|v\|_{0,\Gamma_2} + \|\alpha\|_{\infty,\Gamma_3}\|g_3\|_{0,\Gamma_3}\|v\|_{0,\Gamma_3} \\ &\le \left(\|f\|_{0,\Omega} + c_1\|g_2\|_{0,\Gamma_2} + c_1\|\alpha\|_{\infty,\Gamma_3}\|g_3\|_{0,\Gamma_3}\right)\|v\|_{1,\Omega} \\ &\uparrow \\ &\|v\|_{0,\Omega} \le \|v\|_{1,\Omega} \\ &\|v\|_{0,\Gamma_i} \le \|v\|_{0,\Gamma} \le c_1\|v\|_{1,\Omega} \text{ (Einbettung: } H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Gamma)\text{ !)}\end{aligned}$$

       d.h. $\|F\|_* := \|F\|_{V_0^*} \le \|f\|_{0,\Omega} + c_1(\|g_2\|_{\sigma,\Gamma_2} + \bar{\alpha}\|g_3\|_{0,\Gamma_3})$,

       $$\begin{aligned}(b)\; |a(\tilde{g}_1, v)| &\le \bar{\lambda}|\tilde{g}_1|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} + \bar{\alpha}\|\tilde{g}_1\|_{0,\Gamma_3}\|v\|_{0,\Gamma_3} \\ &\le (\bar{\lambda}|\tilde{g}_1|_{1,\Omega} + c_1\bar{\alpha}\|\tilde{g}_1\|_{0,\Gamma_3})\|v\|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

       $(a) + (b) \Rightarrow \|\hat{F}\|_* \le \|f\|_{0,\Omega} + c_1(\|g_2\|_{0,\Gamma_2} + \bar{\alpha}\|g_3\|_{a\Gamma_3}) + \bar{\lambda}|\tilde{g}_1|_{1,\Omega} + c_1\bar{\alpha}\|\tilde{g}_1\|_{0,\Gamma_3}$.

    2) $a(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}^1$ – Bilinearform (trivial):

2a) V_0–elliptisch, d.h. $\exists\ \mu_1 = \text{const.} > 0 : \mu_1 \|v\|^2_{1,\Omega} \leq a(v,v) \quad \forall v \in V_0$;
tatsächlich
$a(v,u) \geq \underline{\lambda} |v|^2_{1,\Omega} \geq \underline{\lambda}(\bar{c}^2+1)^{-1} \|v\|^2_{1,\Omega}$,
$\uparrow$
Lemma 3.2 für $p=2 : \|v\|_{0,\Omega} \leq \bar{c}|v|_{1,\Omega}$, also $\|v\|^2_{1,\Omega} \leq (\bar{c}^2+1)|v|^2_{1,\Omega}$.
d.h. $\mu_1 = \underline{\lambda}(\bar{c}^2+1)^{-1}$.

2b) V_0–beschränkt, d.h. $\exists\ \mu_2 = \text{const.} > 0 : |a(u,v)| \ \leq \mu_2 \|u\|_{1,\Omega}\ \|v\|_{1,\Omega}$
$\forall u, v \in V_0$,
tatsächlich
$$\begin{aligned} |a(u,v)| \ &\leq \bar{\lambda}|u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} + \bar{\alpha}|u|_{0,\Gamma_3}\,|v|_{0,\Gamma_3} \leq \\ &\leq \bar{\lambda}\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} + \bar{\alpha}c_1\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} = (\bar{\lambda}+\bar{\alpha}c_1)\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$
d.h. $\mu_2 = \bar{\lambda} + \alpha c_1$.

- $\exists !\ w \in V_0 : a(w,v) = < \hat{F}, v > \quad \forall v \in V_0$
  $\Rightarrow \exists !\ u \in V_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall v \in V_0$ #

■ <u>Bemerkung:</u>

1) Korollar 2.3 liefert noch Iterationsverfahren (IV) zur konstruktiven Bestimmung der Lösung.
Schreiben Sie dieses Iterationsverfahren auf!

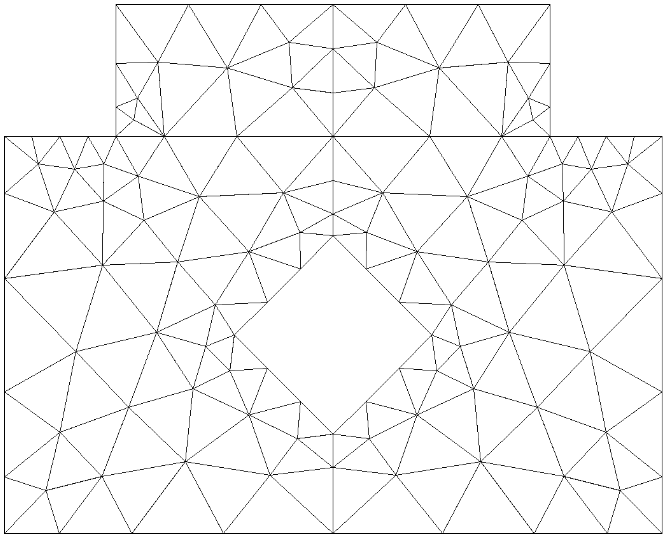
2) Offene analytische Fragen: (↰ [11] NUMERIK II)
$\rightarrow$ Regularität und Struktur der Lsg., z.B. $u \in V_g \cap H^{1+s}(\Omega)$ mit $s > 0$?

■ <u>Galerkin-FEM-Diskretisierung:</u>

$$V_h = \text{span}\left\{p^{(i)}(x) : i \in \bar{\omega}_h\right\} \subset V$$
$$V_{0h} = \text{span}\left\{p^{(i)}(x) : i \in \omega_h\right\} \subset V_0$$

$$V_{gh} = \{v_h \underbrace{\sum_{i\in\gamma_h} u_*^{(i)} p^{(i)}(x)}_{g_{1h}|_{\Gamma_1} = g_1} + \sum_{i\in\omega_h} v^{(i)} p^{(i)}(x)\} \subset V_g$$

Bsp.: Stückweise lineare Ansatzfkt. $p^{(i)}$ über Modellgebiet: $p^{(i)}(x^{(j)}) = \delta_{ij}$:



$\omega_h = \{\bullet\} = \{1, 2, \ldots, 112\}$, $N_h = 112$,
$\gamma_h = \{*\} = \{113, \cdots, 124\}$
$u_*^{(i)} = g_1(x^{(i)}) = 500$

$p^{(i_*)}(x) =$

$$
\begin{array}{lll}
(1)_h & \text{Ges. } u_h \in V_{gh} : a(u_h, v_h) & = < F, v_h > \quad \forall v_h \in V_{0h} \\
& \quad \updownarrow & \\
(\underline{1})_h & \text{Ges. } \underline{u}_h = \{u^{(i)}\}_{i\in\omega_h} \in I\!R^{N_h}: & \sum\limits_{i\in\omega_h} u^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)}) = \\
& & = < F, p^{(k)} > - \sum\limits_{i\in\gamma_h} u_*^{(i)} a(p^{(i)}, p^{(k)}) \;\; \forall k \in \omega_h \\
\hline
& & K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h
\end{array}
$$

- Resultate:

  1) Satz 4.1: $\Rightarrow \exists!$
  2) Korollar 4.1 und Satz 4.2: $\Rightarrow$ IV zur Lösung von $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$.

- Offene Fragen:

  1) Effiziente Generierungstechniken für K_h und $\underline{f}_h$.
  2) Eigenschaften von K_h, z.B. Kondition $\kappa(K_h) := \frac{\lambda_{\max}(K_h)}{\lambda_{\min}(K_h)} = ?$
  3) Vorkonditionierung C_h ?

4) Diskretisierungsabschätzung (a-priori):

(a) $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf\limits_{v_h \in V_{gh}} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \leq \ldots$? (Bramble-Hilbert)

(b) $\|u - u_n\|_{0,\Omega} \leq$? (Nitsche-Trick)

(c) $\|u - u_n\|_{\infty,\Omega} \leq$?

5) Diskretisierungsfehlerabschätzungen (a-posteriori).

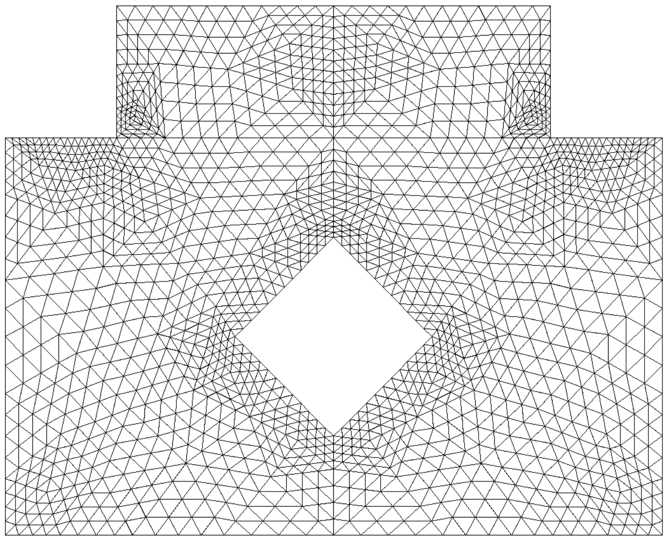
6) Andere Diskretisierungstechniken (FDM, BEM,...).

$\vdots$

<u>Antworten:</u> Vorlesung Numerik II SS 96, [11].

■ <u>Resultate der FEM-Rechnung:</u>

1) Feineres Netz



2) Niveaulinien der Temperatur für folgende Daten:

λ (Material I) $= 0.01 \left[\frac{W}{\text{cm}\,K}\right]$ (Silikat)

λ (Material II) $= 3.95 \left[\frac{W}{\text{cm}\,K}\right]$ (Kupfer)

$f = 0$ (keine inneren Wärmequellen)

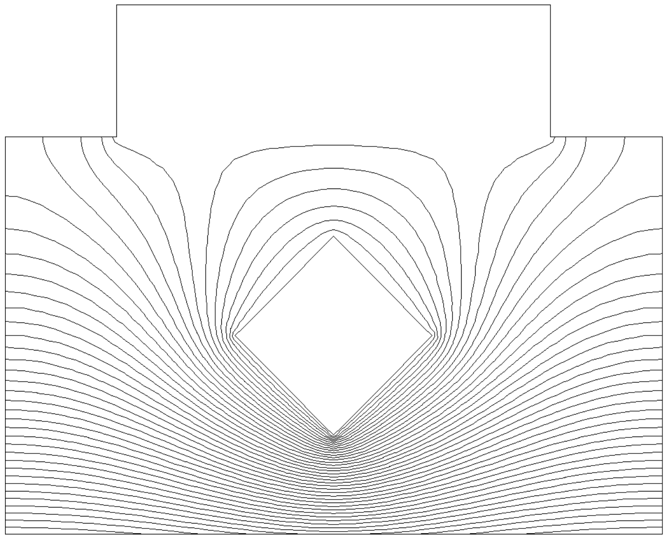
$\Gamma_1 : g_1 = \text{const.} = 500\,K$ (Randtemperatur)

$\Gamma_2 : g_2 = 0$ (Isolation)

Γ_3: $\frac{\partial u}{\partial N} := \lambda$ (Material I) $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \equiv -\lambda(\cdot)\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha(g_3 - u)$

$\alpha = 0.2 \left[\frac{W}{\text{cm}^2 K}\right]$

$g_3 = 300\,K$ (Außentemperatur)



5 Funktionalanalytische Grundlagen zur Behand– lung nichtlinearer Operatorgleichungen

- <u>Ziel:</u> Übertragung der klassischen Ableitungsbegriffe für Fkt. $F : I\!R^1 \to I\!R^1$ und das damit verbundene „Handwerkszeug“ auf Abb. (Operatoren)

$$F : X \to Y,$$

wobei X, Y – reelle B-Räume ($\curvearrowright$ normierte Räume) sind.

- <u>Ausgangspunkt:</u> = Taylorsche Formel der klassischen Differentialrechnung

$$(*)\ F(x+h) = F(x) \quad + \quad \sum_{k=1}^{m} F^{(k)}(x)h^k/k! + o(|h|^m),\ h \to 0,$$

und das k-te Differential

$$d^k F(x;h) := F^{(k)}(x)h^k = F^{(k)}(x)\ \ h \cdot \ldots \cdot h,$$
$$d^k F(x;\cdot) : I\!R^k \mapsto I\!R^1 = I\!R^1 \times \ldots \times I\!R^1 \mapsto I\!R^1.$$

Der verallgemeinerte Ableitungsbegriff (F-Ableitung) soll so beschaffen sein, daß (*) auch für allgemeine $F : X \to Y$ ($X, Y - B$–Räume) gilt, und damit

$$F(x) + \sum_{k=1}^{m} F^{(k)}(x)(y-x)^k \frac{1}{k!}$$

eine hinreichend genaue ($o(\|y-x\|^m)$) Approximation von $F(y)$ in der Umgebung von x liefert !

5.1 Fréchet- und Gateaux-Ableitung

- <u>**Def. 5.1:**</u> (F-Ableitung = Fréchet-Ableitung)

Seien X, Y – B-Räume ($\curvearrowright$ normierte Räume) und $D \subset X, D \neq \emptyset$, offen.
Der Operator $F : D \mapsto Y$ heißt an der Stelle $x \in D$ <u>Fréchet-differenzierbar</u> (F-differenzierbar), gdw. $\exists\ A(x) \in L(X,Y)$:

$$(1) \qquad \underset{x+h}{F(y)} = F(x) + A(x)\underset{h}{(y-x)} + \underset{o(\|h\|)}{r(x,y)} \quad \forall y \in D$$

mit

$$r(x,y) = o(\|y-x\|_X), \quad \text{d.h.} \ \lim_{y \to x} \frac{\|r(x,y)\|_Y}{\|x-y\|_X} = 0$$

für $\|y-x\|_X \to 0$

Der Operator $A(x) \in L(X,Y)$ ist eindeutig bestimmt (mms) und heißt <u>F-Ableitung von F an der Stelle x</u>,

i.Z.: $$F'(x) := A(x) \in L(X,Y).$$

Das F-Differential in x wird durch

$$dF(x; y-x) := F'(x)(y-x)$$

erklärt. Angenommen, F ist $\forall x \in D$ F-differenzierbar. Dann heißt die Abbildung

$$F' : x \in D \subset X \to F'(x) \in L(X,Y)$$

F-Ableitung von F auf $D = D(F')$.

- Bemerkung: $L(y) = F(x) + F'(x)(y-x) \approx F(y) \quad \forall y \in U(x)$
  Der Begriff der Fréchet-Differenzierbarkeit liefert also die gewünschte lineare Approximation: Die in y affine Abb.

$$L(y) = F(x) + F'(x)(y-x)$$

  stimmt in einer Umgebung $U(x)$ von x hinreichend genau $(o(\|y-x\|))$ mit der nichtlinearen Abb. $F(y)$ überein !

- Bemerkung:
  Für die F-Ableitung gelten die aus dem $I\!R^1$ bzw. $I\!R^n$ bekannten Rechenregeln !
  (vgl. Ü 5.1 – Ü 5.4) !

- Die praktische Berechnung der F-Ableitung erfolgt meist über die Richtungsableitung, ein im wesentlichen eindimensionaler Ableitungsbegriff !

- **Def. 5.2:** (Gateaux-Differential = G-Differential $\delta_v F(x)$)
  Seien X, Y – B-Räume (↷ normierte Räume);
  $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen; $F : D \mapsto Y$ und $x \in D$.
  Falls für ein $v \in X$ der Grenzwert

(2) $$\delta_v F(x) \equiv \delta F(x; v) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ (t \text{ hinr. klein})}} \frac{1}{t} \, [F(\underset{\substack{\uparrow \\ D}}{x + tv}) - F(x)]$$

  in Y existiert, dann heißt $\delta_v F(x)$ G-Differential (oder Richtungsableitungsableitung) von F an der Stelle $x \in D$ in Richtung $v \in X$.

- **Satz 5.1:**

  Vor.: X, Y – B-Räume; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen
  $F : D \mapsto Y$ sei an der Stelle $x \in D$ F-differenzierbar.

  Bh.: Dann existiert das G-Differential von F an der Stelle $x \in D$ für alle Richtungen $v \in X$, und es gilt

$$\delta_v F(x) = dF(x; v) = F'(x)v.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\delta_v F(x) &:= \lim_{t\to 0} t^{-1} \left[F(x+tv) - F(x)\right] \overset{\substack{\text{Vor: } F\text{-diff.}\\ \downarrow}}{=} \\
&= \lim_{t\to 0} t^{-1} \left[F(x) + F'(x)(tv) + r(x, x+tv) - F(x)\right] = \\
&= F'(x)v + \lim_{t\to 0} \frac{r(x, x+tv)}{t\|v\|} = F'(x)v + 0 = F'(x)v.
\end{aligned}$$

q.e.d.

- Bemerkung:

  Aus der Existenz des G-Differentials an der Stelle x für alle Richtungen $v \in X$ folgt i. allgem. nur die Homogenität (mms) von $\delta_v F(x)$ bzgl. v, aber nichtnotwendig die Additivität und Stetigkeit.

- **Def. 5.3:** (Gateaux-Ableitung = G-Ableitung)

  Das G-Differential $\delta_v F(x)$ existiere in $x \in D$ für alle $v \in X$ und sei bzgl. v linear und stetig.
  Dann heißt der Operator $F : D \mapsto Y$ an der Stelle $x \in D$ Gateaux-differenzierbar (G-differenzierbar), und der durch

  (3) $\qquad F'(x)v := \delta_v F(x) \quad \forall v \in X$

  definierte stetige, lineare Operator $F'(x) \in L(X, Y)$ heißt G-Ableitung von F an der Stelle X.
  Ist F für alle $x \in D$ G-differenzierbar, dann heißt die Abb.

$$F' : x \in D \subset X \to F'(x) \in L(X, Y)$$

  G-Ableitung von F auf $D = D(F')$.

- Bemerkung:

1) $\exists$ F–Abl. $F'(x) \in L(X,Y) \Rightarrow$ $\exists$ G-Abl. und diese stimmt mit F-Abl. überein! (trivial)

2) Aus der Existenz der G-Abl. $F'(x)$ an der Stelle x kann i. allgem. noch nicht auf die Existenz der F-Ableitung geschlossen werden ($\exists$ Gegenbeispiele !!).

- **Satz 5.2:** (Verhältnis von F- und G-Ableitung)

Vor.: X, Y – B-Räume; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \to Y$, $x \in D$.

Bh.:

1) Jede F-Abl. in x ist auch G-Abl. in x.

2) Eine G-Abl. in x, bei der der Grenzübergang in (2) – (3) gleichmäßig $\forall v \in X : \|v\| = 1$ verläuft, ist auch F-Abl. in x.

3) $\exists$ G-Abl. $F'(y) \quad \forall y \in U(x) := K(x,r) \subset D$ und ist $F' : U \to L(X,Y)$ in x stetig, dann ist $F'(x)$ auch F-Abl. in x.

4) $\exists$ F-Abl. $F'(x)$, dann ist F in x stetig.

Beweis:

- 1., 2., 4. mms : vgl. (1), (2), (3) mit $h = y - x = tv$
- zu 3.: mms mit Satz 5.6 (Mittelwertsatz)
Wegen Stetigkeit der G-Abl. in x

$$\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists \text{ Kugel } K(x, \underbrace{\delta}_{\delta \le r}) \subset U = K(x,r) \subset D:$$
$$\|F'(y) - F'(x)\| \le \epsilon \quad \forall y \in K(x,\delta).$$

Sei nun $y \in K(x,\delta)$. Aus MWSatz 5.6, angewandt auf

$$\Phi(\cdot) := F(\cdot) - F(x) - F'(x)(\cdot - x)$$

folgt dann mit $\Phi'(\bullet) = F'(\bullet) - F'(x)$ und einem $\xi \in (0,1)$

$$\|F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)\|_Y = \|\Phi(y) - 0\|_Y = \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_Y \le$$

S. 5.6

$$\le \|\Phi'(x + \xi(y-x))(y-x)\|_Y \le \|\Phi'(x + \xi(y-x))\|_{[X \to Y]} \|y - x\|_X$$
$$= \|F'(x + \xi(y-x)) - F'(x)\|_{[X \to Y]} \|y - x\|_X \le \epsilon \|x - y\|_X = [o(\|x - y\|_X)]$$

q.e.d.

- <u>Übungen zu Rechenregeln bei F- bzw. G-Ableitungen:</u>

Ü 5.1 Seien X, Y – B-Räume; $D \subset X$; $D \neq \emptyset$, offen; Die Abb. F_1 und $F_2 : D \to Y$ seien in $x \in D$ F-differenzierbar (G-differenzierbar). Man zeige, daß dann für beliebige fixierte reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \in I\!R^1$ auch $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ in $x \in D$ $F-$ differenzierbar (G-differenzierbar) ist und $F'(x) = \alpha_1 F_1'(x) + \alpha_2 F_2'(x)$ gilt !

<u>Lösung:</u> folgt unmittelbar aus der Definition !

Ü 5.2 Man beweise die Kettenregel !

<u>Kettenregel:</u>

<u>Vor.:</u> X, Y, Z – B-Räume, $U(\cdot)$ = Umgebung von $(\cdot)$,
$F : U(x) \subset X \mapsto U(F(x)) \subset Y$;
$G : U(F(x)) \subset Y \mapsto Z$;
$\exists$ F-Abl. $F'(x)$ und $G'(F(x))$

<u>Bh.:</u> Dann ist $H(\cdot) := G(F(\cdot)) = G \circ F(\cdot)$ in x F-differenzierbar, und es gilt

$$H'(x) = \underset{\in L(Y,Z)}{G'(F(x))}\ \underset{\in L(X,Y)}{F'(x)} := G'(F(x)) \circ F'(x) \in L(X, Z).$$

<u>Beweis:</u>

- Nach Vor. gilt
  $G(F(x) + \Delta F) = G(F(x)) + G'(F(x))\Delta F + o(\|\Delta F\|_Y)$ für $\Delta F \to 0$
  $F(x + \Delta x) = F(x) + F'(x)\Delta x + o(\|\Delta x\|_X)$ für $\Delta x \to 0$

- Also

$$H(x + \Delta x) = G(F(x + \Delta x)) = G(F(x) + \overbrace{F'(x)\Delta x + o(\|\Delta x\|_X)}^{\Delta F}) =$$
$$= G(F(x)) + G'(F(x))(F'(x)\Delta x + o(\|\Delta x\|_X)) + o(\|\Delta F\|_Y) =$$
$$= G(F(x)) + \underbrace{G'(F(x))F'(x)}_{=H'(x)}\Delta x + o(\cdot).$$

#

$\boxed{\textbf{Ü 5.3}}$ In $\boxed{\text{Ü 5.2}}$ existiere $F'(x)$ nur als G-Ableitung. Dann ist $H(\cdot) := G(F(\cdot))$ in x ebenfalls nur G-differenzierbar, und die G-Abl. ist durch die Beziehung

$$H'(x) = G'(F(x))F'(x) \in L(X, Z)$$

gegeben !

Beweis: analog zu Ü 5.2 ! #

$\boxed{\textbf{Ü 5.4}}$ Man beweise die Produktregel !

Produktregel:

Vor.: $X, X_1, X_2, Y - B$-Räume
B: $X_1 \times X_2 \mapsto Y-$ bilinear, stetig (*):
$\exists\, c = \text{const.} > 0$:
$\|B(x_1, x_2)\|_Y \leq c\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2} \quad \forall x_i \in X_i, \quad i = 1, 2$
$F_i : U(x) \subseteq X \mapsto X_i, \ i = 1, 2;$
F_i sei in x F-diff. (G-diff.), $i = 1, 2;$
$H(\cdot) := B(F_1(\cdot), F_2(\cdot)) : U(x) \subset X \mapsto Y$

Bh.: H ist in x F-diff. (G-diff.), und es gilt:
$H'(x)h = B(F_1'(x)h, F_2(x)) + B(F_1(x), F_2'(x)h) \quad \forall h \in X.$

Beweis: F-diff. (analog G-Differenzierbarkeit)
Man setze

$$F_i(x + h) = F_i(x) + F_i'(x)h + o(\|h\|), \ h \to 0$$

in $B(\cdot, \cdot)$ ein und benutze Bilinearität und Beschränktheit. #

- <u>Zum Begriff der „Partiellen $F-$ bzw. G-Ableitung“:</u>

<u>Def. 5.4:</u> (Partielle Ableitung)

Seien X, Y, Z – B-Räume ($\curvearrowright$ norm. Räume) und $D \subset X \times Y,\ D \neq \emptyset$, offen.
$F : D \subset X \times Y \to Z,\ (x, y) \in D.$

Die F-Abl. (G-Abl.) von $G(\cdot) := F(\cdot, \overset{\substack{\text{fix.}\\ \downarrow}}{y})$ an der Stelle x heißt <u>partielle F- (bzw. G-) Ableitung</u> von F nach x in (x, y) und wird mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = F_x(x, y) \in L(X, Z)$$

bezeichnet. Analog definiert man $F_y(x, y)$.

<u>Satz 5.3:</u> ($\exists$ partielle Abl.)

<u>Vor.:</u> $X, Y, Z - B$-Räume; $D \subset X \times Y,\ D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \mapsto Z$.

<u>Bh.:</u> Falls F in $(x, y) \in D$ F-differenzierbar ist, dann existieren in (x, y) die partiellen Ableitungen, und es gilt:
$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = F(x, y)+F_x(x, y)\Delta x+F_y(x, y)\Delta y+o(\|\Delta x\|+\|\Delta y\|)$
für $\|\Delta x\| + \|\Delta y\| \to 0$.

<u>Beweis:</u> mms

$\Rightarrow F(x + \Delta x, y + \Delta y) = F(x, y) + F'(x, y)(\Delta x, \Delta y) + o(\|\Delta x\| + \|\Delta y\|)$
für $\|\Delta x\| + \|\Delta y\| \to 0$

$$\begin{array}{lll}
\Rightarrow \text{a) } \Delta y = 0: & F_x(x, y)\Delta x = F'(x, y)(\Delta x, 0) & \\
 \text{ b) } \Delta x = 0: & F_y(x, y)\Delta y = F'(x, y)(0, \Delta y) & + \\
\hline
& F_x(x, y)\Delta x + F_y(x, y)\Delta y & = F'(x, y)(\Delta x, 0) + F'(x, y)(0, \Delta y) \\
& & = F'(x, y)(\Delta x, \Delta y)
\end{array}$$

q.e.d.

<u>Satz 5.4:</u> ($\exists$ F-Abl.)

<u>Vor.:</u> X, Y, Z – B-Räume; $D \subset X \times Y,\ D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \mapsto Z;\ (x, y) \in D$.

<u>Bh.:</u> Falls in einer Umgebung $U = U(x, y)$ von $(x, y) \in D$ die partiellen F-Abl. von F nach x und nach y existieren, $F_x : U \mapsto L(X, Z)$ und $F_y : U \mapsto L(Y, Z)$ stetig in (x, y) sind, dann ist F in (x, y) F-differenzierbar mit

$$F'(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y)) \in L(X \times Y, Z).$$

<u>Beweis:</u> mms: 1) $\exists F_x$ und F_y in U stetig in (x, y)
$\Rightarrow \exists$ G-Abl. in U stetig in (x, y).
2) $\exists$ F-Abl. folgt dann aus Satz 5.2.

q.e.d.

■ **<u>Beispiele:</u>**

0. <u>Hinweis zur formalen Berechnung von G- bzw. F-Abl.:</u>
   - Man entwickle formal nach t:
     $F(x + th) = F(x) + ta_1 + \circ(t), \quad t \to 0;$
   - Man setze $dF(x; h) := F'(X)h := a_1;$
   - Man prüfe nach, ob die Bed. von Def. 5.1 bzw. Def. 5.3 erfüllt sind !

1. **<u>Bsp. 1.:</u>** $F : \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1$
   Für Funktionen $F : \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1$ stimmen die Begriffe G-Abl. und F-Abl. überein. Die „gewöhnliche" Abl. $F'(x)$ bestimmt die lineare Abb.
   $F'(x) \in L(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$:
   $F'(x) : \ h \in \mathbb{R}^1 \mapsto F'(x)h \in \mathbb{R}^1,$
   die die F-Abl. von F an der Stelle x definiert. Man unterscheidet in der Bezeichnung üblicherweise nicht zwischen der Zahl $F'(x)$ und der damit definierten Abb. In diesem Sinne ist $F'(x)$ die F-Abl.

2. **<u>Bsp. 2.:</u>** $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$
   - $F_i(x + th) = F_i(x) + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} t \cdot h_j + o(t), \ t \to 0$
     $i = \overline{1, m}$
   - $dF(x; h) := \underbrace{\left[\dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right]_{i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}}}_{F'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$
   - Def. 5.1, Def. 5.3 !

Für Funktionen $F : I\!R^n \to I\!R^m$ ist die F-Abl. (G-Abl.), falls sie existiert, durch die Abb. $F'(x) \in L(I\!R^n, I\!R^m)$:

$$F'(x) : h \in I\!R^n \mapsto F'(x)h \in I\!R^m,$$

bestimmt, wobei $F'(x)$ die Jacobi-Matrix von F an der Stelle x bezeichnet:

$$F'(x) = \left[\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right]_{i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}}.$$

Man unterscheidet in der Bezeichnung überlicherweise nicht zwischen Matrix $F'(x)$ und der damit definierten linearen Abbildung. In diesem Sinne ist $F'(x)$ die F-Abl.

3. <u>**Bsp. 3.:**</u> $F = \frac{d}{ds}$:

$$\begin{array}{ccc} X = C^1[0,1] & \mapsto & Y = C[0,1] \\ \Psi & & \Psi \\ x(\cdot) & \mapsto & \dot{x}(\cdot) = Fx(\cdot) := \frac{d}{ds}x(\cdot) \end{array}$$

- $F(x+th) = \dot{x} + t\dot{h} = F(x) + ta_1$
- $dF(x;h) = F'(x)h = \frac{d}{ds}h$, d.h. $F'(x) = \frac{d}{ds}$
- Def. 5.1: $F'(x) = \frac{d}{ds} \in L(X,Y)$ ist F-Abl. #

<u>Analog:</u> Berechnung über die Richtungsableitung:
Für die Abb. $F = \frac{d}{ds}$ erhält man als Richtungsableitung

$$\delta_h F(x) = \delta F(x;h) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[F(x+th) - F(x)] = \frac{d}{ds}h.$$

Dadurch wird die G-Abl. definiert:

$$F'(x)h = \frac{d}{ds}h$$

als ein linearer, stetiger Operator $F'(x) := \frac{d}{ds} \in L(C^1[0,1], C[0,1])$.

Folglich gilt: $F'(x) = \frac{d}{ds} = F$.
Da $F'(x)$ konstant in x (d.h. x-unabhängig) und damit natürlich auch stetig in x ist, ist $F'(x)$ auch die F-Ableitung.
Man zeige, daß die obige Eigenschaft $F'(x) = F$ für jeden linearen, stetigen Operator $F \in L(X,Y)$ gilt !

4. <u>**Bsp. 4.:**</u> F :

$$\begin{array}{ccc} X = C^1[0,1] & \mapsto & Y = C[0,1] \\ \Psi & & \Psi \\ x(\cdot) & \mapsto & \frac{d}{ds}\left(x(\cdot)\right)^2 \end{array}$$

- $F(x+th) \;= \frac{d}{ds}(x+th)^2 = \frac{d}{ds}(x^2+2txh+t^2h^2)$
  $= \frac{d}{ds}x^2 + 2t\dot{x}h + 2tx\dot{h} + t^2 2h\dot{h}$
  $= F(X) + (2\dot{x} + 2x\frac{d}{ds})ht + O(t^2)$
- $dF(x;h) = F'(x)h = (2\dot{x} + 2x\frac{d}{ds})h$
- Def. 5.1.: $F'(x) = 2\dot{x}I + 2x\frac{d}{ds} \in L(C^1[0,1], C[0,1])$ ist F-Abl. #

Analog: Berechnung über die Richtungsableitung: Für die Abb. F erhält man als Richtungsableitung

$$\begin{aligned}\delta_h F(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{d}{ds}(x+th)^2 - \frac{d}{ds}x^2\right] = 2\,\frac{d}{ds}(x\cdot h)\\ &= 2(\dot{x}h + x\dot{h}).\end{aligned}$$

Die G-Abl. lautet daher: $F'(x) = 2\dot{x}I + 2x\,\frac{d}{ds}$ mit dem Einheitsoperator I. Man überzeugt sich leicht, daß $F'(x) \in L(X,Y)$:

(*) $\qquad \|F'(x)\|_{L(X,Y)} \leq 4\|x\|_{C^1[0,1]}$.

Weiters sieht man aus (*), daß $F' : X \mapsto L(X,Y)$ beschränkt ist. Gemeinsam mit der Linearität von F' folgt damit die Stetigkeit in x. Also ist $F'(x)$ auch die F-Abl. !

5.2 Mittelwertsätze (MWS)

- Wiederholung: 1. MWS der klassischen Differentialrechnung in $\mathbb{R}^1$:

  Vor.: $\varphi \in C[a,b]$; $\exists\, \varphi'(x) \;\; \forall\, x \in (a,b)$ und ist beschränkt in (a,b).

  Bh.: $\exists\, \xi \in (a,b) : \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a)$.

- Für Funktionale gilt folgende Verallgemeinerung des MWS in $\mathbb{R}^1$:

  Satz 5.5: (MWS für Funktionale)

  Vor.: X – B-Raum, $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen;
  $f : D \to Y = \mathbb{R}^1$ sei auf dem Intervall
  $[x,y] := \{z \in X : z = x + s(y-x), s \in [0,1]\} \subset D$
  G-differenzierbar.

  Bh.: Dann $\exists\, \xi \in (0,1)$:
  $$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(x+\xi(y-x))}_{\in X^* = L(X,\mathbb{R}^1)}\underbrace{(y-x)}_{\in X} = < f'(x+\xi(y-x)), y-x >_{X^*\times X}$$

Beweis: folgt sofort aus MWS in $I\!R^1$, angewandt auf die Funktion

$$\varphi(s) = f(x + s(y-x)) \in I\!R^1,\ s \in [0,1]:$$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) = f'(x + \xi(y-x))(y-x).$$

q.e.d.

- Im allgemeinen gilt nun die folgende Aussage:

Satz 5.6: (MWS für Operatoren)

Vor.: X, Y – B-Räume; $D \subset X,\ D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \to Y$ sei auf $[x,y] \subset D$ G-differenzierbar.

Bh.: Dann $\exists\ \xi \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}\|F(y) - F(x)\|_Y &\leq \|F'(x + \xi(y-x))(y-x)\|_Y \leq \\ &\leq \sup_{\xi \in (0,1)} \|F'(x + \xi(y-x))\|_{L(X,Y)} \cdot \|y - x\|_Y.\end{aligned}$$

Beweis:
Sei $y^* \in Y^*$ beliebig. Wenden Satz 5.5 auf

$$f(\cdot) := < y^*, F(\cdot) >: D \subset X \to I\!R^1$$

an. Da $f : D \subset X \mapsto I\!R^1$ offenbar auf $[x,y] \subset D$ G-differenzierbar ist, gilt: $\exists\ \xi = \xi_{y^*} \in (0,1)$:

$$< y^*, F(y) - F(x) > = < y^*, F'(x + \xi(y-x))(y-x) > .$$

Aus dem Satz über die ausreichende Anzahl linearer stetiger Funktionale (= Folgerung aus dem Satz von Hahn & Banach: siehe [5] ANALYSIS III: Pkt. 10) folgt $\exists\ \tilde{y}^* \in Y^* : \|\tilde{y}^*\|_{Y^*} = 1$ und

$$\begin{aligned}\|F(y) - F(x)\|_Y &= < \tilde{y}^*, F(y) - F(x) > = \\ &= < \tilde{y}^*, F'(x + \xi(y-x))(y-x) > \leq \underbrace{\|\tilde{y}^*\|_{Y^*}}_{=1} \|F'(x + \xi(y-x))(y-x)\|_Y.\end{aligned}$$

q.e.d.

■ Der Begriff des Bochner-Cauchy-Integrals für abstrakte Funktionen $\varphi : [a,b] \mapsto X$:

- Sei X – B-Raum, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$.
- Erklären zunächst das Integral einer Stufenfunktion:
  $[a,b] \subset I\!R^1, \quad -\infty < a < b < +\infty$
  $\varphi : [a,b] \mapsto X$ – sei Stufenfkt, d.h.
  $\exists$ Intervallunterteilung
  $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$:
  $\varphi(t) = \varphi_i = \text{const.} \in X \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \quad \forall i = \overline{0, n-2}$;
  $\varphi(t) = \varphi_{n-1} = \text{const.} \in X \quad \forall t \in [t_{n-1}, t_n]$.

  $S([a,b],X) =$ Raum aller Stufenfkt. mit $\|\varphi\|_\infty := \sup\limits_{t\in[a,b]} \|\varphi(t)\|$.

  $\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt := \sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(t_i)(t_{i+1} - t_i) \in X$.

  Dann gilt (mms):
  $\|\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt\|_X \ \leq \ \int\limits_a^b \|\varphi(t)\|_X\,dt \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$

  also: $\int\limits_a^b \in L(S([a,b],X),X)$

- Damit läßt sich $\int\limits_a^b$ eindeutig auf den Abschluß von $S([a,b],X)$ im B-Raum $B([a,b],X)$ der beschränkten Fkt. von $[a,b]$ nach X (mit $\|\cdot\|_\infty$) fortsetzen:

$$\int_a^b \in L(\overline{S([a,b],X)}^{\|\cdot\|_\infty}, X).$$

Def. 5.5.:
$\int\limits_a^b$ heißt das Bochner-Cauchy-Integral. Kurzschreibweise: $\int\limits_a^b \varphi := \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$.

Bemerkung:

1) Es gelten die üblichen Rechenregeln für Integrale auch für das Bochner-Cauchy-Integral !
2) Wegen
$$C([a,b],X) \subset \overline{S([a,b],X)} \subset B([a,b],X),$$
existiert das Bochner-Cauchy-Integral für alle stetigen Fkt. $\varphi \in C([a,b],X)$.
3) Andere Integralbegriffe im B-Raum sind
   - das Riemann-Grave-Integral (= Verallgemeinerung des Riemann-Integrals);
   - das Bochner-Integral (= Verallgemeinerung des Lebesgue-Integrals).

Existiert das Bochner-Cauchy-Integral, so existieren Riemann-Graves-Integral und Bochner-Integral, und die Integrale stimmen überein [6] !

■ Mit Hilfe des Integrals läßt sich nun ein weiterer MWS formulieren. Dazu benötigen wir noch den Begriff einer stetig diff. (F-diff.!) Fkt. (Abb., Operator):

Def. 5.6.: $C^1(D)$
X, Y – B-Räume; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen; $F : D \mapsto Y$.
Falls F in einer Umgebung $U = U(x) \subset D$ von $x \in D$ differenzierbar ist und $F' : U \mapsto L(X, Y)$ stetig im Punkt x ist, dann heißt F stetig differenzierbar an der Stelle x. Die Menge aller auf ganz D stetig differenzierbaren Fkt. wird mit $C^1(D) := C^1(D, L(X, Y))$ bezeichnet.

Satz 5.7.:

Vor.: X, Y – B-Räume; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \mapsto Y$ mit $F \in C^1(D)$.

Bh.: Dann gilt $\forall x, y \in D$ mit $[x, y] \subset D$:

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'(x + t(y - x))(y - x)\, dt.$$

Beweis:

- Wenden Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an auf die Funktion

$$C^1[0,1] \ni \varphi(t) := < y^*, F(x + t(y - x) >, \; y^* \in Y^* \text{ bel. fix.}$$

- $$\Rightarrow \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt = \int_0^1 < y^*, F'(x + t(y - x))(y - x) > \, dt$$

$$\overset{\text{mms}}{=} < y^*, \int_0^1 F'(x + t(y - x))(y - x)\, dt >$$

- $$\Rightarrow < y^*, F(y) - F(x) - \int_0^1 (F'(x + t(y - x))(y - x)\, dt >= 0 \quad \forall y^* \in Y^*$$

q.e.d.

■ Im folgenden Korollar werden die verfügbaren Abschätzungen bzw. Darstellungen für das Restglied

$$r(x, y) = F(y) - F(x) - F'(x)(y - x)$$

einer F-differenzierbaren Fkt. $F : D \mapsto Y$ zusammengefaßt:

Korollar 5.1.:

Vor.: X, Y – B-Räume; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \mapsto Y$; $x, y \in D : [x, y] \subset D$.

Bh.: Dann gilt:

1) Ist F an der Stelle x F-diff., dann folgt

$$r(x, y) = o(\|x - y\|).$$

2) Ist F in D F-diff., dann $\exists\, \xi \in (0, 1)$:

$$\|r(x, y)\| \leq \|[F'(x + \xi(y - x)) - F'(x)](y - x)\|.$$

3) Ist $F \in C^1(D)$, dann folgt

$$r(x, y) = \int_0^1 [F'(x + t(y - x)) - F'(x)](y - x)\, dt.$$

4) Falls $F \in C^{1,1}(D)$, d.h. die F–Ableitung von F ist Lipschitz–stetig in D, d.h.
$\exists\, L = \text{const.} > 0 : \|F'(y) - F'(x)\|_{L(X,Y)} \leq L\|y - x\|_X \quad \forall\, x, y \in D$,
dann gilt:

$$\|r(x, y)\| \leq L\|y - x\|^2, \text{ d.h. } r(x, y) = o(\|y - x\|^2).$$

Beweis:

1. folgt aus der Def. 5.1 der F-Differenzierbarkeit.

2. folgt aus MWS 5.6 und dessen Beweis.

3. folgt aus MWS 5.7.

4. folgt sofort aus 2. bzw. 3.

q.e.d.

5.3 Höhere Ableitungen und der Satz von Taylor

- Im weiteren: differenzierbar = F-differenzierbar
  Ableitung = F-Ableitung
  Differential = F-Differential
  (Analog: $F \to G$)

- **Def. 5.7.:**
  X, Y – B-Räume; $D \subset X$; $D \neq \emptyset$, offen; $F : D \mapsto X$.
  Ist F in einer Umgebung $U = U(x) \subset D$ von $x \in D$ differenzierbar und ist $F' : U \mapsto L(X, Y)$ an der Stelle $x \in U$ differenzierbar, so heißt F zweimal differenzierbar an der Stelle x. Die Abl. von F' an der Stelle x wird mit $F''(x)$ bezeichnet und i. S. der Def. gilt $F''(x) \in L(X, L(X, Y))$.

  Rekursiv:
  $$\begin{array}{lll} F & : D(F) \subset X & \mapsto Y \\ F' & : D(F') \subset X & \mapsto L(X,Y) \\ F'' & : D(F'') \subset X & \mapsto L(X, L(X,Y)) \\ F''' & : D(F''') \subset X & \mapsto L(X, L(X, L(X,Y))) \\ \vdots & & \\ F^{(m)} & : D(F^{(m)}) \subset X & \mapsto \underbrace{L(X, L(X(X, \ldots, L}_{m\text{-mal}}(X, \underbrace{Y) \ldots))}_{m\text{-mal}} \end{array}$$

  $\uparrow$
  Komplizierte Struktur !!

- Glücklicherweise gelingt es, diesen Raum anders darzustellen. Dazu benötigt man den Begriff eines **beschränkten multilinearen Operators.**

  Def. 5.8.: Beschränkte (= stetige) multilineare Operatoren.
  Seien X, Y B-Räume; $X^m = X \times X \times \ldots \times X$, $m \in I\!N$.

  1) Ein Operator $L : X^m \mapsto Y$ heißt multilinear, gdw. L bzgl. jedem einzelnen der m Argumente linear ist. $m = 1$: linearer Operator, $m = 2$: bilinearer Operator etc.
  2) Ein Operator $L : X^m \mapsto Y$ heißt beschränkt (*), gdw. $\exists\, c = \text{const.} \geq 0$:

  $$\|L(x_1, x_2, \ldots, x_m)\| \leq c \|x_1\| \, \|x_2\| \ldots \|x_m\| \quad \forall x_1, \ldots, x_m \in X$$

3) $L_m(X,Y)$ = Raum aller † multilinearen Operatoren $L : X^m \mapsto Y$.
Dieser Raum wird mit

$$\|L\| = \|L\|_{L_m(X,Y)} := \sup_{\substack{x_i \in X \\ i=\overline{1,m}}} \frac{\|L(x_1, x_2, \ldots, x_m)\|_Y}{\|x_1\|_X \cdot \|x_2\|_X \ldots \|x_m\|_X}$$

zu einem normierten Raum. Da $X, Y - -B$-Räume sind, ist $L_m(X,Y)$ auch B-Raum.

- Zuordnung:

$$A \in L(X, L(X, \ldots, L(X,Y)), \ldots)) \longleftrightarrow A \in L_m(X,Y)$$
$$\uparrow$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto (\ldots((Ax_1)x_2)\ldots)x_m$$

Bsp.: $m = 2$ $\quad A \in L(X, L(X,Y)) \longleftrightarrow \quad A \in L_2(X,Y)$
$A : (x_1, x_2) \in X^2 \mapsto \quad (Ax_1)x_2 \in Y$
$\in L(X,Y)$

- Resultat:

$$F^{(m)}(x) \in L(X, \ldots, L(X,Y)\ldots) \longleftrightarrow F^{(m)}(x) \in L_m(X,Y)$$

- $\boxed{\textbf{Ü 5.5}}$ Sei $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen und $F : D \mapsto Y$ an der Stelle $x \in D$ m-mal differenzierbar.
Man zeige, daß die Abl. $F^{(k)}(x), k = 1, \ldots, m$ als multilineare Operatoren in $L_k(X,Y)$ symmetrisch sind, d.h. sie sind invariant gegenüber beliebigen Permutationen der Argumente.

- Bemerkung:

$d^m F(x; h_1, \ldots, h_m) := F^{(m)}(x)(h_1, \ldots, h_m)$ heißt m-tes Differential.
Bez.: $d^m F(x; h) = d^m F(x; h, \ldots, h) = F^{(m)}(x)h^m = F^{(m)}(x)(h, \ldots, h)$.

- Verallgemeinerung der MWS 5.5 – 5.7 auf m-mal differenzierbaren Operatoren: Sätze von Taylor !

Satz 5.8.: ($\widehat{=}$ Satz 5.5, $m = 1$; Taylor)

Vor.: $X - B$-Raum; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen;
$f : D \mapsto Y = I\!R^1$ sei in D m-mal (G-)differenzierbar, $m \in I\!N$.

Bh.: Dann gibt es für alle $x, y \in D : [x,y] \subset D$ ein $\xi \in (0,1)$:
$$f(y) - \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(x)(y-x)^k = \tfrac{1}{m!} f^{(m)}(x + \xi(y-x))(y-x)^m,$$
wobei $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Beweis: folgt sofort aus klassischem Satz von Taylor in $I\!R^1$, angewandt auf die Fkt. $\varphi(s) = f(x + s(y - x)) \in I\!R^1,\ s \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad \varphi(1) - \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)(1-0)^k = \tfrac{1}{m!}\,\varphi^{(m)}(\xi)(1-0)^m$$

mit $\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x)(y-x)^k$.

q.e.d.

<u>Satz 5.9.:</u> ($\widehat{=}$ Satz 5.6, $m = 1$; Taylor)

<u>Vor.:</u> X, Y – B-Raum; $D \subset X,\ D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \mapsto Y$ sei in D m-mal (G-)differenzierbar, $m \in I\!N$.

<u>Bh.:</u> Dann gibt es für alle $x, y \in D : [x, y] \subset D$ ein $\xi \in (0,1)$:

$$\|F(y) - \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{1}{k!}F^{(k)}(x)(y-x)^k\|_Y \leq \tfrac{1}{m!}\|F^{(m)}(x + \xi(y-x))(y-x)^m\|_Y,$$

wobei $F^{(0)}(x) = F(x)$.

Beweis: Analog zu Satz 5.6 (mms)

- Wenden Satz 5.8 auf

$$f(\cdot) := < y^*, F(\cdot) >: D \subset X \to I\!R^1 \quad \forall \text{ (fix) } y^* \in Y^* \text{ an.}$$

- Satz über die ausreichende Anzahl linearer, stetiger Funktionale (Hahn-Banach !)

q.e.d.

<u>Satz 5.10.:</u> ($\widehat{=}$ Satz 5.7, $m = 1$; Taylor)

<u>Vor.:</u> X, Y – B-Räume; $D \subset X,\ D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \mapsto Y; F \in C^m(D) =$ Raum der m-mal stetig differenzierbaren Abb. $F : D \mapsto Y$.

<u>Bh.:</u> Dann gilt für alle $x, y \in D : [x, y] \subset D$:

$$F(y) - \sum_{k=0}^{m-1} \tfrac{1}{k!}F^{(k)}(x)(y-x)^k = \tfrac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}F^{(m)}(x + t(y-x))(y-x)^m\,dt.$$

Beweis: folgt aus dem entsprechenden klassischen Satz von Taylor im $I\!R^1$, angewandt auf die Fkt. (mms)

$$\varphi(t) := < y^*, F(x + t(y-x)) > \in C^m[0,1] \quad \forall \text{ (fix) } y^* \in Y^*.$$

q.e.d.

■ Führt man für eine m-mal differenzierbare Abb. $F : D \subset X \mapsto Y$ die folgende Bez.

$$r_l(x,y) = F(y) - \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x)(y-x)^k, \quad l \le m,$$

für das Restlglied der Taylor-Reihe ein, so liefern die obigen Sätze Abschätzungen bzw. Darstellungen für $r_{m-1}(x,y)$.
Man erhält aus diesen Sätzen aber auch Aussagen über $r_m(x,y)$.

<u>**Korollar 5.2:**</u> ($\widehat{=}$ Korollar 5.1; $m = 1$)

<u>Vor.:</u> X, Y – B-Räume; $D \subset X,\ D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \mapsto Y$;
$x, y \in D : [x,y] \subset D$;
$m \in I\!N$.

<u>Bh.:</u> Dann gilt:

1) Ist F an der Stelle $x \in D$ m–mal F–differenzierbar, dann gilt:

$$r_m(x,y) = o(\|y-x\|^m).$$

2) Ist F in D m-mal differenzierbar, dann $\exists\ \xi \in (0,1)$:
$\|r_m(x,y)\|_Y \le \frac{1}{m!} \| F^{(m)}(x + \xi(y-x)) - F^{(m)}(x)](y-x)^m\|_Y$

3) Ist $F \in C^m(D)$, dann folgt

$$r_m(x,y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} [F^{(m)}(x+t(y-x)) - F^{(m)}(x)](y-x)^m\, dt.$$

4) Falls $F \in C^{m,1}(D)$, d.h. die m-te F–Ableitung von F ist Lipschitz–stetig in D, d.h. $\exists\ L = \text{const.} > 0$:
$\|F^{(m)}(y) - F^{(m)}(x)\|_{L_m(X,Y)} \le L\|y-x\|_X\ \ \forall\, x, y \in D$, dann gilt:

$$\|r_m(x,y)\|_Y \le \frac{L}{m!}\, \|y-x\|_X^{m+1}.$$

Beweis: folgt sofort aus der Def. 5.7 (1.), aus Satz 5.9 (2.) und aus Satz 5.10 (3.):

$r_m(x,y) = [F(y) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}F^{(k)}(x)(y-x)^k] - \frac{1}{m!}F^{(m)}(x)(y-x)^m$

z.B. 2.) $\quad y^* \in Y^*$

Bew. Satz 5.9

$$\begin{aligned} < y^*, r_m(x,y) > \quad &:= \quad < y^*, [\ \ ] > - < y^*, \tfrac{1}{m!}F^{(m)}(x)(y-x)^m > = \\ &= \quad < y^*, \tfrac{1}{m!}F^{(m)}(x+\xi(y-x))(y-x)^m > - \\ &\quad - < y^*, \tfrac{1}{m!}F^{(m)}(x)(y-x)^m > \end{aligned}$$

Hahn-Banach $\quad \tilde{y}^* \in Y^* : \|\tilde{y}^*\| = 1$, $\quad < y^*, r_m > = \|r_m\|$

Die Aussage 4. folgt sofort aus 2. bzw. 3.

q.e.d.

- Übungen zu höheren Abl.:

$\boxed{\textbf{Ü 5.6}}$ Man beweise die folgenden Aussagen:

Vor.: $f : U(x) \subset X = \mathbb{R}^n \to Y = \mathbb{R}^1$ (Fkt. n veränderl.)
f besitze in $U(x)$ stetige partielle Abl. bis zur Ordnung m,
d.h. $f \in C^m(U(x))$.

Bh.: 1) $\exists\, d^k f(x; h_1, \ldots, h_k) \quad \forall\, k = 1, \ldots, m$, wobei

- $$\begin{aligned} df(x;h_1) &= f'(x)h_1 = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right] h_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_1^{(i)} \quad \forall h_1 = (h_1^{(1)}, \ldots, h_1^{(n)})^T \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$
  $$f'(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right] \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$$

- $$\begin{aligned} d^2 f(x; h_1, h_2) &= f''(x)h_1 h_2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} h_1^{(i)} h_2^{(j)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \left(\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1,n} h_1, h_2 \right) \\ &\forall h_1 = (h_1^{(1)}, \ldots, h_1^{(n)})^T, \\ &\ \ h^2 = (h_2^{(1)}, \ldots, h_2^{(n)})^T \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=\overline{1,n}} \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)) \cong \\ &\cong L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1) \end{aligned}$$

- $d^k f(x;h) = d^k f(x; h, \ldots, h) = \sum\limits_{|\alpha|=k} h^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha}$,
  d.h. $f^{(k)}(x) = \left[\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha}\right]_{|\alpha|=k} \in L_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$

2) $f(y) = f(x) + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum\limits_{|\alpha|=k} \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha}(y-x)^\alpha +$
$+ \frac{1}{m!} \sum\limits_{|\alpha|=m} \frac{\partial^{|\alpha|} f(x+\xi(y-x))}{\partial x^\alpha}(y-x)^\alpha$
mit $\xi \in (0,1), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), |\alpha| = \sum \alpha_i, \alpha_i \in \mathbb{N}_0,$
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}.$

Ü 5.7 Man beweise die folgenden Aussagen:

Vor.: $k(x,y) : [a,b] \times [a,b] \ \to \mathbb{R}^1$ – stetig; $-\infty < a < b < +\infty$
$g(x,y) : [a,b] \times [-c,c] \to \mathbb{R}^1$ – stetig; $c > 0 : (t,y) \mapsto g(t,y)$:
$\exists\, g_y := \frac{\partial g}{\partial y}, \ \ g_{yy} := \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} : [a,b] \times [-c,c] \to \mathbb{R}^1$ – stetig

$F \colon U(0;c) \subset X = C[a,b] \mapsto Y = C[a,b]$:
$F(x)(s) := \int\limits_a^b k(s,t) g(t, x(t)) dt$

$U(0;c) := \{x \in C(a,b) : \|x\| := \|x\|_{C[a,b]} < c\}.$

Bh.: 1) $F : U(0;c) \subset C[a,b] \mapsto C[a,b]$ stetig !

2) Auf $U(0;c)$ existieren die F-Abl. F' und F'' und sind stetig, d.h. $F \in C^2(U(0;c))$.

3) F' und F'' haben die Darstellungen:
$(F'(x)h)(s) := dF(x;h) = \int\limits_a^b K(s,t) g_y(t,x(t)) h(t)\, dt,$
d.h. $F'(x) \in L(X,Y)$
$(F''(x)h_1h_2)(s) := d^2F(x;h_1,h_2) =$
$= \int\limits_a^b k(s,t) g_{yy}(t,x(t)) h_1(t) h_2(t)\, dt.$
d.h. $F''(x) \in L_2\,(X,Y) = L\,(X, L\,(X,Y)).$

6 Lösungsverfahren für nichtlineare Operatorglei– chungen

■ <u>Formen nichtlinearer Gleichungen:</u>

$X, Y, Z - B$-Räume, $D \subset X,\ D \neq \emptyset$, offen,
$G : D \subset X \mapsto X$,
$F : D \subset X \mapsto Y$.

- <u>Fixpunktform:</u> Ges. $x \in X$: $x = G(x)$ in X. (1)

$$F = I - G \quad \downarrow \quad \uparrow \quad G = I - HF \text{ z.B. mit}$$
$$Y = X \qquad\qquad H \in L(Y, X) \text{ bijektiv}$$

- <u>Nullpunktform:</u> Ges. $x \in X$: $F(x) = 0$ in Y. (2)

- <u>Datenform:</u>

  a) explizit: Ges. $x \in X$: $F(x) = y$ mit geg. $y \in Y$, (3)
  wobei $F : D \mapsto Y,\ D \subset X,\ D \neq \emptyset$, offen.

  b) implizit: Ges. $x = x(y) \in X$: $F(x, y) = 0$ in Z, (4)
  wobei $F : D \subset X \times Y \mapsto Z$,
  $x(\cdot) : Y \to X$.

■ <u>Zum Begriff der „Korrektgestelltheit“ für nichtlineare Operatorgleichungen:</u>

<u>Kern:</u> Stetige Abhängigkeit der Lösung $x = x(y)$ von den Daten y !

$\Rightarrow$ für (3) $F(x) = y$ heißt dies, daß $F : D \mapsto Y$ (meist $D = X$) ein <u>Homöomorphismus</u> ($F : D \mapsto Y$ eindeutig auf, d.h. bijektiv und $F : D \mapsto Y$, $F^{-1} : Y \mapsto D$ <u>stetig</u>) ist.

! Diese <u>globale</u> Forderung ist im Nichtlinearen meist zu stark.

$\Rightarrow$ Lokalisierung dieser Forderung für (3) Def. 6.1 und (4) Def. 6.2: $\to$ „lokal korrekt gestellt“!

<u>**Def. 6.1:**</u> (lokaler Homöomorphismus $\leftrightarrow$ (3) $F(x) = y$)
Der Operator $F : D \mapsto Y$, mit $D \subset X,\ D \neq \emptyset$ und offen, heißt <u>lokaler Homöomorphismus</u> an der Stelle $x \in D$, gdw. $\exists$ offene Umgebungen $U = U(x)$ von x und $V = U(F(x))$ von $F(x)$; sodaß $F : U \mapsto V$ ein Homöomorphismus ist.

Def. 6.2: ($\leftrightarrow$ (4) $F(x,y)=0$)
Sei $F : D \subset X \times Y \mapsto Z,\ \ D \neq \emptyset$, offen, und $(x_0, y_0) \in D : F(x_0, y_0) = 0$. Die Gleichung

$$(4) \qquad F(x,y) = 0$$

heißt an der Stelle (x_0, y_0) lokal eindeutig und stetig nach x auflösbar, gdw. $\exists$ offene Umgebungen $U = U(x_0)$ und $V = U(y_0)$, sodaß $\forall y \in V\ \exists!$ Lsg. $x = H(y) \in U$: (4) $F(H(y), y) = 0$ und die Abb. $H : V \mapsto U \subset X$ stetig ist.
Wir schreiben der Einfachheit halber (wie oben): $x = x(y)$!

Bemerkung:
Aus all diesen Begriffen von Korrektgestelltheit folgt stets die Isoliertheit einer Lösung, d.h. keine Verzweigungen !

6.1 Kontraktivität und Korrektgestelltheit

- Im Mittelpunkt steht natürlich der Banachsche Fixpunktsatz !

Satz 6.1: (Banachscher Fixpunktsatz)

Vor.:
- X – Banach Raum, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X,\ D \subset X,\ D \neq \emptyset$, offen;
- $G : D \mapsto X$;
- $D_0 = \overline{D}_0 \subset D$ – abgeschlossen, nichtleer;
- G sei auf D_0 kontraktiv, d.h. $\exists\ q = \text{const.}: 0 \leq q < 1$:

$$\|G(y) - G(x)\| \leq q\,\|y - x\| \quad \forall x, y \in D_0;$$

- $G(D_0) \subset D_0$ – Abb. von D_0 in sich.

Bh.: Dann gelten folgende Aussagen:

1. $\exists!$ Lösung $x_* \in D_0$ der Gleichung

$$(1) \qquad x = G(x)$$

in D_0.

2. Die durch <u>sukzessive Approximation</u>

(2) $$x_{n+1} = G(x_n)$$

erzeugte Folge $\{x_n\}$ konvergiert für bel. Startwerte $x_0 \in D_0$ gegen die Lösung $x_* \in D_0$ der Gleichung (1).

3. Es gelten die folgenden Konvergenzabschätzungen:

a) $\|x_* - x_n\| \leq q^n \|x_* - x_0\|$,

b) $\|x_* - x_n\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|$,

c) $\|x_* - x_n\| \leq \frac{q}{1-q} \|x_n - x_{n-1}\|$.

<u>**Beweis:**</u>

1) Zeigen zunächst, daß $\{x_n = G(x_{n-1}),\ x_0 \in D_0\}_{n=1,2,\dots}$ Cauchy-Folge ist:

- $$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \|G(x_k) - G(x_{k-1})\| \leq q\|x_k - x_{k-1}\| \leq \ldots \leq \\ &\leq q^k \|u_1 - u_0\| \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \|x_{\underbrace{n+m}_{=\bar{n}>n}} - x_n\| &= \|(x_{n+m} - x_{n+m-1}) &+& (x_{n+m-1} - x_{n+m-2}) + \ldots \\ && \ldots +& (x_{n+1} - x_n)\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| &\leq& \sum_{i=1}^{m} q^{n+i-1}\|x_1 - x_0\| = \\ &= q^n \sum_{i=1}^{m} q^{i-1}\|x_1 - x_0\| &\leq& \\ &\leq q^n \sum_{j=0}^{\infty} q^j \|x_1 - x_0\| &=& \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\| \xrightarrow[\bar{n}=n+m\to\infty]{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

<u>Resultat:</u> $\{x_n\}$ ist Cauchy-Folge im B-Raum X !
$\Rightarrow \exists!\ x_* \in X : x_n \to x_*$ in X. #

2) <u>Zeigen:</u> x_* ist Lösung von (1) $x = G(x)$:

- $$D_0 = \underset{\substack{\uparrow \\ x_0 \in D_0,\ x_{n+1} = G(x_n)}}{\bar{D}_0} \supset \{x_n\} \Rightarrow x_* \in D_0$$

- $$\begin{aligned} \|x_* - G(x_*)\| &\leq \|x_* - x_n\| + \|x_n - G(x_*)\| = \\ &= \|x_* - x_n\| + \|G(x_{n-1}) - G(x_*)\| \leq \\ &\leq \underset{\longrightarrow 0}{\|x_* - x_n\|} + q\underset{\longrightarrow 0}{\|x_{n-1} - x_*\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

d.h. $\|x_* - G(x_*)\| = 0$, gdw. $x_* = G(x_*)$. #

3) <u>Zeigen:</u> Eindeutigkeit (indirekt)

Ann.: $\exists\ y_* \in D_0 : y_* \neq x_*$ und $y_* = G(y_*)$

$\curvearrowright\ \|y_* - x_*\| = \|G(y_*) - G(x_*)\| \leq q\|y_* - x_*\|$, d.h.

$\underbrace{(1-q)}_{>0}\|y_* - x_*\| \leq 0 \Leftrightarrow \|y_* - x_*\| = 0 \Leftrightarrow y_* = x_* \quad \lightning \quad \#$

4) <u>Zeigen:</u> Konvergenzabschätzungen

(a) $\|x_* - x_n\| = \|G(x_*) - G(x_{n-1})\| \leq q\|x_* - x_{n-1}\| \leq \ldots \leq q^n\|x_* - x_0\| \qquad \#$

(b) $\|x_* - x_0\| \leq \|x_* - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq q\|x_* - x_0\| + \|x_1 - x_0\|$

$\Rightarrow (1-q)\|x_* - x_0\| \leq \|x_1 - x_0\|$

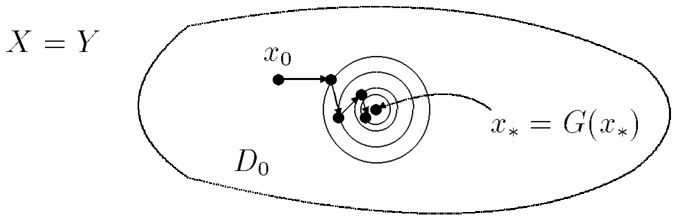
$\Rightarrow \|x_* - x_0\| \leq \frac{1}{1-q}\|x_1 - x_0\| \qquad \#$

(c) Analog:
$$\begin{array}{rcl} \|x_* - x_{n-1}\| & \leq & \|x_* - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| \\ & \leq & q\|x_* - x_{n-1}\| + \|x_n - x_{n-1}\| \\ \Rightarrow \quad \|x_* - x_{n-1}\| & \leq & (1-q)^{-1}\|x_n - x_{n-1}\| \qquad \# \end{array}$$

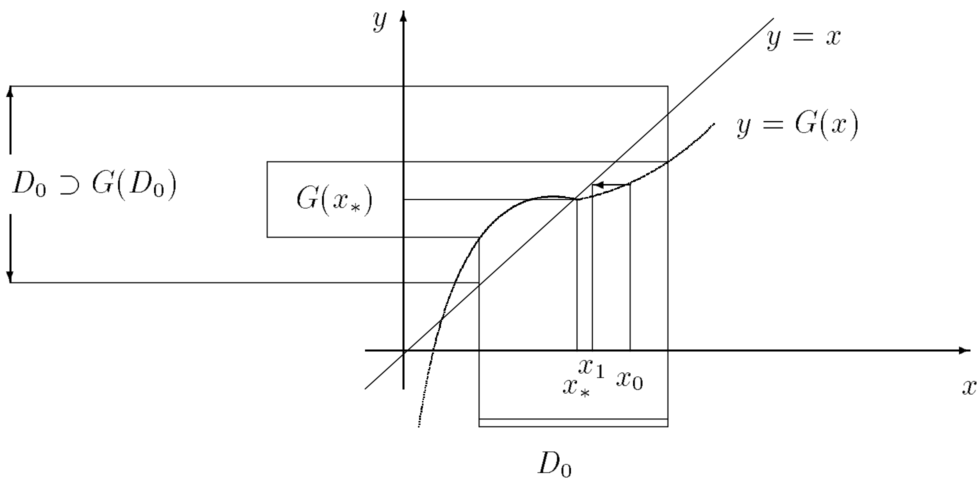
q.e.d.

- <u>Geometrische Veranschaulichung:</u>

1) Allgemein:



2) $G : X = I\!R^1 \mapsto I\!R^1$:



■ $\boxed{\textbf{Ü 6.1}}$ Man zeige, daß für die Hammersteinsche Integralgleichung

Ges. $x \in X = C[0,1] : x(s) = G(x(s))$ in X

mit $G(x(s)) := \int\limits_0^1 (k(s,t)g(x(t))\,dt + f(s)$

für gegebenes $f \in X = C[0,1]$ und unter den Bedingungen

(i) $k \in C([0,1] \times [0,1])$ und $\max\limits_{0 \leq s,t \leq 1} |k(s,t)| = c$

(ii) $g \in C^{0,1}(I\!R^1)$, d.h. $|g(x_1) - g(x_2) \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I\!R^1$

(iii) $q := c \cdot L < 1$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes 6.1 mit $D_0 = X$ erfüllt sind !

■ Bedeutung des Fixpunktsatzes von Banach:

1) Wichtiges Kriterium für die Korrektgestelltheit eines Problems
$\rightarrow$ Korollar 6.1 !

2) Wichtiges beweistechnisches Hilfsmittel !

3) Liefert allgem. Aussagen über die Konvergenz von Iterationsverfahren !

■ Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sind unmittelbarer Inhalt des Banachschen Fixpunktsatzes: $\exists\,!$, Iterationsverfahren (IV).
Zum Nachweis der Korrektgestelltheit fehlt noch „Stetigkeit":

Korollar 6.1: (Korrektgestellheit von $F(x) := x - G(x) = y$)

Vor.: X – B-Raum, $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen; $G : D \mapsto X$;
$D_0 \subset D$, $D_0 \neq \emptyset$, offen;
$x_* \in D_0$ sei Fixpkt. von G, d.h. $x_* = G(x_*)$; d.h. $F(x_*) = 0$;
G sei auf $\bar{D}_0$ kontraktiv ($\|G(x) - G(x')\| \leq q\|x - x'\|$ mit $0 \leq q < 1$
und $G(\bar{D}_0) \subset \bar{D}_0$.

Bh.: Dann ist $F = I - G$ ein lokaler Homöomorphismus an der Stelle x_*.
Gilt zusätzlich $D_0 = D = X$, dann ist F ein Homöomorphismus.

Beweis: $F(x) = x - G(x) = y \Leftrightarrow x = \tilde{G}(x) := G(x) + y$

- Sei $U(x_*) := K(x_*, \delta) \subset D_0$.

  Dann gilt für alle $y \in U(\underbrace{F(x_*)}_{=0}) := K(0, (1-q)\delta)$:

  a) $\|\tilde{G}(x) - \tilde{G}(x')\| = \|G(x) - G(x')\| \le q\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in \bar{K}(x_*, \delta) \subset \bar{D}_0$ #

  b) $\tilde{G}(\bar{K}(x_*, \delta)) \subset \bar{K}(x_*, \delta) \quad \forall y \in K(0, (1-q)\delta)$

  Sei $x \in \bar{K}(x_*, \delta)$ bel.

  $$\begin{aligned} \|\tilde{G}(x) - x_*\| &= \|G(x) + y - x_*\| = \|G(x) - G(x_*) + y\| \le \\ &\le q\|x - x_*\| + \|y\| \le q \cdot \delta + (1-q)\delta = \delta \end{aligned}$$

  #

  Satz 6.1: $F : U = U(x_*) = K(x_*, \delta) \mapsto U(0 \equiv F(x_*)) = K(0, (1-q)\delta) = V$ <u>bijektiv</u>, stetig (trivial, da G kontr.)

- Die Stetigkeit der lokalen inversen Abb. $F^{-1} : V \mapsto U$ folgt aus:
  $\|F(\tilde{x}) - F(x)\| = \|\tilde{x} - x - G(\tilde{x}) + G(x)\| \ge \|\tilde{x} - x\| - q\|\tilde{x} - x\| = (1-q)\|\tilde{x} - x\|$
  $\forall\, \tilde{x}, x \in U = K(x_*, \delta)$ (sogar $\in D$),
  d.h. $\|F^{-1}(\tilde{y}) - F^{-1}(y)\| \le \frac{1}{1-q}\|\tilde{y} - y\|$. #

- Im Falle $D_0 = X$, gelten diese Aussagen $\forall y \in X$. **q.e.d.**

■ Die Korrektgestelltheit eines Problemes der Form

(3) $\qquad F(x, y) = 0$

basiert auf dem <u>Satz über implizite Funktionen:</u>

<u>Satz 6.2:</u> (Satz über implizite Funktionen)

<u>Vor.:</u> X, Y, Z – B-Räume; $D \subset X \times Y$, $D \ne \emptyset$, offen;
$F = F(\cdot, \cdot) : D \subset X \times Y \mapsto Z$:

- stetig in D,
- $(x_0, y_0) \in D : F(x_0, y_0) = 0$,
- $F(\cdot, \cdot)$ sei an der Stelle (x_0, y_0) stetig (bzgl. x und y !), partiell F-differenzierbar nach x und $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \in L(X, Z)$ sei regulär, d.h. $\exists \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^{-1} \in L(Z, X)$.

Bh.: 1) Dann ist die Gleichung

$$(3) \qquad F(x,y) = 0$$

im Pkt. (x_0, y_0) lokal eindeutig und stetig nach x auflösbar, und $x = x(y)$ ist demzufolge in einer Umgebung $U(y_0)$ stetig (vgl. Def. 6.2).

2) Ist zusätzlich F im Pkt. (x_0, y_0) partiell F-differenzierbar nach y, so ist auch $x(y)$ im Pkt. y_0 F-differenzierbar, und es gilt

$$(4) \qquad x'(y_0) = \underbrace{-\underbrace{\left[\tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^{-1}}_{\in L(Z,X)} \underbrace{\tfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\in L(Y,Z)}}_{\in L(Y,X)}.$$

Beweis.

zu 1. lokale Auflösbarkeit nach $x = x(y)$:

- Die Gleichung

$$(5) \qquad F(x,y) = F(x_0, y) + \tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + r(x,y) \in Z$$

dient als Def. des Restgliedes $r(x,y)$.

- Mit der Abkürzung

$$A_1(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \in L(X,Z)$$

läßt sich die Gleichung

$$(3) \qquad F(x,y) = 0$$

dann auch folgendermaßen formulieren

$$(3) \qquad F(x_0, y) + A_1(x_0, y_0)(x - x_0) + r(x,y) = 0$$

und äquivalent dazu als Fixpunktgleichung in X:

$$(3) \qquad x = G(x,y), \quad \text{mit}$$

$$(6) \qquad G(x,y) = x_0 - A_1^{-1}(x_0, y_0)(F(x_0, y) + r(x,y)) : D \subset X \times Y \mapsto X.$$

- Im folgenden werden nun Kugeln $K(x_0; \delta_1) \subset X$ und $K(y_0, \delta_2) \subset Y$ konstruiert, sodaß $\forall y \in \bar{K}(y_0, \delta_2)$ die Vor. des Banchschen Fixpunktsatzes 6.1 für
  - $G(\cdot, y)$
  - $D_0 = \bar{K}(x_0, \delta_1)$

erfüllt sind, d.h.

a) Kontraktivität und
b) „in-sich-Abb.".

a) Es gilt wegen $G(\bar{x}, y) - G(x, y) = A_1^{-1}(x_0, y_0)(r(x, y) - r(\bar{x}, y))$
$\|G(\bar{x}, y) - G(x, y)\|_X \leq \|A_1^{-1}(x_0, y_0)\|_{L(Z,X)}\|r(\bar{x}, y) - r(x, y)\|_Z$

Aus

$$(*) \qquad r(\bar{x}, y) - r(x, y) = F(\bar{x}, y) - F(x, y) - A_1(x_0, y_0)(\bar{x} - x)$$

und Bew. von MWS 5.6 (bzw. Korollar 5.1) folgt

$$(*) \qquad \|r(\bar{x}, y) - r(x, y)\| \leq \|A_1(x + \xi(\bar{x} - x), y) - A_1(x_0, y_0)\|\|\bar{x} - x\|$$

für ein $\xi \in (0, 1)$ und für $x, \bar{x}$ hinreichend nahe an x_0 bzw. y hinreichend nahe an y_0.

Für (vorerst) bel. $\epsilon_1 > 0$ wählen $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0$:

$$(7) \qquad \|A_1(x, y) - A_1(x_0, y_0)\| \leq \epsilon_1 \quad \forall x \in \bar{K}(x_0, \delta_1) \quad \forall y \in \bar{K}(y_0, \delta_2).$$

Dies ist möglich, da $A_1(\cdot, \cdot) = \frac{\partial F(\cdot,\cdot)}{\partial x}$ in (x_0, y_0) stetig ist. Dann erhält man $\forall x, \bar{x} \in \bar{K}(x_0, \delta_1)$ und $\forall y \in \bar{K}(y_0, \delta_2)$ die gewünschte Abschätzung:

$$\begin{aligned}(8) \quad \|G(\bar{x}, y) - G(x, y)\| &\leq \underbrace{\|A_1^{-1}(x_0, y_0)\|}_{=\beta} \|A_1(\underbrace{x + \xi(\bar{x} - x)}_{= x_\xi}, y) - \\ &\qquad - A_1(x_0, y_0)\|\|\bar{x} - x\| \\ &\leq \beta\epsilon_1\|\bar{x} - x\|,\end{aligned}$$

mit $\beta = \|A_1^{-1}(x_0, y_0)\|$, d.h. für $\beta\epsilon_1 < 1$ ist $G(\cdot, y)$ auf $\bar{K}(x_0, \delta_1)$ kontraktiv $\forall y \in \bar{K}(y_0, \delta_2)$.

b) $G(\cdot, y)D_0 \subset D_0 = \bar{K}(x_0, \delta_1)$ gleichmäßig $\forall y \in \bar{K}(y_0, \delta_2)$.

Tatsächlich, $\forall x \in \bar{K}(x_0, \delta_1)$ und $\forall y \in \bar{K}(y_0, \delta_2)$

$$\|G(x, y) - x_0\|_X \leq \underbrace{\|G(x, y) - G(x_0, y)\|}_{\text{(i)}} + \underbrace{\|G(x_0, y) - x_0\|}_{\text{(ii)}}$$

(i) $\|G(x, y) - G(x_0, y)\| \overset{(8)}{\leq} 2\beta\epsilon_1\|x - x_0\| = 2\beta\epsilon_1\delta_1$

$$\text{(ii)}\quad \|G(x_0,y)-x_0\| \overset{(6)}{=} \|-A_1^{-1}(x_0,y_0)(\underbrace{F(x_0,y)-r(x_0,y)}_{\substack{\| \ (5) \\ 0}})\|$$
$$\le \underbrace{\|A_1^{-1}(x_0,y_0)\|}_{=:\,\beta}\|F(x_0,y)\| = \beta\,\|F(x_0,y)\|$$

Für (vorerst) bel. $\epsilon_2 > 0$ wählen wir $\delta_2 > 0$ so klein, daß zusätzlich zu (7) auch

$$\|F(x_0,y)\| = \|F(x_0,y) - \underbrace{F(x_0,y_0)}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{stetig !}}}\| \le \epsilon_2 \quad \forall y \in \bar{K}(y_0,\delta_2)$$

gilt. Dann folgt:

$\|G(x_0,y)-x_0\| \le \beta\epsilon_2$

<u>Resultat:</u> (i) + (ii)

$\|G(x,y)-x_0\|_X \le \beta(2\delta_1\epsilon_1+\epsilon_2)$,

d.h. $G(\cdot,y)$ bildet $\bar{K}(x_0,\delta_1)$ in sich ab, falls $\beta(2\delta_1\epsilon_1+\epsilon_2) \le \delta_1$.

<u>Resultat a) + b)</u>

- Wählen nun $\epsilon_1 > 0$: $\quad 2\epsilon_1\beta < 1 \quad$ ($\curvearrowright$ δ_1 fix ($\exists$))
- und anschließend $\epsilon_2 > 0$: $\quad \beta(2\delta_1\epsilon_1+\epsilon_2) = \delta_1 \quad$ ($\curvearrowright$ δ_2 fix ($\exists$))

  d.h.

  $$\epsilon_2 = \frac{\delta_1}{\beta} - 2\delta_1\epsilon_1 = \frac{\delta_1}{\beta}(1-2\epsilon_1\beta) > 0$$

d.h. für die gewählten ϵ_1, ϵ_2($\curvearrowright$ δ_1,δ_2) gilt:

a) $G(\cdot,y)$ ist in $D_0 = \bar{K}(x_0,\delta_1)$ kontraktiv $\forall y \in \bar{K}(y_0,\delta_2)$

b) $G(D_0,y) \subset D_0 \quad \forall y \in \bar{K}(y_0,\delta_2)$.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz 6.1

$$\exists!\, x(y) \in \bar{K}(x_0,\delta_1) \subset X : x(y) = G(x(y),y) \quad \forall y \in \bar{K}(y_0,\delta_2)$$

$$x_0 = x(y_0)$$

d.h. $\quad x = G(x,y) \Leftrightarrow F(x,y) = 0$ ist im Pkt. (x_0,y_0) eindeutig lokal auflösbar nach x, d.h. $x = x(y)$ in $U(y_0) = \bar{K}(y_0,\delta_2)$ und $x_0 = x(y_0)$.

- $x = x(y)$ ist in $U(y_0) := K(y_0,\delta_2)$ und sogar in $\bar{K}(y_0,\delta_2)$ stetig.
  Tatsächlich, seien $y, \bar{y} \in \bar{K}(y_0,\delta_2)$ bel. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x(\bar y)-x(y)\| &= \|G(x(\bar y),\bar y)-G(x(y),y)\| \le \\
&\le \|G(x(\bar y),\bar y)-G(x(y),\bar y)\| + \|G(x(y),\bar y)-G(x(y),y)\| \\
&\overset{(8)}{\le} \underbrace{2\beta\epsilon_1}_{<1}\|x(\bar y)-x(y)\| + \|G(x(y),\bar y)-G(x(y),y)\|,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\|x(\bar y)-x(y)\| \le \frac{1}{1-2\beta\epsilon_1}\|G(x(y),\bar y)-G(x(y),y)\|.$$

Wegen der Stetigkeit von $G(x,\cdot)$ bzgl. y (vgl. (6) !) folgt dann die Stetigkeit von $x(y)$. #

zu 2.: F-Differenzierbarkeit von $x(y)$ in y_0 und $x'(y_0) = -\left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\right]^{-1}\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}$.

- Formale Herleitung von $x'(y_0)$ (vgl. $\boxed{\text{Ü 5.2}}$, Def. 5.4 und Satz 5.3):

  $\varphi(y) := F(x(y),y) \equiv 0 \quad \forall y \in U(y_0)$

  $\Rightarrow 0 = \varphi'(y_0) = \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}x'(y_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}$, d.h.

  $$\boxed{x'(y_0) = -\left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\right]^{-1}\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \in L(Y,X)} \quad ?$$

- Zeigen, daß $x'(y_0)$ gemäß Def. 5.1 F-Abl. der Abb. $x(y)$ an der Stelle y_0 ist, d.h. wir zeigen, daß gilt

  $$\|x(y)-x(y_0)-x'(y_0)(y-y_0)\| = o(\|y-y_0\|).$$

  Tatsächlich, aus

  $x(y) = G(x(y),y) = x_0 - \left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\right]^{-1}(F(x_0,y)+r(x(y),y)),\ y \in U(y_0)$

  folgt für alle $y \in U(y_0)$ die Darstellung

  $x(y) - \underset{\displaystyle x_0}{\underset{\shortparallel}{x(y_0)}} - x'(y_0)(y-y) =$

  $$= -\left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\right]^{-1}\left[\underbrace{F(x_0,y)-F(x_0,y_0)-\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}_{\substack{o(\|y-y_0\|),\ \text{da } \exists\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \\ y\to y_0}} + \underbrace{r(x(y),y)}_{?}\right]$$

Verbleibt zu zeigen, daß $\underline{\underline{r(x(y),y) = o(\|y-y_0\|),\ y \to y_0}}$:

a) $r(x(y),y) = o(\|x(y) - \overset{\overset{x_0}{\|}}{x(y_0)}\|)$ $\underline{\underline{\text{für } y \to y_0}}$:

$$\|r(x(y),y) - r(\overset{\overset{x(y_0)}{\|}}{x_0},y)\| \le \|A_1(x(y)+\xi(x(y)-x_0)),y) - A_1(x_0,y_0)\| \times$$
$$\|x(y)-x_0\|,$$

with $r(x_0,y) \overset{}{=} 0$ (the term $r(x_0,y)$ carries $\underset{0}{\|}$ below it),

$r(x_0,y) = F(x_0,y) - F(x_0,y) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x_0 - x_0) = 0.$

Wegen $A_1(x,y) := \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ stetig in (x_0,y_0) und $x(y)$ stetig in y_0:

$\forall \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \|A_1(x(y)+\xi(x(y)-x_0)),y) - A_1(x_0,y_0)\| \le \epsilon,$
falls $\|y-y_0\| \le \delta,$

d.h. $\|r(x(y),y)\| \le \epsilon\|x(y)-x_0\| \quad \forall \|y-y_0\| \le \delta,$

d.h. $\|r(x(y),y)\| \le o(\|x(y)-x_0\|).$

b) $\|x(y)-x(y_0)\| = O(\|y-y_0\|)$ für $y \to y_0$:

$$x(y) = G(x(y),y) = x(y_0) - \left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\right]^{-1}(F(x_0,y) + r(x(y),y))$$

$$\|x(y)-x(y_0)\| = \| - [\qquad]^{-1}(F(x_0,y) - F(\overset{\overset{0}{\|}}{x_0},y_0) + r(x(y),y))\|$$

$$\le \left\|\underset{\dagger}{\left[\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\right]^{-1}}\right\| \left\{ \| \underbrace{F(x_0,y)-F(x_0,y_0)}_{\begin{gathered}\| \\ \underbrace{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+o(\|y-y_0\|)}_{O(\|y-y_0\|)}\end{gathered}} \| + \underset{\overset{\text{a)}\ \|}{o(\|x(y)-x(y_0)\|)}}{\|r(x(y),y)\|} \right\}$$

d.h. $\|x(y)-x(y_0)\| = O(\|y-y_0\|).$

Resultat:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & r(x(y),y) = o(\|x(y)-x(y_0)\|) \\ \text{b)} & \|x(y)-x(y_0)\| = O(\|y-y_0\|) \end{array}\right\} \Rightarrow r(x(y),y) = o(\|y-y_0\|).$$

q.e.d.

- Bemerkung:
  Zusätzlich zu den Vor. des Satzes 6.2 sei $F(\cdot,\cdot)$ m-mal stetig F-diff. in $U(x_0,y_0)$. Dann ist $x(\cdot)$ auch m-mal stetig F-diff. in $U(y_0)$.

- Wendet man den Satz über implizite Funktionen auf das Problem

$$F(x) = y, \text{ d.h. } F(x) - y = 0 \text{ in } Z = Y,$$

an, so erhält man sofort den Satz über inverse Funktionen:

Satz 6.3: (Satz über inverse Funktionen)

Vor.: X, Y – B-Raum; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \mapsto Y$ stetig in D, und im Pkt. $x_0 \in D$ stetig F-differenzierbar;
$F'(x_0) \in L(X,Y)$ regulär, d.h. $\exists\ (F'(x_0))^{-1} \in L(Y,X)$.

Bh.: Dann gilt:

1) F ist an der Stelle x_0 ein lokaler Homöomorphismus.

2) Die Umkehrabb. F^{-1} ist an der Stelle $y_0 = F(x_0) \in Y$ F-differenzierbar, und es gilt:

$$(F^{-1})'(\underset{\underset{\displaystyle y_0}{\|}}{F(x_0)}) = [F'(x_0)]^{-1} \in L(Y,X).$$
$$-[\qquad]^{-1}(-I)$$

Beweis: unter Benutzung des Satzes 6.3 über impl. Fkt. !
Tatsächlich, $(F \to \Phi)$

$$\Phi(x,y) = F(x) - y$$

erfüllt die Vor. von Satz 6.2 (mms). Folglich gilt:

1) $x = x(y) := F^{-1}(y) : U(y_0) \mapsto U(x_0)$ lokaler Homöomorphismus. #

$$\begin{aligned} 2)\quad x'(y_0) &= (F^{-1})'(\overset{\overset{\displaystyle F(x_0)}{\|}}{y_0}) = -\left(\tfrac{\partial\Phi(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^{-1} \tfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &= -[F'(x_0)]^{-1}\cdot(-I) = [F'(x_0)]^{-1} \in L(Y,X). \end{aligned}$$

q.e.d.

6.2 Newton-Verfahren und Varianten

■ Seien X, Y – B-Räume und $F: X \to Y$ eine i. allgem. nichtlineare Abb. aus X in Y. Zur Lösung von

(1) $\boxed{F(x) = 0}$ bzw. $F(x) = y$ in Y

betrachten wir Iterationsverfahren (IV) in der Form

(2) $C_k \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_k} + F(x_k) = 0,$ bzw. $= y$ in Y
$k = 0, 1, \ldots;\ x_0 \in X$ geg.

(3)
- Wähle Startlsg. $x_0 \in X$.
- $k = 0, 1, \ldots$
  $d_k = -F(x_k)$ bzw. $= y - F(x_k)$;
  Bestimme C_k sowie τ_k, und löse
  $C_k w_k = d_k \quad [w_k := C_k^{-1} d_k]$; Vorkonditionierungsgleichung !
  $x_{k+1} = x_k + \tau_k w_k$.

wobei $C_k \in L(X, Y)$ Vorkonditionierungsoperator (preconditioner) genannt wird und als regulär vorausgesetzt wird.

Beispiele:

1) $C_k = C$; $\tau_k = \tau$: stationäres IV:
$\to$ siehe $\boxed{\text{Ü XII}}$ Konvergenztheorie für[1mm]

- stark monotone: $< F(x) - F(y), x - y > \geq \ \mu_1 \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in X,$
- Lipschitz-stetige: $\|F(x) - F(y)\| \leq \mu_2 \|x - y\| \quad \forall x, y \in X.$

Abb. $F: X \mapsto Y = X^*$: Bei geeigneter Wahl von C und τ global konvergent mit der q-Ordnung 1, d.h. $\exists\ q = q(\tau) \in [0, 1)$:
$\|x_{k+1} - x_*\| \leq q \|x_k - x_*\| \quad \forall k \geq 0$, wobei $x_* \in X$ eindeut. Lsg. von (1).

2) $C_k = C = F'(x_0)$: Modifiziertes Newton-Verfahren
= Spezialfall von 1.: $\Rightarrow$ lineare Konvergenz !

$\vdots$

- Rang 1-Verfahren von Broyden in $X = Y = \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \tau_k = \tau &= 1, \\ C_0 &= F'(x_0), \\ C_{k+1} &= C_k + \underbrace{\overbrace{\left[\frac{1}{s_k^T s_k}(y_k - C_k s_k)\right]}^{u_k} \overbrace{s_k^T}^{v_k^T}}_{\text{Rang 1-Korrektur}} \end{aligned}$$

mit $s_k = x_{k+1} - x_k$ und $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$.

$\Rightarrow$ superlineare Konvergenz möglich !

Ü 6.2 Man zeige, daß gilt:

(a) $C_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = F(x_{k+1}) - F(x_k)$,

(b) $(C_{k+1} - C_k)s = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^N : s_k^T s = 0$.

Umgekehrt definieren die Bedingungen (a) und (b) genau die Rang-1-Korrektur.

$X = Y = \mathbb{R}^N$

Ü 6.3 Man beweise die Sherman-Morrison-Formel:
$C_{k+1}^{-1} = C_k^{-1} - \frac{1}{1+v_k^T C_k^{-1} u_k} C_k^{-1} u_k v_k^T C_k^{-1}$,
falls $1 + v_k^T C_k u_k \neq 0$.

- Inexakte Newton-Verfahren in $X = Y = \mathbb{R}^N$:

Wähle M_k mit $\varrho(M_k) < 1$, τ_k und p_k !?

$C_k = F'(x_k)(I - M_k^{p_k})^{-1}$,

d.h. löse $F'(x_k)w_k = d_k$ näherungsweise durch p_k Iterationen

$$w_k^{(i+1)} = M_k w_k^{(i)} + (I - M_k)F'(x_k)^{-1} d_k, \quad i = 0, \dots, p_k - 1$$

mit Startnäherung $w_k^{(0)} = 0$ und dem Iterationsop. M_k, z.B. MGM.

$\Rightarrow$ $p_k = \text{const.}$ $\Rightarrow$ lineare Konvergenz;
$p_k \nearrow$ $\Rightarrow$ quadratische Konv. mögl. !

$\vdots$

3) $C_k = F'(x_k)$: a) $\tau_k \in (0,1)$ gedämpftes Newton-Verfahren,
b) $\tau_k = 1$ Newton-Verfahren: $\Rightarrow$ quadratische Konv. mögl. !

■ Frage: Wahl von $C_k \in L(X,Y)$?

Kriterien: 1. C_k und $w_k = C_k^{-1} d_k$ schnell berechenbar !

2. Konvergenzgeschwindigkeit (! $X = \mathbb{R}^N$: ? $N \nearrow \infty$) !

■ Newton-Verfahren: $C_k = F'(x_k)$ und $\tau = 1$.

Motivation: Linearisierung von F an der Stelle x_k, d.h.

$$F(x) \underset{\substack{\uparrow \\ o(\|x-x_k\|)}}{\approx} L(x) = F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k), \; x \in U(x_k),$$

und Ersetzen von

$$F(x) = 0 \text{ durch } L(x) = 0,$$

$$\Updownarrow$$

$$x_* \overset{?}{\leftarrow} x_{k+1} := x = x_k - [F'(x_k)]^{-1} F(x_k).$$

Satz 6.4: (lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens)

Vor.: X, Y – B-Räume; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen;
$F : D \subset X \mapsto Y$ sei F-differenzierbar auf D;
$x_* \in D$ sei Nullstelle von F, d.h. $F(x_*) = 0$,
$F'(x_*)$ sei regulär, $\underset{(\geq)}{\beta = \|F'(x_*)^{-1}\|}$.

Bh.: Dann gilt:

1) Ist F' stetig in x_*, dann konvergiert das Newton-Verfahren

(4) $$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1} F(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

lokal ($x_0 \in U(x_*)$, d.h. für hinreichend gute Startnäherung) und q-superlinear.

2) Gibt es eine Konstante γ mit

$$\|F'(x) - F'(x_*)\| \leq \gamma \, \|x - x_*\| \quad \forall x \in D, \; (\forall x \in U(x_*)),$$

dann konvergiert das Newton-Verfahren q-quadratisch.

Beweis:

1) Def. $G(x) := x - F'(x)^{-1}F(x) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow x_{k+1} = G(x_k)$.
Es gilt: $G'(x_*) = 0$! (da $F(x_*) = 0$)

Tatsächlich, $\forall x \in U(x_*)$ gilt:

$$\begin{aligned}
G(x) &- G(x_*) - G'(x_*)(x - x_*) = \\
&= x - F'(x)^{-1}F(x) - (x_* - F'(x_*)^{-1}F(x_*)) - 0 = \\
&= \underline{F'(x_*)^{-1}F'(x_*)}(x - x_*) - F'(x)^{-1}F(x) + F'(x_*)^{-1}\overset{0}{\overset{\|}{F(x_*)}} \\
&= (F'(x_*)^{-1} - F'(x)^{-1})F'(x_*)(x - x_*) + \underline{F'(x)^{-1}}F'(x_*)(x - x_*) \\
&\quad - F'(x)^{-1}F(x) + \underbrace{F'(x_*)^{-1}F(x_*)}_{=F'(x)^{-1}F(x_*)=0} \\
&= (F'(x_*)^{-1} - F'(x)^{-1})F'(x_*)(x - x_*) - \\
&\quad - F(x)^{-1}(F(x) - F(x_*) - F'(x_*)(x - x_*))
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{(F'(x_*)^{-1} - F'(x)^{-1})}_{\to 0} F'(x_*)(x - x_*) - F'(x)^{-1}(F(x) - F(x_*) - F'(x_*)(x - x_*))$$

da F' stetig in x_*, $F'(x_*)$ regulär. — da F' stetig in x_*, $F'(x_*)$ regulär. — $o(\|x - x_*\|)$ per Def.

$$= o(\|x - x_*\|), \text{ d.h. } G'(x_*) = 0 \qquad \#$$

d.h. $\forall \epsilon \in (0,1)\ \exists\, \delta = \delta_\epsilon > 0 : \|G(x) - G(x_*) - \overset{0}{\overset{\|}{G'(x_*)}}(x - x_*)\| \le \epsilon \|x - x_*\| \quad \forall x \in \bar{K}(x_*, \delta)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \\
&\|G(x) - \overset{G(x_*)}{\overset{\|}{x_*}}\| = \|G(x) - G(x_*) - \overset{0}{\overset{\|}{G'(x_*)}}(x - x_*)\| \le \epsilon\|x - x_*\| \quad \forall x \in \bar{K}(x_*, \delta) \\
&\|x_{k+1} - x_*\| \le \epsilon \|x_k - x_*\|, x_k \in \bar{K}(x_*, \delta)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow q$ - superlineare Konvergenz ! # $\quad \nwarrow$ bel. $\epsilon \in (0,1)$! $\nearrow$

2) Korollar 5.1 liefert: $\exists\, \xi \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
\|G(x) - x_*\| &= \|x - F'(x)^{-1}F(x) - x_*\| \\
&= \|F'(x)^{-1}[\underset{0}{\underset{\|}{F(x_*)}} - F(x) - F'(x)(x_* - x)]\| \\
&\overset{\text{Korollar 5.1}}{\le} \|F(x)^{-1}\| \|[F'(x + \xi(x_* - x)) - F'(x_*) + F'(x_*) - F'(x)] \\
&\qquad (x - x_*)\| \\
&\le \frac{2\beta\gamma}{1 - \beta\gamma\|x - x_*\|}\|x - x_*\|^2 \quad q\text{-quadratisch !} \\
&\uparrow
\end{aligned}$$

<u>S. 2.6:</u> $\|F'(x)^{-1}\| \le \frac{\|F'(x_*)^{-1}\| = \beta}{1 - \|F'(x_*)^{-1}\|\|F'(x) - F'(x_*)\|} \le \frac{\beta}{1 - \beta\gamma\|x - x_*\|}$ $\qquad$ #

q.e.d.

<u>Satz 6.5:</u> (L. V. Kantorovich)

<u>Vor.:</u> 1) X, Y – B-Räume; $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, offen;

2) $F : D \subset X \mapsto Y$ sei F-differenzierbar auf D;

3) F-Abl. $F'(\cdot)$ sei Lipschitz-stetig in D, d.h. $\exists\, \gamma = \text{const.} > 0$:

$$\|F'(y) - F'(x)\| \leq \gamma\, \|y - x\| \quad \forall x, y \in D;$$

4) $\exists\, x_0 \in D : F'(x_0)$ ist regulär:

$$\begin{aligned} &\|F'(x_0)^{-1}\| \leq \beta, \\ &\|F'(x_0)^{-1} F(x_0)\| \leq \eta. \end{aligned}$$

<u>Bh.:</u> Falls

$$\alpha := \beta\, \gamma\, \eta < \tfrac{1}{2}$$

und

$$\bar{K}(x_0, t_*) \subset D \;\text{ mit }\; t_* = \tfrac{1}{\beta\gamma}\left(1 - \sqrt{1 - 2\alpha}\right),$$

dann ist das Newton-Verfahren mit dem Startwert x_0 wohldefiniert, $x_k \in \bar{K}(x_0, t_*)$ $\forall k \geq 0$ und $\{x_k\}$ konvergiert gegen eine Nullstelle x_* von F in $\bar{K}(x_0, t_*)$.

<u>Beweis:</u>

1) <u>Zeigen:</u> $\exists\, F'(x)^{-1} \quad \forall\, x \in \bar{K}\,(x_0, t_*)$.
Benutzen dazu wieder die Folgerung $\boxed{\text{Ü 2.1}}$ aus dem Störungssatz 2.7 (vgl. auch Satz 1.3):

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \in L\,(X, Y) \\ A \;\text{ regulär} \\ \|\,\Delta A\,\| < \dfrac{1}{\|\,A^{-1}\,\|} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} 1)\; \tilde{A} = A + \Delta A \text{ regulär} \\ 2)\; \|\,\tilde{A}^{-1}\,\| \leq \dfrac{\|\,A^{-1}\,\|}{1 - \|\,A^{-1}\,\|\,\|\,\Delta A\,\|} \end{array}}$$

Tatsächlich, $F'(x) = F'(x_0) + (F'(x) - F'(x_0)) = A + \Delta A$:

$$\| F'(x) - F'(x_0) \| \leq \gamma \underbrace{\|x - x_0\|}_{< \frac{1}{\beta\gamma}} < \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\| F'(x_0)^{-1} \|},$$

$\forall\, x \in \bar{K}\,(x_0, t_*) \subset \bar{K}\,(x_0, 1/(\beta\,\gamma)) \cap D$.

Folglich gilt:

$$(6) \quad \begin{cases} \text{a)} & \exists\ F'(x)^{-1} \in L(X,Y) \quad \forall\, x \in \bar{K}(x_0, t_*) \subset D, \\ \text{b)} & \|F'(x)^{-1}\| \leq \frac{\|F'(x_0)^{-1}\|}{1 - \|F'(x_0)^{-1}\| \, \|F'(x) - F'(x_0)\|} \leq \frac{\beta}{1 - \beta\,\gamma\,\|x - x_0\|} \end{cases}$$

$\forall\, x \in \bar{K}\,(x_0, t_*)$.

2) Zeigen nun induktiv: $\quad x_k \in \bar{K}\,(x_0, t_*) \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots$:

- Die Startnäherung x_0 ist trivialerweise in $\bar{K}\,(x_0, t_*)$ enthalten. Seien nun auch $x_1, \ldots, x_k \in \bar{K}\,(x_0, t_*)$. Zu zeigen ist, daß dann auch $x_{k+1} \in \bar{K}\,(x_0, t_*)$.

- Zunächst gilt wegen $x_{k+1} - x_k \overset{(4)}{=} -F'(x_k)^{-1} F(x_k)$:

(7) $\qquad \|x_{k+1} - x_k\| = \|F'(x_k)^{-1} F(x_k)\| =$

$$= \quad \|F'(x_k)^{-1} \underbrace{[F\,(x_k) - \overbrace{(F\,(x_{k-1}) + F'(x_{k-1})\,(x_k - x_{k-1}))}^{=0}]}_{=r\,(x_{k-1}, x_k)} \| =$$

Korollar 5.14

$\downarrow$

$$= \quad \|F'(x_k)^{-1} \int_0^1 [F'(x_{k-1} + t\,(x_k - x_{k-1})) - F'(x_{k-1})]\,(x_k - x_{k-1})\,dt\| \leq$$

$$\overset{3)}{\leq} \quad \underbrace{\|F'(x_k)^{-1}\|}_{(6)_{\text{b)}}} \int_0^1 \gamma\, t\, \|x_k - x_{k-1}\|^2\, dt \leq$$

$$\overset{(6)_{\text{b)}}}{\leq} \quad \frac{\beta}{1 - \beta\,\gamma\,\|x_k - x_0\|}\, \gamma\, \|x_k - x_{k-1}\|^2 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \quad \frac{0.5\,\beta\,\gamma\,\|x_k - x_{k-1}\|^2}{1 - \beta\,\gamma\,\|x_k - x_0\|} = \varphi\,(\|x_k - x_{k-1}\|,\, \|x_k - x_0\|),$$

mit

$$\varphi\,(s,t) := \frac{0.5\,\beta\,\gamma\,s^2}{1 - \beta\,\gamma\,t}\,.$$

- Aus der Ungleichung $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\|x_k - x_0\| \leq \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| =: s_k, \quad s_0 = 0$$

und (7) erhalten wir wegen der Monotonie von φ

$$\begin{aligned} s_{k+1} - s_k &= \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{0.5\,\beta\,\gamma\,(s_k - s_{k-1})^2}{1 - \beta\,\gamma\,\|x_k - x_0\|} \leq \\ &\leq \frac{0.5\,\beta\gamma\,(s_k - s_{k-1})^2}{1 - \beta\,\gamma\,s_k} = \varphi\,(s_k - s_{k-1}, s_k). \end{aligned}$$

- Definieren nun eine Zahlenfolge $\{t_l\}_{l=1,2,\ldots,k}$ rekursiv durch:

  $t_0 = 0, \quad t_1 = \eta,$

  $t_{l+1} - t_l = \varphi\,(t_l - t_{l-1}, t_l), \quad l = 1, 2, \ldots .$

  Für diese Folge gilt die Rekursion (mms)

  $t_0 = 0,$

  $t_{l+1} = \psi\,(t_l), \quad l = 0, 1, \ldots,$

  mit

  $\psi\,(t) = \dfrac{\eta - \frac{1}{2}\beta\,\gamma\,t^2}{1 - \beta\,\gamma\,t}\ .$

  Die Folge $\{t_l\}_{l=0,1}$ konvertiert monoton steigend gegen den Fixpunkt t_* der Fixpunktgleichung (mms)

$$\begin{aligned} t = \psi\,(t) \quad &\Leftrightarrow \quad t - \beta\,\gamma\,t^2 = \eta - \frac{1}{2}\beta\,\gamma\,t^2, \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\beta\,\gamma\,t^2 - t + \eta = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 - \frac{2}{\beta\,\gamma}\,t + \frac{2\,\eta}{\beta\,\gamma} = 0, \\ &\Leftrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{1}{\beta\,\gamma} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta^2\,\gamma^2} - \frac{2\,\eta}{\beta\,\gamma}} \\ &\qquad\quad\ = \frac{1}{\beta\,\gamma}\,\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha}\right), \\ &\qquad \text{d.h. } t_* = \frac{1}{\beta\,\gamma}\,\left(1 - \sqrt{1 - 2\alpha}\right). \end{aligned}$$

- Wegen (4) und Vor. 4) gilt:

  $$\|x_1 - x_0\| \overset{(4)}{=} \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq \eta = \underbrace{t_1}_{=\eta} - \underbrace{t_0}_{=0}.$$

  Unter der Annahme, daß

  $$\|x_l - x_{l-1}\| \leq t_l - t_{l-1} \quad \forall\, l = 1, 2, \ldots, k$$

  gilt, folgt nun

  $$\begin{aligned} \|x_l - x_0\| &\leq \|x_l - x_{l-1}\| + \|x_{l-1} - x_{l-2}\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| \\ &\leq (t_l - t_{l-1}) + (t_{l-1} - t_{l-2}) + \ldots + (t_1 - \underbrace{t_0}_{=0}) = t_l \end{aligned}$$

  für alle $l = 1, 2, \ldots, k$, und wegen der Monotonie von φ,

  $$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= s_{k+1} - s_k \leq \varphi(s_k - s_{k-1}, s_k) \leq \\ &\leq \varphi(t_k - t_{k-1}, t_k) = t_{k+1} - t_k. \end{aligned}$$

  Daraus folgt wie oben

  $$\|x_{k+1} - x_0\| \leq t_{k+1}$$

  d.h. $x_{k+1} \in \bar{K}(x_0, t_*)$. #

3) Wie oben zeigt man wieder:

   $$\|x_m - x_n\| \leq t_m - t_n \qquad \forall\, m \geq n.$$

   Aus der Konvergenz der Zahlenfolge $\{t_k\}$ folgt sofort, daß $\{t_k\}$ eine Cauchy–Folge ist. Da X ein Banach–Raum ist, $\exists\, x_* \in \bar{K}(x_0, t_*)$: $x_k \longrightarrow x_*$ in X. Wegen der Stetigkeit von F und F' gilt:

   $$x_* \longleftarrow x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k) \longrightarrow x_* - F'(x_*)^{-1}F(x_*),$$

   d.h. $F(x_*) = 0$. **q.e.d.**

Bemerkung:

1) Die Aussagen des Satzes 6.8 gelten auch für $\alpha = 1/2$.
2) Es gilt die Fehlerabschätzung

   $$\|x_k - x_*\| \leq t_* - t_k \leq \frac{1}{\beta\,\gamma\,2^k}\, q^{2^k}$$

   mit $q = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha}$.

   Daraus ergibt sich die r–quadratische Konvergenz für $\alpha < 1/2$ bzw. die r–lineare Konvergenz für $\alpha = 1/2$.

3) Es läßt sich weiters zeigen, daß nur eine Nullstelle x_* in

$$K(x_0, t_{**}) \cap D \quad \text{mit} \quad t_{**} = \frac{1}{\beta\gamma}\left(1 + \sqrt{1-2\alpha}\right)$$

existiert, falls D konvex ist.

4) Literatur zum Newton-Verfahren und seinen Varianten: [14].

■ Beispiele:

1) Das Newton-Verfahren zur Lösung einer skalaren Gleichung

$$f(x) = 0$$

mit $f : I\!R^1 \to I\!R^1$ lautet: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

2) Ges. ist die Lösung des Randwertproblems (RWP):

$$\begin{aligned} x''(s) &= f(s, x(s), x'(s)), \; s \in (0,1), \\ x(0) &= a, \\ x(1) &= b, \end{aligned}$$

oder kurz

$$F(x) = 0$$

mit

$$F(x) = \begin{bmatrix} x''(\cdot) - f(\cdot, x(\cdot), x''(\cdot)) \\ x(0) - a \\ x(1) - b \end{bmatrix} \in Y$$

$$X = C[0,1], Y = C(0,1) \times I\!R^2, \; D \subset X \; ?, \; f \in C(0,1).$$

Das Newton Verfahren kann in folgender Form dargestellt werden:

$$x_{k+1} = x_k + w_k$$

mit $dF(x_k; w_k) \equiv \boxed{F'(x_k)w_k} = d_k = -F(x_k)$

Die Richtungsableitung läßt sich formal leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned} \partial_v F(x) &= \begin{bmatrix} v''(\cdot) - f_x(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot))v(\cdot) - f_{x'}(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot))v'(\cdot) \\ v(0) \\ v(1) \end{bmatrix} \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ G\text{-Abl.} \; \curvearrowright \; F\text{-Abl.} \leftarrow \text{Kapitel 5 !}}}{F'(x)v.} \end{aligned}$$

Somit erhält man zur Bestimmung der Newton-Korrektur $w_k(\cdot)$ das lineare RWP:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} w_k''(s) & - & f_x(s, x_k(s), x_k'(s))w(s) - f_{x'}(s, x_k(s), x_k'(s))w'(s) = \\ & & = -x_k''(s) + f(s, x_k(s), x_k'(s)),\ \ s \in (0,1) \\ w_k(0) & = & -x_k(0) + a \\ w_k(1) & = & -x_k(1) + b \\ \hline & & F'(x_k)w_k = -F(x_k) \end{array}}$$

Literatur

[1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, San Francisco, 1975.

[2] H.W. Alt. *Lineare Funktionsanalysis.* Springer–Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

[3] H. Brass. *Quadraturverfahren.* Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1977.

[4] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics.* Springer, Berlin, 1987.

[5] J.B. Cooper and W. Schachermayer. *Skriptum zur Vorlesung ANALYSIS III.* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1993.

[6] H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacherias. *Nichtlinearer Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[7] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[8] W. Hackbusch. *Integralgleichungen: Theorie und Numerik.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1989.

[9] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[10] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung MULTIGRID – METHODEN.* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[11] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK II (RWA).* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[12] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK III (AWA, ARWA).* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1997.

[13] S.G. Michlin. *Konstanten in einigen Ungleichungen der Analysis.* B.G. Teubner, Leipzig, 1981.

[14] H. Schwetlick. *Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

[15] S.L. Sobolew. *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der Mathematischen Physik.* Akademie-Verlag, Berlin, 1964.

[16] J. Wloka. *Funktionsanalysis and Anwendungen.* Walter de Gruyter – Verlag, Berlin, 1971.