MULTIGRID – METHODEN

Gundolf Haase, Ulrich Langer
Abteilung Numerische Mathematik und Optimierung
Institut für Analysis und Numerik
Johannes Kepler Universität Linz

Linz, 1998

MULTIGRID – METHODEN

deutsch: Mehrgitterverfahren

englisch: Multi-Grid Methods (MGM)

russisch: Fedorenko–Methode bzw. Fedorenko-Bachwalov–Methode

INHALT

Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskriptum entstand aus Vorlesungen, die der zweite Autor von 1985 – 1993 an der Technischen Universität Chemnitz, sowie im Wintersemester 1993/94, im Sommersemester 1994, im Wintersemester 1995/96 und im Sommersemester 1996 an der Johannes Kepler Universität Linz zu „Multigrid–Methoden" und „Numerik dünnbesetzter Systeme" gehalten hat. Ab dem Wintersemester 1997/98 übernahm der erste Autor die Vorlesung und erweiterte das Skriptum. Die Lehrveranstaltung besteht aus zwei Teilen, die jeweils als zweistündige Vorlesungen im Wintersemester bzw. Sommersemester gehalten wurden. Der **erste Teil** der Vorlesung (Kap. 1 - 4) ist bewußt einfach gehalten. Die Motivation und die algorithmischen Aspekte der Methode stehen im Vordergrund. Es werden Grundkenntnisse zur Konvergenz- und Effektivitätsanalyse, sowie zur Steuerung des Verfahrens bereitgestellt. Dies soll es den Studenten und Lesern ermöglichen, das Verfahren schnell zur Lösung von eigenen Problemen zu nutzen und optimal an die Problemstellung anzupassen. Der erste Teil ist deshalb auch für Studenten und Mitarbeiter aus technischen Fachbereichen geeignet und wurde vom Autor bereits in Vorlesungen für Studenten der Elektrotechnik genutzt. Der **zweite Teil** der Vorlesung (Kap. 5 - 6) wird im Sommersemester gehalten und ist speziell für Mathematiker gedacht. Im Mittelpunkt stehen modernen Techniken zur numerischen Analysis der Konvergenz von Multigridverfahren (einschließlich von Konvergenzratenabschätzungen für den V-Zyklus mit einem Glättungsschritt) und die Verwendung von symmetrischen Multigridtechniken zur Konstruktion von Präkonditioniern. Hier werden Kenntnisse aus der Theorie der Sobolev–Räume und über die moderne Analysis von Randwertaufgaben, wie sie in den Vorlesungen NUMERIK I [32] und NUMERIK II [33] vermittelt werden, benötigt. Zum ersten Teil der Vorlesung gehört ein **Praktikum**, in dem die Entwicklung von Multigrid–Programmen in verschiedenen Programmiersprachen betrachtet wird, das numerische Verhalten von Multigrid–Programmen „life" am Computer studiert wird und komplexe Multigrid–Programme zur Lösung praktischer Probleme vorgestellt werden. Im Anhang zu diesem Skriptum werden die Quelltexte eines Demoprogramms in verschiedenen Programmiersprachen sowie Übungsaufgaben angegeben. Das Praktikum wurde von Herrn Dr. Gundolf Haase bzw. Herrn Dipl.-Ing. Michael Kuhn abgehalten.

Das Skriptum wurde bewußt im Stile eines Vorlesungsmanuskriptes gehalten. Im Gegensatz zu vielen Lehrbüchern wurde auf „belletristische" Ausschmückungen verzichtet. Die Lehrinhalte sollen schnell und kompakt erfaßbar sein. Es wird eine Vielzahl von Abkürzungen eingeführt. Die Abkürzungen **Ü x.x** und **(mms)** bedeuten harte Arbeit an der Materie. Das Lösen von Übungsaufgaben und das „Mach-Mal-Selbst" ist angesagt. Das vorliegende Skriptum ist ein Arbeitspapier. Es ist kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch und auch kein Ersatz für ein Lehrbuch, aber eine gute Vorbereitung auf die allfällige Prüfung.

Die Autoren möchten an dieser Stelle ihrer Sekretärin, Frau Doris Holzer, für die Erstellung und technische Überarbeitung des LaTeX–Files recht herzlich danken.

Gundolf Haase und Ulrich Langer

Linz, Jänner 1998

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Motivation der Multigrid–Idee

■ **Betrachten zunächst folgende Modellbeispiele:**

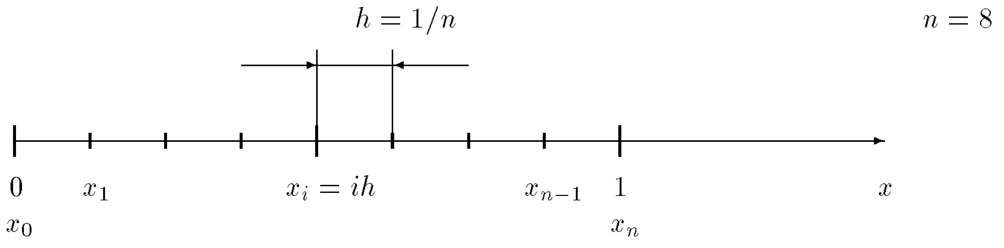
(1)
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } u(x): \quad -\Delta u(x) = f(x)\ ,\ x \in \Omega = (0,1)^d \subset \mathbb{R}^d, \\ \qquad\qquad\qquad u(x) = 0 \qquad ,\ x \in \Gamma = \partial\Omega. \end{array}}$$

MBsp. 1 $\quad \boldsymbol{d = 1}$
$$\boxed{\begin{array}{l} -u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}}$$

a) FDM $\Downarrow$ b) FEM

(2) diskrete Ersatzaufgabe $\boxed{K_h\,\underline{u}_h \;=\; \underline{f}_h}$ GS

a) FDM = **F**inite–**D**ifference–**M**ethod (Differenzenverfahren)



$u_i \approxeq u(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad i = \overline{1, n-1}$

$u_0 = u_1 = 0$

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \overset{\text{Taylor}}{\underset{\downarrow}{\equiv}} -u''(x_i) + O(h^2) = f_i, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$K_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \boldsymbol{O} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{N\times N} ; \quad \underline{u}_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{f}_h = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \in I\!R^N$$

mit $N = n - 1$.

b) FEM = **F**inite–**E**lemente–**M**ethode (Nu I, Pkt. 2.3)
Bsp.
Prakt.

(1) $\quad -u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0 \quad \Rightarrow$

$$-\int_0^1 u''v\,dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall\, v \in V_0 = \overset{\circ}{H}{}^1\,(0,1)$$

part. Integr.

mit $\overset{\circ}{H}{}^1\,(0,1) := \{v : [0,1] \mapsto I\!R^1 : \exists\, v' \in L_2(0,1), \;\; v(0) = v(1) = 0\}$

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - u'(x)v(x)|_0^1 = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall\, v \in V_0$$

(3) $\quad \boxed{\text{Ges. } u \in V_0 : \int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in V_0}$ $\quad$ Variationsformulierung (VF)

$$a\,(u,v) \;\; = \;\; < F, v >$$

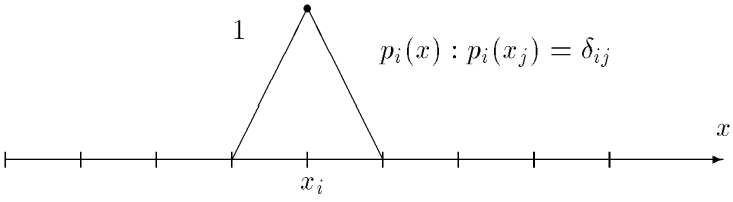
<u>Ansatz:</u> Suchen nun Näherungslösung in der Form

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} u_j p_j(x)$$

mit unbekannten Koeffizienten

$$[u_j]_{j=\overline{1,n-1}} =: \underline{u}_h \in I\!R^N, \quad N = n - 1$$

und gegebenen Ansatzfunktionen



$p_i(x) : p_i(x_j) = \delta_{ij}$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{j=1}^{n-1} u_j \int_0^1 p_j'(x) p_i'(x)\, dx = \int_0^1 f p_i(x)\, dx, \quad i = \overline{1, n-1}}$$

$$K_h = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{N\times N} = h K_h^{\mathrm{FDM}}, \quad \underline{f}_h = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \in I\!R^N$$

mit $f_i = \int_0^1 f(x) p_i(x)\, dx, \quad i = \overline{1, N}, \quad N = n-1.$

MBsp. 2 $\quad$ $\boldsymbol{d = 2}$

$$\boxed{\begin{aligned} &-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega = (0,1)^2, \\ &u(x_1, x_2) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{aligned}}$$

$$\Big\Downarrow \quad \text{a) FDM} \qquad \text{b) FEM}$$

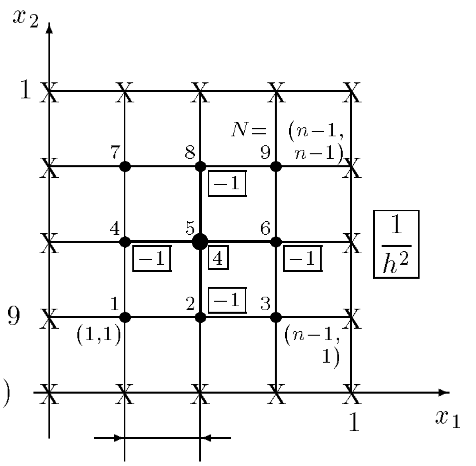
$$(2) \quad \boxed{K_h\, \underline{u}_h \; = \; \underline{f}_h}$$

a) <u>FDM:</u>

$n = 4$

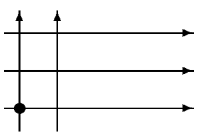
$N = (n-1)^2 = 9$

$u^{(i_1,i_2)} \cong u(x_1^{i_1}, x_2^{i_2})$



$h = 1/n$

Durchnumerierung (z.B.):



$(i_1,i_2) = (1,1), \ldots, (n-1, n-1)$

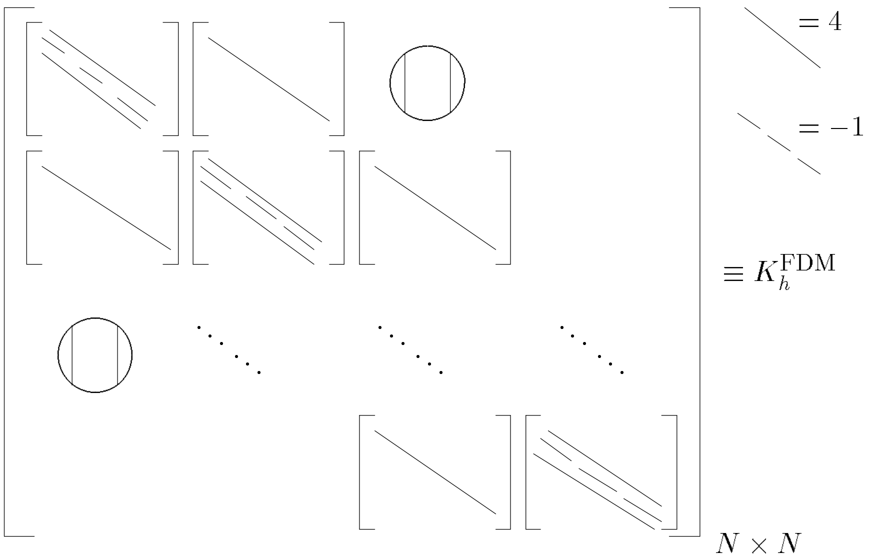
$i \;=\; 1 \;, \ldots, \; N$

$\underline{u}_h = (u^{(1,1)}, \ldots, u^{(n-1,n-1)})^T \in I\!R^N$

$$-\Delta u(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}) \; = \; \boxed{\begin{gathered} -\frac{u^{(i_1-1,i_2)} - 2u^{(i_1,i_2)} - u^{(i_1+1,i_2)}}{h^2} - \frac{u^{(i_1,i_2-1)} - 2u^{(i_1,i_2)} + u^{(i_1,i_2+1)}}{h^2} \\ = f^{(i_1,i_2)} := f(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}) \\ (i_1, i_2) = (1,1), \ldots, (n-1, n-1), \quad u^{(i)} = 0, \quad i \in \gamma_h = \{X\} \end{gathered}} + O(h^2) \; =$$

(2)

$K_h \equiv \frac{1}{h^2}$

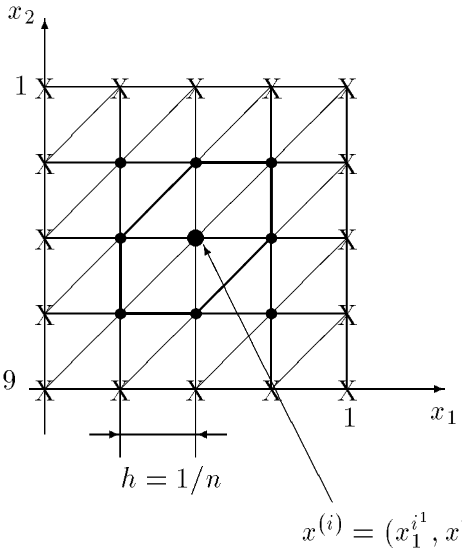


$\equiv K_h^{\mathrm{FDM}}$

$N \times N$

$$\underline{f}_h = \left[f^{(1,1)}, f^{(2,1)}, \ldots, f^{(n-1,1)}, \ldots, f^{(n,n)}\right] \in I\!R^N, \quad N = (n-1)^2.$$

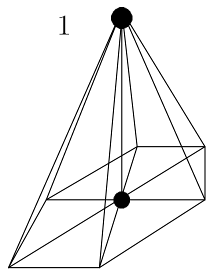
b) FEM:



$n = 4$

$N = (n-1)^2 = 9$

$p^{(i)}(x) =$



$i = (i_1, i_2), \quad i_\alpha = \overline{1, n-1}, \quad \alpha = 1, 2$

$p^{(i)}(x^{(j)}) = \delta_{ij}$

Ansatz: $\quad u_h \underbrace{(x)}_{=(x_1,x_2)} = \sum\limits_{i \in \omega_h} u^{(i)} p^{(i)}(x).$

$\downarrow$

$\omega_h = \{(i_1, i_2) : i_\alpha = \overline{1, n-1}, \quad \alpha = 1, 2\}$

$$K_h = K_h^{\mathrm{FEM}} = \left[\int\limits_\Omega \nabla^T p^{(i)} \nabla p^{(j)} dx\right]_{i,j \in \omega_h} = h^2 K_h^{\mathrm{FDM}} \; - \; N \times N\text{–Matrix},$$

$$\underline{f}_h = \left[f^{(i)}\right]_{i\in\omega_h} \in I\!\!R^N \text{ mit } f^{(i)} = \int\limits_{\Omega} f(x)p^{(i)}(x)\,dx,$$

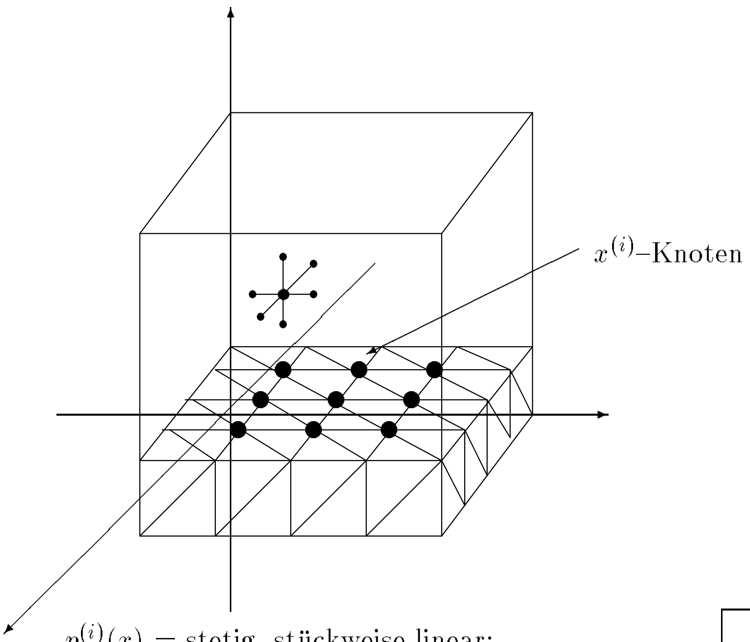
$$\underline{u}_h = \left[u^{(i)}\right]_{i\in\omega_h} = \left[u^{(1,1)}, u^{(n-1,1)}, \ldots, u^{(n-1,n-1)}\right]^T \in I\!\!R^N.$$

<u>Bemerkung:</u> siehe Nu I, Kap. 4, insbesondere Pkt. 4.3 (Bsp.),
Nu II, Kap. 3 und 4.

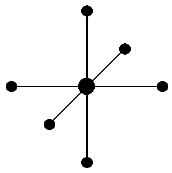
MBsp. 3 $\boldsymbol{d = 3}$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega = (0,1)^3,$$
$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

FEM FDM

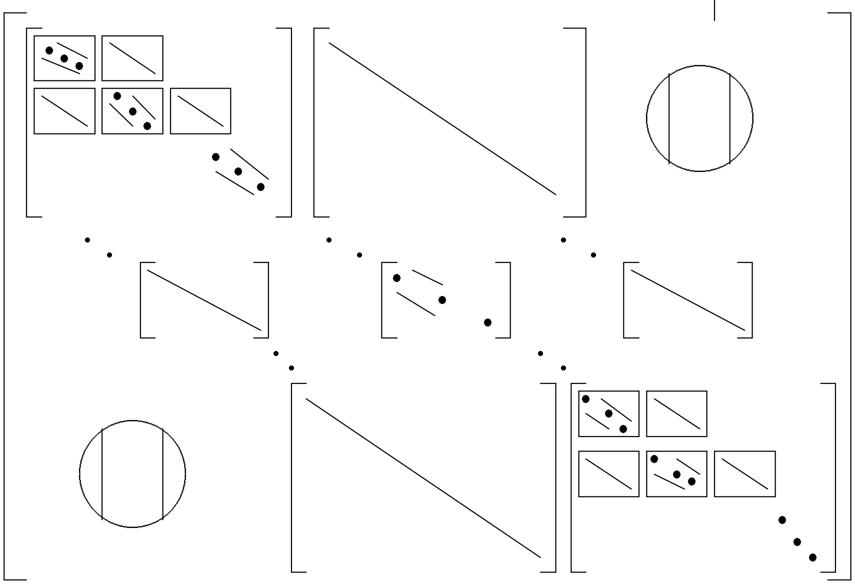


$p^{(i)}(x)$ = stetig, stückweise linear:
$p^{(i)}(x^{(j)}) = \delta_{ij}, \quad i,j \in \omega_h$



7-Punkte–Stern

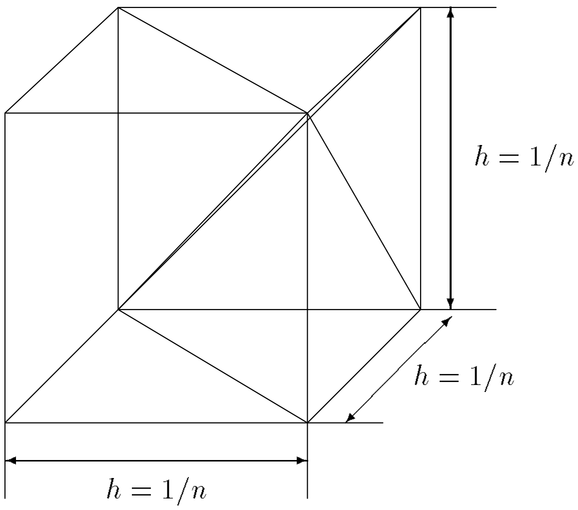
$$\boxed{K_h\,\underline{u}_h = \underline{f}_h}$$

$K_h = h$  $= K_h^{\mathrm{FEM}}, \quad K_h^{\mathrm{FDM}} = \dfrac{1}{h^2}[\;-\text{“}-]_{N\times N}$

$N \times N$

$N = (n-1)^3$, $\quad \ddots\ 6 \qquad \diagdown\ -1$

<u>mms:</u> Würfel
$\downarrow$
6 Tetraeder



■ Allgemeingültige Eigenschaften dieser GS für $h \to 0$ (siehe Nu II [33]):

$\Rightarrow$ praktisch : $h = 10^{-1}, \ldots, 10^{-3}, \ldots$
Genauigkeit d. Fkt.-Werte : $\approx h^2 = 10^{-2}, \ldots, 10^{-6}, \ldots$

1. Großdimensioniert: $\boxed{\text{Allgem.}}$ $\boxed{\text{MBsp. d}}$

   $\downarrow$ $\downarrow$

   N = Anzahl der Unbekannten $= \boldsymbol{O(h^{-d})} = (n-1)^d$.

2. Dünnbesetzt: $\boxed{\text{MBsp. d}}$

   $\downarrow$

   NNE = Anzahl der Nichtnullelemente von $K_h = \boldsymbol{O(h^{-d})} = (2d+1)(n-1)^d$.

3. Bandmatrix: $\boxed{\text{MBsp. d}}$

   $\downarrow$

   BW = Bandweite von $K_h = \boldsymbol{O(h^{-(d-1)})} = 2(n-1)^{(d-1)} + 1$.

   Bem.: – Bandweite ist numerierungsabhängig !
   – aber Aussage ist in der Klasse der betrachteten Aufgaben (FEM– bzw. FDM–Diskretisierung von RWA) ordnungsmäßig nicht verbesserbar !

4. spd Matrix: $\boldsymbol{K_h = K_h^T} > 0$ $\quad (\Leftarrow a(\cdot,\cdot)$ spd).

5. Eigenwerte $\boldsymbol{\lambda(K_h)}$: (Bew. siehe Nu II)

   $$\begin{array}{ccccccl} \underline{c}h^d & \leq & \lambda(K_h) & \leq & \bar{c}h^{d-2} & & \text{FEM,} \\ \underline{c} & \uparrow & & \uparrow & \bar{c}h^{-2} & & \text{FDM.} \end{array}$$

   ordnungsmäßig scharf !

6. Schlecht konditioniert:

   $$\boldsymbol{\kappa(K_h)} := \frac{\lambda_{\max}(K_h)}{\lambda_{\min}(K_h)} = O(h^{-2}).$$

■ Folgerung für Auflösung von $\boldsymbol{K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h}$:

1. Klassische direkte Verfahren: Gauß, L^TDL–Zerlegung, Cholesky, ...

   M = Memory ($\Rightarrow$ fill–in !) $\approx$ BW $\cdot$ N $= O(h^{-2d+1})$
   Q = Anzahl der arithm. Operationen $\approx$ (BW)$^2 \cdot$ N $= O(h^{-3d+2})$
   s = Verlust an gültigen Ziffern $\approx \lg \kappa(K_h)$ $(\downarrow)$

   Situation:

   $d = 1$: $M = O(h^{-1})$, $Q = O(h^{-1})$ $\Rightarrow$ optimal !
   $d = 2, 3$: Starkes Anwachsen von M und Q für $h \to 0$!
   (Optimal wäre: $M = O(h^{-d})$, $Q = O(h^{-d})$!)
   $d = 1, 2, 3$: Bei einfacher Genauigkeit kann Verlust an gültigen Ziffern zu sinnlosen Resultaten führen !

Beispiel: MBsp. 2 und 3; 100MFlop–Computer

n	$d=2$, d.h. 2D–Fall			$d=3$, d.h. 3D–Fall		
	CPU–Zeit	M	s	CPU–Zeit	M	s
20	0.8 ms	31 KB	2.6	6.4 s	12.2 MB	2.6
50	30 ms	488 KB	3.4	65 min	1192 MB	3.4
100	0.5 s	3.6 MB	4	5.8 Tage	38146 MB	4
200	8 s	30.5 MB	4.6	2.1 Jahre	1220672 MB	4.6
500	5.2 min	476 MB	5.4	1233 Jahre	–	5.4
1000	1.4 h	3816 MB	6	–	–	6
2000	22.2 h	30528 MB	6.6	–	–	6.6
5000	36.2 Tage	477000 MB	7.4	–	–	7.4

Bemerkungen:

1) Für MBsp. 2 und 3 existieren auch „schnelle“ direkte Verfahren mit $M = O(h^{-d})$, $Q = O(h^{-d} \ln h^{-1})$, z.B. FFT, Buneman, ...
Diese Verfahren sind aber nur beschränkt einsetzbar (Geometrie = Rechteck, Quader, konstante Koeff. im Differentialoperator, gleichmäßige Vernetzung etc.)

2) $s = \log_{10} \kappa(K_h)$

- Nu I: $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h, \quad K_h \underline{\tilde{u}}_h = \underline{f}_h + \underline{\delta}_h \Rightarrow \dfrac{\|\underline{u}_h - \underline{\tilde{u}}_h\|}{\|\underline{u}_h\|} \leq \underbrace{\kappa(K_h)}_{10^s} \underbrace{\dfrac{\|\delta_h\|}{\|\underline{f}_h\|}}_{10^{-t}}$

- K_h spd $\Rightarrow$ EW: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N$
EV: $\underline{\varphi}_{h,1} \quad \underline{\varphi}_{h,2} \qquad \underline{\varphi}_{h,N}$, ONS, $\|\cdot\|^2 = (\cdot,\cdot)$

$\boxed{h \text{ weglassen}}$

$$K_h \underline{u}_h = \underline{\varphi}_N \qquad \Rightarrow \underline{u}_h = \lambda_N^{-1} \underline{\varphi}_N$$
$$K_h \underline{\tilde{u}}_h = \underline{\varphi}_N + \delta \underline{\varphi}_1 \Rightarrow \underline{\tilde{u}}_h = \lambda_N^{-1} \underline{\varphi}_N + \delta \underline{\lambda}_1^{-1} \underline{\varphi}_1$$
$$\Longrightarrow \frac{\|\underline{u}_h - \underline{\tilde{u}}_h\|}{\|\underline{u}_h\|} = \frac{\|\delta \lambda_1^{-1} \underline{\varphi}_1\|}{\|\lambda_N^{-1} \varphi_N\|} = \delta \frac{\lambda_N}{\lambda_1} = \underset{10^{-t}}{\delta}\ \underset{10^s}{\kappa\,(K_h)} \longrightarrow \boxed{\text{Abschätzung ist scharf !}}$$

2. Klassische iterative Verfahren:

GSV (Jacobi–Verfahren), ESV (Gauß–Seidel–Verfahren), Gradientenverfahren, ...

$\boldsymbol{M}$	$\approx$	NNE $\boldsymbol{= O(h^{-d})}$ $\quad (K_h * \underline{u}_h\ !)$,
$\boldsymbol{I(\varepsilon)}$	$=$	Anzahl der Iterationen $= O(\kappa(K_h) \ln \varepsilon^{-1})$ $\boldsymbol{= O(h^{-2} \ln \varepsilon^{-1})}$,
$\boldsymbol{Q(\varepsilon)}$	$=$	$I(\varepsilon)*$ Aufwand pro Iteration + evtl. Voraufwand = $\boldsymbol{O(h^{-d-2} \ln \varepsilon^{-1})}$,
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$=$	relative Genauigkeit.

Situation:

+ Speicherplatzbedarf ist optimal, d.h. nur die NNE der Matrix K_h werden gespeichert $\Rightarrow$ Kompaktspeichertechniken !
– Anzahl der Iterationen wächst für $h \to 0$ stark an !

Beispiel: MBsp. 2 und 3; 100MFlop–Computer

n	$d=2$, d.h. 2D–Fall			$d=3$, d.h. 3D–Fall		
	M	GS $(**)$	ω – opt. SOR $(*)$ $(**)$	M	GS $(*)$	ω – opt. SOR $(*)$ $(**)$
20	3.8 KB	2 ms	0.2 ms	83.2 KB	57 ms	4 ms
50	21.2 KB	76 ms	2 ms	1.1 MB	5.3 s	160 ms
100	81.3 KB	1.2 s	19 ms	8.3 MB	2.8 min	2.6 s
200	319 KB	19 s	150 ms	64.4 MB	1.5 h	40 s
500	2 MB	12 min	2.3 ms	989 MB	5.8 Tage	26 min
1000	7.9 MB	3.3 h	18.6 s	7860 MB	130 Tage	7.2 h
2000	31 MB	2.2 Tage	2.5 min	64 GB	17 Jahre	4.6 Tage
5000	200 MB	72 Tage	38 min	960 GB	1589 Jahre	180 Tage

$(*)$ SOR: $I(\varepsilon) = O(h^{-1} \ln \varepsilon^{-1})$, $\;Q(\varepsilon) = O(h^{-d-1} \ln \varepsilon^{-1})$,
$(**)$ CPU–Zeit, die für 1 gültige Ziffer gebraucht wird ($\varepsilon = 10^{-1}$).

Auswege:

(1) Vorkonditionierung: $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \Leftrightarrow C_h^{-1} K_h \underline{u}_h = C_h^{-1} \underline{f}_h$

a) $\kappa(C_h^{-1} K_h) \ll \kappa(K_h) = O(h^{-2})$, Wunsch: $\kappa(C_h^{-1} K_h) = O(1)$

b) VK–GS: $C_h \underline{w}_h = \underline{f}_h$ schnell auflösbar, d.h. $O(h^{-d})$ arithm. Operationen, z.B. $C_h = C_h^T > 0$: SSOR, IC, MIC, …, **BPX**

(2) Multigrid–Methoden (**MGM**).

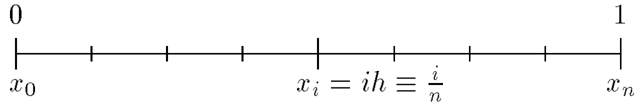
■ Untersuchen nun genauer die Ursachen der „schlechten“ Konvergenzeigenschaften der klassischen Iterationsverfahren:

$\longrightarrow$ Methode = Fourieranalyse nach den Eigenfkt./Eigenvektoren (EV) von K_h !

Betr. dazu MBsp. 1 (FEM):

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Es sei $n \geq 4$, n – gerade, $h = 1/n$:



$n = 8, \quad h = 1/8$

EWP: $K_h \underline{\varphi}_{h,k} = \lambda_{h,k} \underline{\varphi}_{h,k} \quad \approx \quad \boxed{\begin{array}{l} -u'' = \lambda u \text{ in } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array}}$

$k = \overline{1, n-1} = 1, 2, \ldots, n-1$
(Index h wird weggelassen !)

mms
$\downarrow$

$\Longrightarrow$ EV: $\underline{\varphi}_k = \left[\sqrt{2} \sin k\pi \frac{i}{n}\right]_{i=\overline{1,n-1}}, \quad k = \overline{1, n-1};$

$\{\underline{\varphi}_k\}_{k=\overline{1,n-1}}$ ONS in $I\!R^N$, $N = n-1$:

$(\underline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_j)_h \equiv 2 \sum_{i=1}^{n-1} h \sin \frac{k\pi i}{n} = \delta_{ij};$

$\lambda_1'(h) = 4(\pi - 1) \sin^2 \frac{\pi}{2} h$
$\Downarrow$
$0 < h \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1'(h) > 0$
$\Rightarrow \max\limits_{0<h\leq\frac{1}{2}} \lambda_1(h) = \lambda_1 \ (h = \frac{1}{2})$

EW: $\lambda_k = \frac{4}{h} \sin^2 \frac{k\pi}{2n}, \quad k = \overline{1, n-1};$

$8h \leq \lambda_1 = \frac{4}{h} \sin^2 \frac{\pi}{2n} < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1} = \frac{4}{h} \sin^2 \frac{n-1}{n} \frac{\pi}{2} < \frac{4}{h}$

$\Longrightarrow \quad \kappa(K_h) := \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_1} = \frac{\sin^2 \frac{n-1}{n} \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}} = O(h^{-2}) \leq \frac{1}{2} h^{-2}$

Btr. zur Lösung von (2)

$$K_h \, \underline{u}_h \ = \ \underline{f}_h$$

das ω–JACOBI–Verfahren ($\omega = 1 \ \Rightarrow$ klassisches Jacobi–Verfahren = GSV):

$$D \, \frac{\underline{u}^{l+1} - \underline{u}^l}{\omega} + K \underline{u}^l = \underline{f}, \quad D = \operatorname{diag} K = \begin{bmatrix} \setminus & & \boldsymbol{O} \\ & 2/h & \\ \boldsymbol{O} & & \setminus \end{bmatrix},$$

$$\Longrightarrow \underline{u}^{l+1} = \left(I - \omega \tfrac{h}{2} K\right) \underline{u}^l + \omega \tfrac{h}{2} \underline{f}, \quad l = 0, 1, \ldots; \quad \underline{u}^0 \in I\!R^{N=n-1} \text{ geg.}$$

Btr. Fehler: $\underline{z}^l \ = \ \underline{u} \ - \ \underline{u}^l$
und zerlegen Anfangsfehler nach EV $\{\underline{\varphi}_k\}_{k=\overline{1,n-1}}$:

$$\underline{z}^0 = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \, \underline{\varphi}_k, \quad \|\underline{z}^0\|_h^2 = (\underline{z}^0, \underline{z}^0)_h = \sum_{n=1}^{n-1} \alpha_k^2,$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\alpha_k = (\underline{z}^0, \underline{\varphi}_k)_h = \sum_{i=1}^{n-1} h z_i^0 \underline{\varphi}_k(i) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^{n-1} h z_i^0 \sin k\pi \frac{i}{h}.$$

Dann erhalten wir das folgende Fehlerschema

$$\begin{aligned}
\underline{z}^{l+1} &= \underbrace{\left(I-\omega\frac{h}{2}K\right)}_{=S(\omega)=\text{ Iterationsoperator }=\text{ Fehlerübergangsoperator}}\underline{z}^{l} = \ldots = \left(I-\omega\frac{h}{2}K\right)^{l+1}\underline{z}^{0} = S^{l+1}(\omega)\underline{z}^{0} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\left(1-\omega\underbrace{\frac{h}{2}\lambda_k}_{4h^2<\frac{h}{2}\lambda_k<2}\right)^{l+1}\underline{\varphi}_k .
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\|\underline{z}^{l+1}\|_h^2 &= (\underline{z}^{l+1},\underline{z}^{l+1})_h = \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k^2\left(1-\omega\tfrac{h}{2}\lambda_k\right)^{2(l+1)} \\
&\le \left[\max_{k=\overline{1,n-1}}\left|1-\omega\tfrac{h}{2}\lambda_k\right|\right]^{2(l+1)}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k^2 \\
&= \left[\max_{k=\overline{1,n-1}}\left|1-\omega\tfrac{h}{2}\lambda_k\right|\right]^{2(l+1)}\|\underline{z}^0\|_h^2 .
\end{aligned}$$

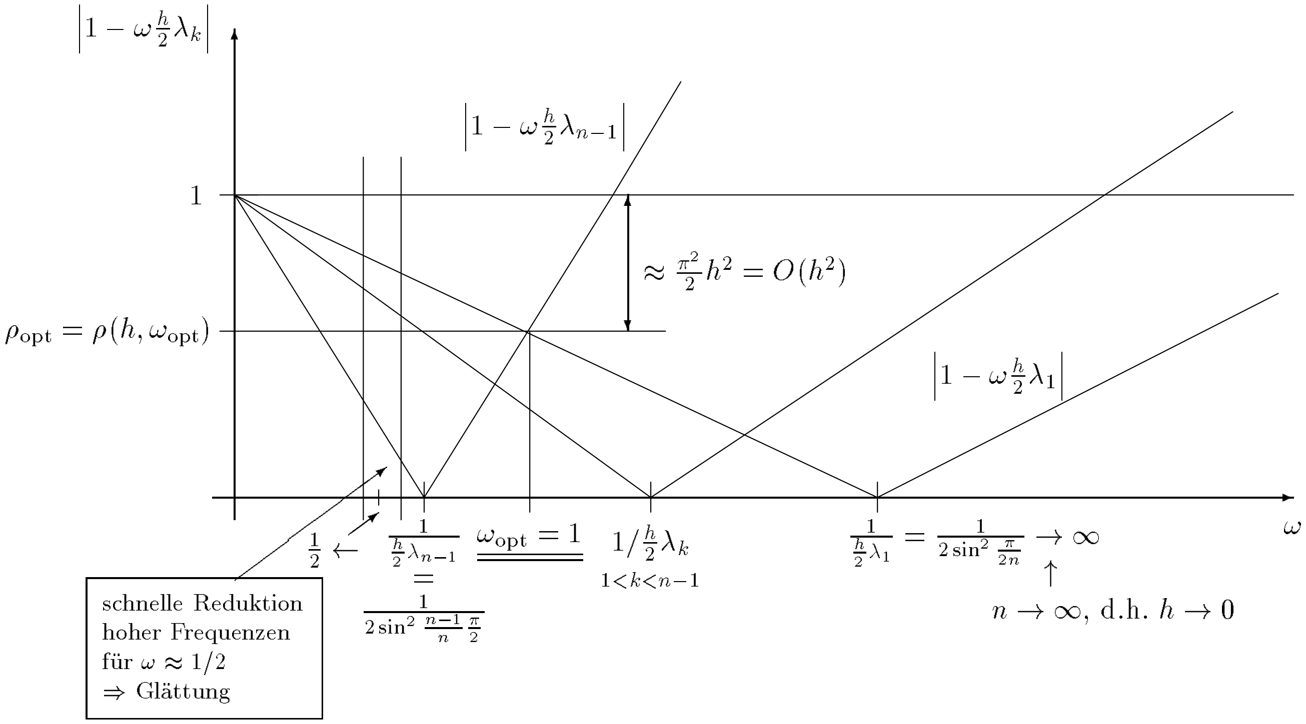
Definieren Konvergenzfaktor (= Fehlerdämpfungsfaktor)

$$\rho(h,\omega)=\rho(S)=\max_{k=\overline{1,n-1}}\left|1-\omega\frac{h}{2}\lambda_k\right| = \text{ Spektralradius }(S(\omega))$$

und untersuchen das Verhalten des Konvergenzfaktors ρ:

$$\boxed{\sin^2\alpha=\tfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned}
1-\omega\tfrac{h}{2}\lambda_k &= 1-\omega\tfrac{h}{2}\tfrac{4}{h}\sin^2\tfrac{k\pi}{2n} = 1-2\omega\sin^2\tfrac{k\pi}{2n} = \\
&= 1-\omega\left(1-\cos\tfrac{k\pi}{n}\right) = 1-\omega(1-\cos k\pi h)
\end{aligned}$$



<u>NR:</u> $1-\omega\frac{h}{2}\lambda_1 = -\left(1-\omega\frac{h}{2}\lambda_{n-1}\right)$

$1-2\omega\sin^2\frac{\pi}{2n} = 2\omega\sin^2\left(\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}\right)-1$

$2 = 2\omega\left(\sin^2\frac{\pi}{2n}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)\right) = 2\omega\left(\sin^2\frac{\pi}{2n}+\cos^2\frac{\pi}{2n}\right) = 2\omega$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\omega=\omega_{\text{opt}}=1}} \Longrightarrow \rho_{\text{opt}} = 1-2\sin^2\frac{\pi}{2n} = \cos\pi h \approx 1-\frac{\pi^2}{2}h^2$

<u>Resultat:</u>

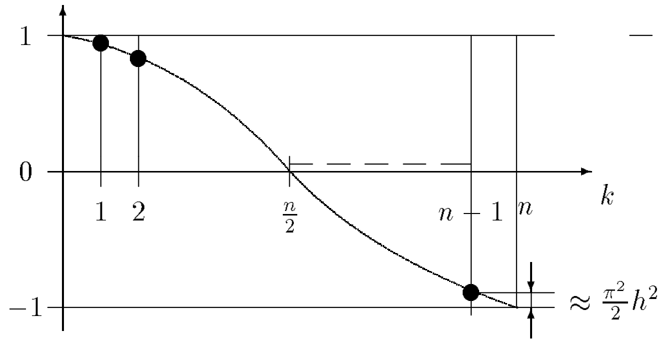
$$\boxed{\begin{array}{l} \rho(h,\omega) \geq \rho_{\text{opt}} = \rho(h,1) = 1-2\sin^2\dfrac{\pi}{2n} = \cos\pi h \approx 1-\dfrac{\pi^2}{2}h^2 \\ \rho = \begin{cases} 1-O(h^2)\ , & 0<\omega\leq 1 \\ \geq 1 & ,\text{ für } \omega>1 \text{ (fix) bei hinreichend kleinen } h \end{cases} \end{array}}$$

Untersuchen nun die Reduktionsfaktoren

$$\left(1-\omega\frac{h}{2}\lambda_k\right) = 1-2\omega\sin^2\frac{k\pi}{2n} = 1-\omega(1-\cos\overbrace{k\pi h}^{\pi\frac{k}{n}})$$

für verschiedene ω–Werte in Abhängigkeit von $k=\overline{1,n-1}$:

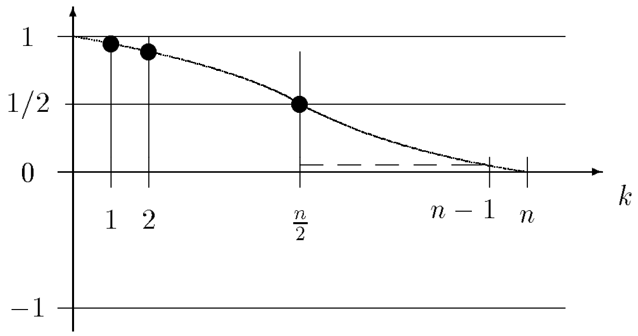
<u>$\omega=1$:</u> $1-\omega\frac{h}{2}\lambda_k = \cos\frac{k\pi}{n} = \cos k\pi h$ $\qquad$ (n – gerade)



— — — — — — hochfrequente Eigenfunktionen $k=\overline{\frac{n}{2},n-1}$

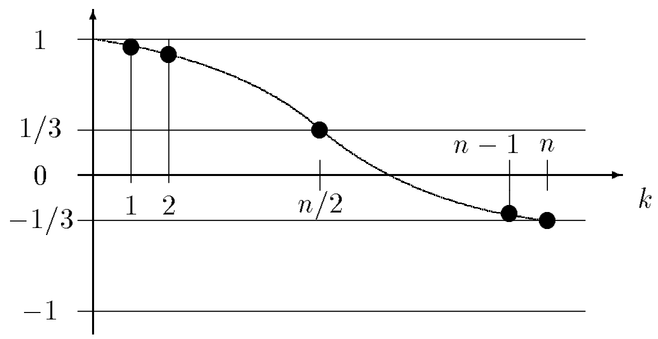
keine Glättungs–eigenschaften !

<u>$\omega=\frac{1}{2}$:</u> $1-\frac{1}{2}\frac{h}{2}\lambda_k = 1-\sin^2\frac{k\pi}{2n} = 1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{k\pi}{n}$



gute Glättungs–eigenschaften !

$\underline{\omega = \frac{2}{3}}$: $\quad 1 - \frac{2}{3}\frac{h}{2}\lambda_k = 1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{k\pi}{2n} = 1 - \frac{2}{3}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{k\pi}{n}$



optimale Glättung !

Definieren Glättungsfaktor als Maß für den Glättungseffekt von $S(\omega)$:

$$\mu(h,\omega) = \mu(S) := \max_{\frac{n}{2} \le k \le n-1} \left|1 - \omega\frac{h}{2}\lambda_k\right|$$

und den asymptotischen Glättungsfaktor

$$\mu^*(\omega) = \sup_{h \le 1/4} \mu(h,\omega).$$

Die Auswertung dieser Ausdrücke ergibt:

$$\begin{aligned} \mu(h,\omega) &= \max\{|1-\omega|,\ |1-\omega(1+\cos\pi h)|\}, \\ \mu^*(\omega) &= \max\{|1-\omega|,\ |1-2\omega|\}, \end{aligned}$$

sodaß wir für die optimalen (minimalen) Werte für μ und μ^* erhalten;

$$\omega_h^* = \frac{2}{2+\cos\pi h} \ :\ \mu(h,\omega_h^*) = \min_{0\le\omega\le1}\mu(h,\omega) = \frac{\cos\pi h}{2+\cos\pi h},$$

$$\omega^* = \frac{2}{3} \ :\ \mu^*(\omega^*) = \min_{0\le\omega\le1}\mu^*(\omega) = \frac{1}{3}.$$

Beispiel: $\quad h = 10^{-3},\ \omega^* = \frac{2}{3} \qquad$ optimal: $\omega = 1$

$$\rho(h,\omega^*) = 1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\pi}{2n} \approx 1 - \frac{\pi^2}{3}h^2 \qquad \left(\approx 1 - \frac{\pi^2}{2}h^2\right)$$

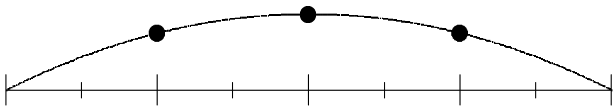
$$\mu^*(\omega^*) = \frac{1}{3}$$

l	1	10	100	1000
$[\mu^*(\omega^*)]^l$	1/3	$0.7 \cdot 10^{-4}$	$0.2 \cdot 10^{-48}$	—
$[\rho(h,\omega^*)]^l$	0.9999967	0.999967	0.99966	0.9966

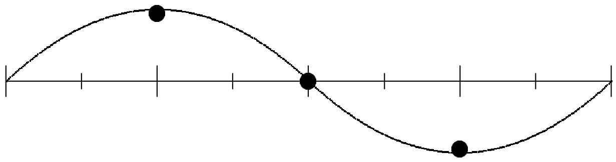
■ **Approximation „glatter“ Gitterfunktionen auf gröberem Gitter:**

$\boxed{n = 8}$

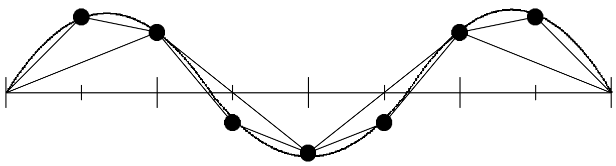
$k = 1$



$k = 2$

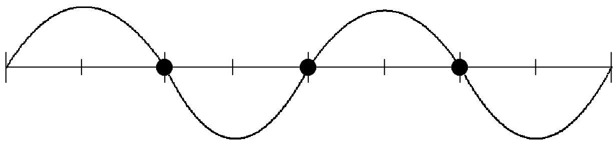


$k = 3$

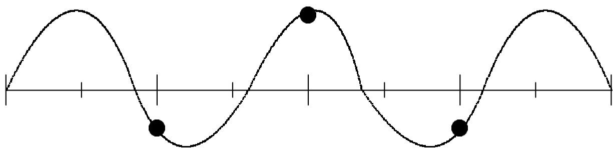


Reduktion durch **Grobgitterkorrektur**

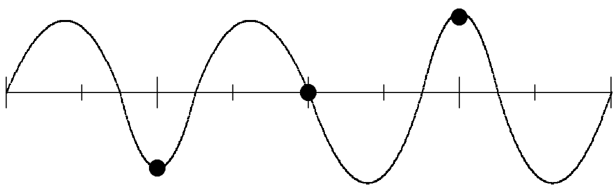
$k = 4$



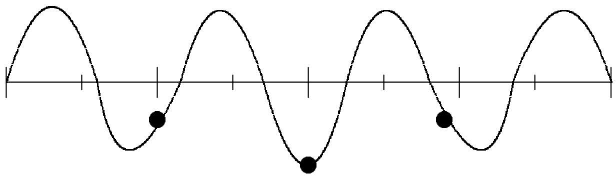
$k = 5$



$k = 6$



$k = 7$



Reduktion durch **Glättung**

<u>Resultat:</u>

- Die niedrigen Frequenzen $\left(k = \overline{1, \frac{n}{2} - 1}\right)$ im Fehler können auch bei punktweiser Injektion auf dem gröberen Gitter $(2h)$ gut erfaßt werden !
- Die hohen Frequenzen $\left(k = \overline{\frac{n}{2}, n - 1}\right)$ können auf dem gröberen Gitter nur schlecht oder überhaupt nicht $(k = n/2)$ erfaßt werden !

■ **<u>Schlußfolgerung:</u>**

1. Hohe Frequenzen $(k = \overline{\frac{n}{2}, n - 1})$ im Fehler können durch ω–JACOBI–Iteration schnell reduziert werden ! } Glättung (smoothing)

   $\updownarrow$ wechselseitig iterativ

   rekursiv bis zum gröbsten Gitter !

2. Niedrige Frequenzen $(k = \overline{1, \frac{n}{2} - 1})$ im Fehler können auf gröberem Gitter $(2h)$ gut approximiert werden ! } Grobgitter–approximation (CGC = Coarse–Grid–Correction)

■ **Idee für Multigrid–Algorithmus** zur Lösung von $K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$:

Startnäherung: $k = 0$; $\underline{u}_h^0$ geg. z.B. $\underline{u}_h^0 = \boldsymbol{O}$ (bzw. FMGM–Näherung !)

1. Schritt: Glättung z.B. mit ω–JACOBI–Verfahren ($\omega = 2/3$):
$\underline{u}_h^{k,\nu} \longleftarrow \underline{u}_h^{k,0} := \underline{u}_h^k$ (ν Glättungsschritte)

2. Schritt: Defekt berechnen:
$\underline{d}_h^k = \underline{f}_h - K_h \underline{u}_h^{k,\nu} \quad [= K_h \underline{u}_h - K_h \underline{u}_h^{k,\nu} = K_h \underbrace{\underline{z}_h^{k,\nu}}_{\text{Fehler}}]^{*)}$

3. Schritt: Grobgitterapproximation
$\underline{d}_h^k \overset{\text{Projektion}}{\underset{\text{Restriktion}}{\longmapsto}} \underline{d}_{2h}^k \equiv \underline{d}_{2h}$ | z.B. durch punktweise Injektion

$\downarrow$

k=0,1,2,...

$\boxed{K_{2h} \underline{w}_{2h} = \underline{d}_{2h}}$ — Schritte 1–4 auf Grobgitter $2h$ mit Startvektor $\underline{w}_{2h}^0 = \boldsymbol{O}$ γ-mal wiederholen$^{**)}$ — rekursiv — bis GS leicht lösbar

$\downarrow$

$\underline{w}_h \overset{\text{Interpolation}}{\longleftarrow} \underline{w}_{2h}$ | z.B. durch lineare Interpolation

4. Schritt: Korrektur der „geglätteten“ Näherung durch Grobgitterappr.:$^{***)}$
$\underline{u}_h^{k+1} = \underline{u}_h^{k,\nu} + \underline{w}_h$

Anmerkungen:

$*)$ $\underline{d}_h^k = K_h \underline{z}_h^{k,\nu} \overset{\text{MBsp. 1}}{=} \sum_{j=1}^{h=1} \alpha_j^{(0)} \left(1 - \omega \frac{h}{2} \lambda_j\right)^\nu \lambda_j \underline{\varphi}_j$

$\Rightarrow \underline{z}_h^{k,\nu}$ glatt $\Longrightarrow \underline{d}_h^k$ glatt !

$**)$ $\gamma = 1 : V$–Zyklus; $\gamma = 2 : W$–Zyklus.

$***)$ 5. Schritt: Nachglättung: $(\underline{u}_h^{k,\nu} + \underline{w}_h) \overset{\nu_N \text{ Glättungsschritte}}{\longmapsto} \underline{u}_h^{k+1}$.

Kapitel 2

Geschichte – Situation – Perspektiven

2.1 Geschichte

- **Grundkomponenten, deren Kombination zu effektiven Multigrid–Algorithmen führen:**

  1. Fehlerglättung durch klassische Iterationsverfahren;
  2. Approximation glatter Fehler auf gröberen Gittern;
  3. Rekursive Anwendung von 1. und 2. auf Folge von Gittern;
  4. „Nested–Iteration"–Prinzip: Start vom gröbsten Gitter;
  5. Adaptive Netzverfeinerung.

1961 ff	:	1.–3.: R.P. Fedorenko (Rußland): [1961: [17]; 1964: [18]].
1966	:	1.–4.: N.S. Bachwalov (Rußland): [1966: [3]].
1972	:	1.–5.: A. Brandt (Israel): [1972: [15]].

- **Weitere wichtige Daten in der MG – Geschichte:**

1971:	G.P. Astrachancev (Rußland) [1]: → Analysis von MGM für Variationsdifferenzenschemata, die 2D elliptische RWA zweiter Ordnung approximieren.
1976 ff:	V.G. Korneev (Rußland) [30]: → MGM für Finite–Elemente–Gleichungen.

1976 ff: W. Hackbusch (BRD) [siehe [23] bzgl. Literaturreferenzen]:
→ veröffentlicht erstes MG–Programm [21],
→ neue Konvergenzbeweise,
→ Übertragung auf neue Aufgabenklassen.

⋮

1981 ff: Multigrid–Konferenzen:
1981: 1. EMG–Konferenz in Köln: [25],
1985: 2. EMG in Köln: [26],
1990: 3. EMG in Bonn: [27],
1993: 4. EMG in Amsterdam: [28],
1996: 5. EMG in Stuttgart: [ ].

⋮

1985: W. Hackbusch: 1. zusammenfassende Monographie: [23].

2.2 Situation

■ **Breite Anwendungsmöglichkeiten:**

z.B.
- auf partielle Differentialgleichungen (PDgl.):
  - allgem. elliptische Randwertaufgaben (RWA), parabolische und hyperbolische Anfangsrandwertaufgaben (ARWA),
  - linear – nichtlinear,
  - Systeme partieller Dgl.,
  - Eigenwertprobleme (EWP),
  - FEM, FDM, BEM, ... ,
- auf Integralgleichungen,
- rein algebraisch (!)

■ **Enorme Effektivität:**

⟶ für 2D ($d = 2$) und 3D ($d = 3$) RWP erhält man asymptotisch optimale Komplexitätsabschätzungen:

$Q(\varepsilon) \approx N =$ Anzahl der Unbekannten $= O(h^{-d} \cancel{\ln \varepsilon^{-1}})$

FMGM
$\varepsilon = O(h^p) =$
Diskretisierungs–
fehler

$$M \approx N = O(h^{-d})$$

⟶ Praktisch erweisen sich Multigrid–Methoden als die effizientesten Verfahren für große Klassen von Aufgaben !

- **Numerische Experimente mit dem MG–Programm MGMTEST am MBsp. 2:** $\longrightarrow$ Praktikum P3 + P4 !

  - Programm: MGMTEST: BASIC, FORTRAN 77 (90), PASCAL, C, C++
  - Problem: $-\Delta u = f$ in $\Omega = (0,1)^2$, $u = g$ auf $\Gamma = \partial\,\Omega$,
    mit $<1>$ $f = -32(x(x-1) + y(y-1))$,
    $g = 0 : u = 16x(x-1)y(y-1)$
    $<3>$ $f = 1$, $g = 0$
  - Diskretisierung: FEM (lineare Dreieckselemente: $\triangle$)
  - Solver: MGM: V–Zyklus, verallgem. V–Zyklus, W–Zyklus
    [FMGM = Full–Multigrid–Method (mit V–Zyklus)]
  - Glättung: lexikographischer Gauß–Seidel: Vorglättung: $1\times$ vorw.
    $(\uparrow \mid \downarrow\downarrow)$ Nachglättung: $2\times$ rückw.
    [ω–Jacobi: $\omega = 1/2,\ 2/3,\ 1$]
  - Interpolation: bilineare [lineare] Interpolation
  - Restriktion: Injektion, (bilinear)^T, (linear)^T
  - Genauigkeit: $\varepsilon = 10^{-4} : \|\underline{d}_h^k\|_h \le \varepsilon \|\underline{d}_h^0\|_h$, $\underline{d}_h^k = \underline{f}_h - K_h \underline{u}_h^k$, $\underline{u}_h^0 = \boldsymbol{O}$
  - Computer: z.B. PC 486 DX 2 – 50
  - Resultate: ρ = durchschnittliche Konvergenzrate

Gitter–anzahl l	n	$N = (n-1)^2$	V–Zyklus $I(\varepsilon)$	V–Zyklus ρ	V–Zyklus CPU [sec]	verallg. V–Zyklus $I(\varepsilon)$	verallg. V–Zyklus ρ	verallg. V–Zyklus CPU [sec]	W–Zyklus $I(\varepsilon)$	W–Zyklus ρ	W–Zyklus CPU [sec]
3	8	49	5	0.118	0.11	4	0.080	0.11	4	0.076	0.16
4	16	225	5	0.128	0.22	4	0.068	0.16	4	0.059	0.33
5	32	961	5	0.130	0.38	4	0.056	0.33	3	0.044	0.60
6	64	3969	5	0.134	0.93	3	0.041	0.60	3	0.039	1.54

- **Theorie:** $\longrightarrow$ Konvergenzfaktor– und Aufwandsabschätzungen
  $\longrightarrow$ Verfahrensmanagement

  - „Optimale“ Theorie für spezielle Modellprobleme, z.B. wenn Eigenfunktionen (–vektoren) explizit bekannt sind:
    $\longrightarrow$ Modellproblemanalyse [25],
    $\longrightarrow$ praktikabel: lokale Fourieranalyse von A. Brandt [25].

- bis Ende der 70-er / Anfang der 80-er Jahre:

  $\longrightarrow$ allgemeine Konvergenztheorien [25]

  $\swarrow$ $\searrow$

  Summenaufspaltung (Russische Schule) | Produktaufspaltung (W. Hackbusch)

  des MG–Iterationsoperators

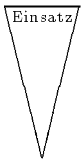
  $\longrightarrow$ Nachteile:
  - fordern „hinreichend“ viele Glättungsschritte !
  - schließen i.a. V–Zyklus aus !
  - setzen volle elliptische Regularität voraus !

- Seit 1984:

  $\longrightarrow$ neue allgemeine Konvergenztheorien, die auch die praktisch interessanten Fälle einschließen:
  - 1 Glättungsschritt
  - V–Zyklus
  - $H^{1+\alpha}$ – Regularität bzw. keine Regularität

  $\longrightarrow$ Literatur: [Braess, Hackbusch, McCormick, Bank, Douglas, . . .
  Bramble, Pasciak, Xu, . . .
  Axelsson, Vassilevski, Kuznetsov, ...]

■ **Anwendungen:**
$\longrightarrow$ Modellprobleme
$\longrightarrow$ Standardprobleme
$\longrightarrow$ Komplexe praktische Probleme
$\longrightarrow$ Industrielle Probleme



■ **Software:**

$\longrightarrow$
- gut entwickelt für 2D Probleme
- erste Realisierungen für 3D Modell– und Standardprobleme

$\longrightarrow$ Beispiele: für 2D Standardprobleme und praktische Probleme:

- PLTMG = Piecewise–Linear–Triangular–Multi–Grid [4] von R. Bank.
- FEMGP = Finite–Element–Multi–Grid–Package [Chemnitz].
  $\Rightarrow$ wird im Praktikum vorgestellt !
- KASCADE [H. Yserantant, P. Leinen, P. Deuflhard].
- SUPRENUM–Projekt [1983–89 an der GMD: U. Trottenberg]:
  Superrechner für numerische Anwendungen.
  = Parallelrechner + Multigridprinzip
- UG von P. Bastian [7]. . . .

■ **Einwände:**

$\longrightarrow$ Die Multigrid–Idee ist zwar einfach, aber die Implementierung effektiver Algorithmen und ihre Steuerung ist schwierig ! (FORTRAN–Leute ??)

$\longrightarrow$ Optimale Anpassung des Algorithmus an spezielle Situationen erfordert große Erfahrungen ! (o.k.)

$\longrightarrow$ Robustheit ($\Rightarrow$ Gegenstand der Forschung !?)

■ **Monographien und Lehrbücher:**

- Hackbusch W. (1985) [23]: Standardwerk zu Multigrid–Methoden !
- Hackbusch W. (1985) [24]: Lehrbuch.
- Shaidurov V.V. (1989) [41]: Monographie (Multigid–Methoden für Finite-Elemente-Gleichungen).
- McCormick S. (1989) [34]: Lehrbuch.
- Wesseling P. (1992) [45]: Lehrbuch (Differenzenverfahren; Konvektions-Diffusions–Probleme).
- Bramble J.H. (1993) [11]: Monographie (Moderne Konvergenztheorien).
- Rüde U. (1993) [37]: Monographie (Adaptivität, Implementierung, Parallelisierung).
- Vandewalle St. (1993) [43]: Monographie (Parabolische ARWA, Parallelisierung).
- Wittum G. (1992) [46]: Monographie zur Methode der Filternden Zerlegungen.
- Griebel M. (1994) [19]: Multilevel Methoden (praktische Aspekte).
- Oswald P. (1994) [35]: Multilevel Methoden (theoretische Aspekte).

2.3 Perspektiven

■ Durch die Nutzung der Multigrid–Technik wird die Konstruktion superschneller und gleichzeitig robuster Algorithmen für Standardprobleme und auch für komplexe praktische Probleme möglich:
$\longrightarrow$ 3D, nichtlineare, instationäre PDgl.–Systeme !

■ Neue Programmiersprachen (C++) ermöglichen die effiziente Umsetzung von MG–Algorithmen in der heutigen ums Mehrfache überlegenen Software zur schnellen Simulation naturwissenschaftlicher und technischer Prozesse (z.B. CAD, Echtzeitrechnungen, Vorzeitrechnungen, inverse Probleme, optimale Auslegung von Produkten etc. !), siehe auch [37].

- MG–Verfahren können neue Rechenarchitekturen, insbesondere MIMD–Rechner mit verteilten Speichern, gut ausnutzen:

  $\longrightarrow$ 2 Möglichkeiten zur Parallelisierung:

  1. direkte Parallelisierung durch „Data Partitioning“
  2. Nutzung von MG–Algorithmen als lokale Solver in „Domain–Decomposition–Preconditioners“

  $\longrightarrow$ Zukunft gehört: MGM + Parallelrechner

$$\begin{array}{ccc} \text{MGM} & + & \text{Parallelrechner} \\ O(N) & & \text{Teraflop} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & 10^9 \text{ Komplexität im Sekundenbereich !} & \\ & \text{vgl. dazu} & \\ & \text{Gauß + Parallelrechner für 3D} & \end{array}$$

$$N = (10^9)^{3/7} = 10^{27/7} \approx 10^4 \text{ Komplexität im Sekundenbereich !}$$

Kapitel 3

Algorithmische Aspekte bei der Konstruktion von Multigrid–Methoden

3.1 Das Zweigitterverfahren

- **TGM = Two–Grid–Method**

- **Btr. diskretes lineares elliptisches RWP** (siehe MBsp. 1 – 3)

„Gittergleichungen"		„lineares Gleichungssystem"
$K_h u_h(x) = f_h(x), \quad x \in \omega_h$	$\Longleftrightarrow$	$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ in $\mathbb{R}^{N_h}$
(wesentl. Rbd. sind in $\mathbb{G}(\omega_h)$ und in RS eingearbeitet !)		(wesentl. Rbd. sind in RS eingearbeitet !)

<u>MBsp. 1:</u> FDM

$$\frac{1}{h^2}\,[\underset{x-h}{-1} \quad \underset{x}{2} \quad \underset{x+h}{-1}]_h \, u_h(x) = f_h(x),$$

$x \in \omega_h := \{ih : i = \overline{1, n-1}\}$,

mit $\mathbb{G}(\omega_h) := \overset{\circ}{\mathbb{G}}(\bar{\omega}_h)$,

$\overset{\circ}{\mathbb{G}}_h(\bar{\omega}_h) := \{u_h : \bar{\omega}_h \to \mathbb{R}^1 : u_h(0) = u_h(1) = 0\}$

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix},$$

mit $N = n-1, \quad h = 1/n$

welches durch FEM– bzw. FDM–Diskretisierung entstanden sei:

Hierbei sind:

$\mathbb{G}(\omega_h)$ – Raum der Gitterfkt. $u_h(\cdot), \ f_h(\cdot), \ldots$,

$\cong$

$\mathbb{R}^{N_h}$ – der zu $\mathbb{G}(\omega_h)$ isomorphe Vektorraum der Vektoren der Knotenparameter: $\underline{u}_h, \underline{f}_h, \ldots$,

$$\dim \mathbb{G}(\omega_h) = \underset{\boxed{\text{skalare Dgl.}}}{\underset{\uparrow}{N_h}} = N(h) = \text{Anzahl der Unbekannten} = O(h^{-d}),$$

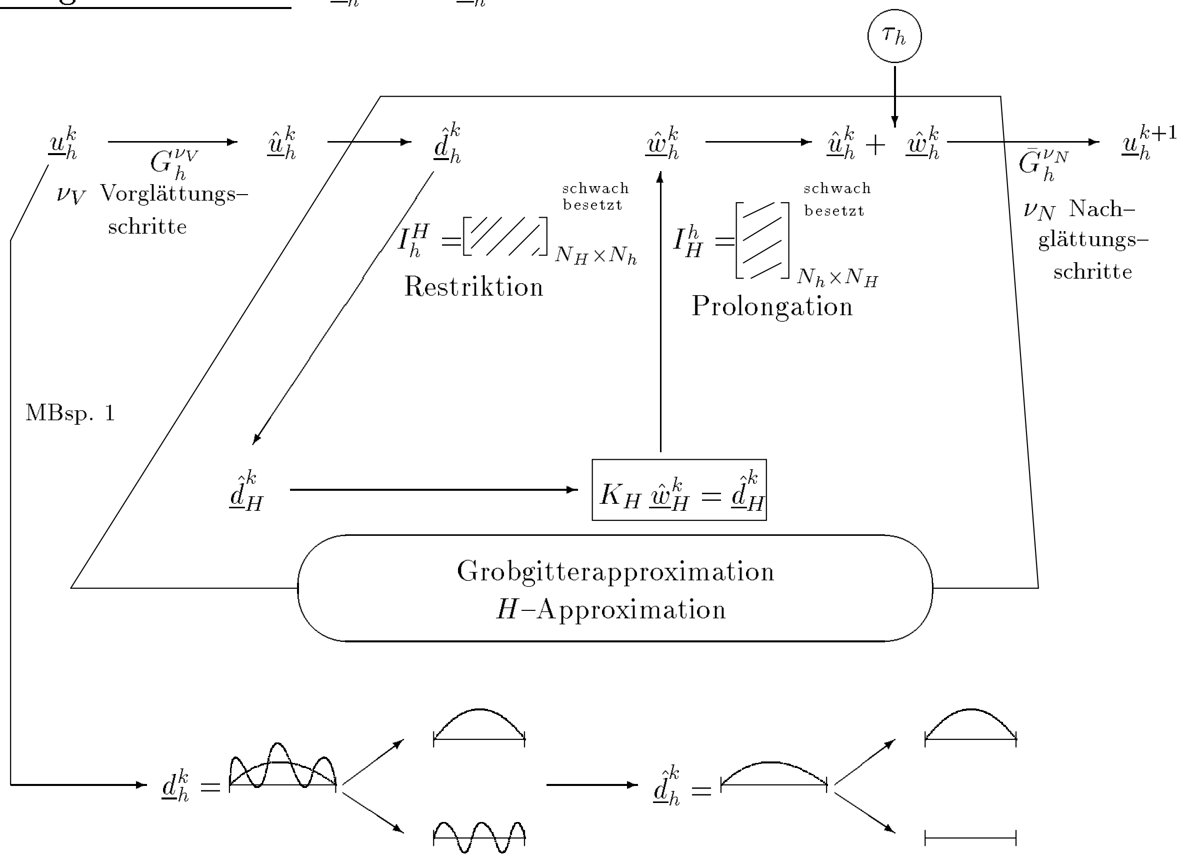
$$\begin{array}{lllll}
\omega_h & - & \text{Menge der Gitterpunkte,} & & \\
K_h & : & \mathbb{G}(\omega_h) & \longmapsto & \mathbb{G}(\omega_h) - \text{Gitteroperator,} \\
 & & \cong & & \cong \\
 & & \mathbb{R}^{N_h} & \longmapsto & \mathbb{R}^{N_h} - N_h \times N_h\text{–Matrix (Steifigkeitsmatrix).}
\end{array}$$

- **Btr. weiter ein gröberes Gitter ω_H mit der Schrittweite H $(H > h)$ z.B. $H = 2h$ (standard) und entsprechend:**

$$\begin{array}{lclcl}
\mathbb{G}(\omega_H) & \cong & \mathbb{R}^{N_H} & : & \dim \mathbb{G}(\omega_h) = N_H < N_h, \\
 & & & & \underline{\text{Standard:}}\ N_h = 2^d N_H \ \ (\Omega \subset \mathbb{R}^d),
\end{array}$$

$$K_H: \quad \left.\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{N_H} & \longmapsto & \mathbb{R}^{N_H} \\
\cong & & \cong \\
\mathbb{G}(\omega_H) & \longmapsto & \mathbb{G}(\omega_H)
\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{z.B.} \\ \text{Grobgitter–} \\ \text{diskretisierung.}\end{array}$$

- **<u>Zweigittermethode:</u>** $\underline{u}_h^k \longrightarrow \underline{u}_h^{k+1}$



$\underline{u}_h^k$ – Ausgangsnäherung:

$$\Rightarrow \quad \underline{d}_h^k = \underline{f}_h - K_h\,\underline{u}_h^k = K_h\,\underbrace{(\underline{u}_h - \underline{u}_h^k)}_{=} = K_h\,\underline{w}_h^k = \sum_j \alpha_j^{(k)} \lambda_j\,\underline{\varphi}_j = \quad = \text{Ausgangsdefekt}$$

$$\underline{w}_h^k = \sum_j \alpha_j^{(k)}\,\underline{\varphi}_j = \text{Ausgangsfehler}$$

$$\downarrow \qquad \text{EV} \qquad \text{EW}$$

$$\text{EV: } K_h\,\underline{\varphi}_{h,j} = \lambda_j\,\underline{\varphi}_{h,j}$$

$\underline{\hat{u}}_h^k = \boldsymbol{G_h^{\nu_V}}\,\underline{u}_h^k$ – Vorglättung: z.B.

$G_h\,\underline{u}_h^k := S_h\,\underline{u}_h^k + T_h\,\underline{f}_h$ – affine linear, z.B.

- ω–JACOBI: $\quad G_h\,\underline{u}_h^k := \left(I_h - \omega D_h^{-1} K_h\right)\,\underline{u}_h^k + \omega D_h^{-1}\,\underline{f}_h \quad$ (z.B. $\omega = 2/3$),
- ω–GAUSS–SEIDEL: $G_h\,\underline{u}_h^k := \underbrace{(I_h - \omega(D_h + \omega K_h^-)^{-1} K_h)}_{=S_h}\,\underline{u}_h^k + \underbrace{\omega(D_h + \omega K_h^-)^{-1}}_{=T_h}\,\underline{f}_h$,

  ($\omega \approx 1$, z.B. $\omega = 1.1$),

etc.,

mit $K_h = K_h^- + D_h + K_h^+ = [\ ◺\ ] + [\ ⟍\ ] + [\ ◹\ ]$, $\quad D_h = \operatorname{diag} K_h$,

$$\underline{\hat{d}}_h^k = \underline{f}_h - K_h\,\underline{\hat{u}}_h^k = K_h\,\underbrace{(\underline{u}_h - \underline{\hat{u}}_h^k)}_{= \underline{w}_h^{k,\nu}} = K\,\underline{w}_h^{k,\nu} = \sum_j \bar{\alpha}_j^{(k)}\,\lambda_j\,\underline{\varphi}_j \text{ – Defekt nach der Glättung,}$$

$$= \underline{w}_h^{k,\nu} = \sum_j \bar{\alpha}_j^{(k)}\,\underline{\varphi}_j \text{ – Fehler nach der Glättung}$$

! $\quad |\bar{\alpha}_j^{(k)}| \le |\alpha_j^{(k)}|\,\mu^{\nu_V} \quad \forall\, j \in I_{\text{hochfrequent}}$, wobei μ = <u>Glättungsfaktor</u>,

$\boldsymbol{I_h^H}$ – Restriktion: $\underline{\hat{d}}_H^k = I_h^H\,\underline{\hat{d}}_h^k$ $\quad\rightarrow$ viele Möglichkeiten:
- $*$ Injektion, falls $\omega_H \subset \omega_h$
- $*$ gewichtete Mittlungen
- $*$ Galerkin: $I_h^H = (I_H^h)^*$

$\boldsymbol{I_H^h}$ – Prolongation: $\quad\rightarrow$ viele Möglichkeiten:
- $*$ FEM–Interpolation

$\boldsymbol{K_H}$ – Grobgitteroperator: $\quad\rightarrow$ viele Möglichkeiten:
- $*$ Grobgitterdiskretisierung
- $*$ Galerkin: $K_H = I_h^H K_h I_H^h$
- $*$ FEM: p–Abstieg: h: quadr. $\longrightarrow$ H: linear

$$\underline{\hat{w}}_H^k = K_H^{-1}\,\underline{\hat{d}}_H^k$$

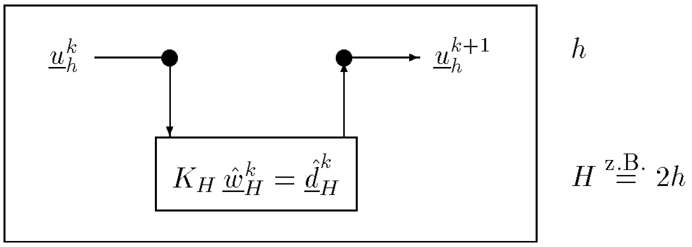
$$\underline{\hat{w}}_h^k = I_H^h\,\underline{\hat{w}}_H^k$$

$$\underline{u}_h^{k+1} = \boldsymbol{\overline{G}_h^{\nu_N}}\,(\underline{\hat{u}}_h^k + \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\tau_h} \\ \text{Relaxationsparameter}}}{\ } \underline{\hat{w}}_h^k)$$

3.2 Die Multigrid–Methode (MGM)

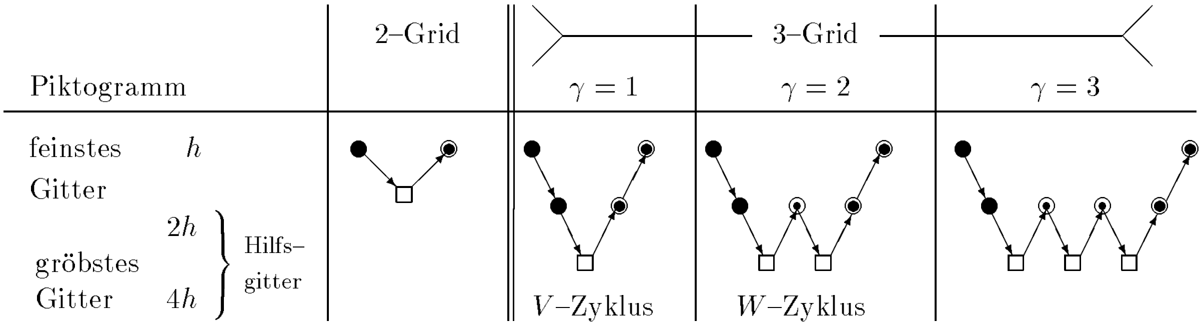
- **In der Praxis werden anstelle von $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{H})$–Zweigittermethoden Multigrid–Methoden mit 4, 5 und mehr Gitterebenen (–levels) benutzt !**

- <u>**Idee:**</u> In



lösen wir $\boxed{K_H\, \underline{\hat{w}}_H^k = \underline{\hat{d}}_H^k}$ approximativ durch γ

$(H, 2H) \equiv (2h, 4h)$ – Zweigitteriteration mit Startnäherung $\underline{\hat{w}}_H^k = \boldsymbol{O}$:



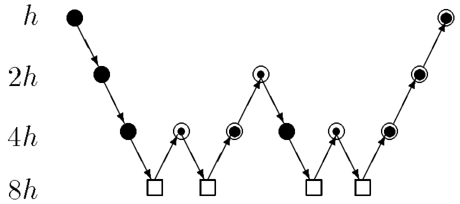
<u>Bezeichnung:</u>

●	Glättung	●	Vorglättung $\to$ Defektberechnung
□	Exakte Lösung	◉	Korrektur $\to$ Nachglättung
↘	Restriktion	⦿	Korrektur $\to$ Nachglättung $\to$
↗	Interpolation		$\to$ Vorglättung $\to$ Defektberechnung

Startlösung für Defektsystem auf Gitter $2h = \boldsymbol{O}$!

Die Fortsetzung dieser Prozedur unter Einbeziehung immer gröberer Gitter bis zu einem „1–Level" (= gröbstes Gitter), auf dem die Defektsysteme $K_{h_1}\, \underline{\hat{w}}_{h_1} = \underline{\hat{d}}_{h_1}$ wegen ihrer kleinen Dimension ohne Probleme schnell aufgelöst werden können, führt zum Multigrid–Verfahren:

Beispiel: 4-Gitter–Methode ($\gamma = 2 : W$–Zyklus)



Rekursive Definition des Multigrid– (Mehrgitter–)Verfahrens:

Bezeichnungen:

Diskretisierungsparameter	: h_1	$>$ h_2	$> \ldots >$	h_q	$> \ldots >$	h_l
Gitterpunktmengen (bzw. Indizes)	: ω_1	ω_2	$\ldots$	ω_q	$\ldots$	ω_l
Räume der Gitterfunktionen	: $\mathbb{G}(\omega_1)$	$\mathbb{G}(\omega_2)$	$\ldots$	$\mathbb{G}(\omega_q)$	$\ldots$	$\mathbb{G}(\omega_l)$
	: $\cong$	$\cong$		$\cong$		$\cong$
Zugeordnete Vektorräume	: $\mathbb{R}^{N_1}$	$\mathbb{R}^{N_2}$	$\ldots$	$\mathbb{R}^{N_q}$	$\ldots$	$\mathbb{R}^{N_l}$
Gitteroperatoren/Systemmatrizen	: K_1	K_2	$\ldots$	K_q	$\ldots$	K_l
Glättungsoperatoren	: G_1	G_2	$\ldots$	G_q	$\ldots$	G_l
Zugeordnete Iterationsmatrizen	: S_1	S_2	$\ldots$	S_q	$\ldots$	S_l

H i l f s g i t t e r

$\boxed{K_l\, \underline{u}_l = \underline{f}_l}$

Standardgitterverfeinerung: $h_q \approx \frac{1}{2} h_{q-1}$ ($\Rightarrow N_q \approx 2^d N_{q-1}$, falls $\Omega \subset \mathbb{R}^d$),

Glättungsprozedur: $G_q^{(V/N)} = G_q^{(V/N))}(\underbrace{\underline{v}_q}_{\text{Startwert}}, \underbrace{\underline{d}_q}_{\text{RS}}) = G_q^{(V/N)}(\underline{v}_q, \underline{d}_q, \underbrace{K_q}_{\text{Systemmatrix}})$,

Restriktionsoperator: $I_q^{q-1} = \left[\equiv \right]_{N_{q-1} \times N_q} : \mathbb{R}^{N_q} \to \mathbb{R}^{N_{q-1}}$ – Projektion, Einschränkung,

schwach besetzt !

Prolongationsoperator: $I_{q-1}^{q} = \left[\equiv \right]_{N_q \times N_{q-1}} : \mathbb{R}^{N_{q-1}} \to \mathbb{R}^{N_q}$ – Interpolation, Erweiterung,

Bemerkung: I_q^{q-1}, I_{q-1}^q werden natürlich nicht gespeichert, sondern $I_q^{q-1} \times \underline{v}_q$ und $I_{q-1}^q \times \underline{v}_{q-1}$ werden programmiert !

Betrachten zunächst einen MGM–Schritt zur Lösung des GS ($q = l$: Ausgangssystem mit $\underline{v}_l \equiv \underline{u}_l$ und $\underline{d}_l \equiv \underline{f}_l$; $q < l$: Defektsystem)

$$K_q \, \underline{v}_q \; = \; \underline{d}_q$$

verbesserte Näherung $\underline{v}_q^{k+1}$

$\uparrow$

in der Form: $\underset{\text{INPUT}}{\underline{v}_q^k} \longmapsto \underset{\text{OUTPUT}}{\underline{v}_q^{k+1}}$: Call **MGM** $(q,\ \underline{v}_q,\ \underline{d}_q,\ K_q)$:

$\nearrow$ $\uparrow$ RS SM

Level Ausgangsnäherung $\underline{v}_q^k$

procedure **MGM** $(q,\ \underline{v}_q,\ \underline{d}_q,\ K_q)$	$K_q \, \underline{v}_q = \underline{d}_q$
□ if $q = 1$ then $\underline{v}_q := K_q^{-1} \, \underline{d}_q$ else	„genaue" Lösung des Grob–gitterproblems $\nearrow$ direkt $\searrow$ iterativ
● begin array $K_{q-1},\ \underline{d}_{q-1},\ \underline{w}_{q-1}, \dots;$ $(*)$	
$\searrow$ for $j := 1$ step 1 until $\boldsymbol{\nu_V(q)}$ do $\underline{v}_q := \boldsymbol{G_q^{(V)}}(\underline{v}_q, \underline{d}_q)$;	Vorglättung
$\underline{d}_{q-1} := \boldsymbol{I_q^{q-1}}(\underline{d}_q - K_q \, \underline{v}_q)$;	Defektberechnung, Restriktion
$[\boldsymbol{K_{q-1}} := I_q^{q-1} \, K_q \, I_{q-1}^q]$;	$(q-1)$-Level–Matrix $\rightarrow$ Galerkin–Zugang
$\underline{w}_{q-1} := \boldsymbol{O}$; | Zweigitterverfahren: $\underline{w}_{q-1} := \boldsymbol{K_{q-1}^{-1}} \underline{d}_{q-1}$ for $j := 1$ step 1 until $\boldsymbol{\gamma(q-1)}$ do **MGM** $(q-1,\ \underline{w}_{q-1},\ \underline{d}_{q-1},\ \boldsymbol{K_{q-1}})$;	Grobgitterkorrektur: $\gamma = 1$: V-Zyklus $\gamma = 2$: W-Zyklus $\gamma = 3$: VW-Zyklus $\gamma(q)=\begin{cases} 1, & q=l-1,l-3,\dots \\ 2, & q=l-2,l-4,\dots \end{cases}$ $\rightarrow$ Alternierender Zyklus usw. ($\rightarrow$ Kap. 4)
$\nearrow$ $\underline{v}_q := \underline{v}_q + \tau_q \, \boldsymbol{I_{q-1}^q} \underline{w}_{q-1}$;	Prolongation, Korrektur
● for $j := 1$ step 1 until $\boldsymbol{\nu_N(q)}$ do $\underline{v}_q := \boldsymbol{G_q^{(V)}}(\underline{v}_q, \underline{d}_q)$;	Nachglättung
end;	

Bemerkung: 1. $\gamma(1) = 1$.

2. Parameter und Komponenten zur Steuerung und Anpassung des MG–Algorithmus an das zu lösende Problem sind fettgedruckt ($\boldsymbol{X}$) hervorgehoben !

Beschreiben nun die Benutzung der Procedur **MGM** ( ) zur Lösung des Ausgangsproblems

$h \; = \; h_l \; : \quad K_h \, \underline{u}_h \; = \; \underline{f}_h$ in $\mathbb{G}(\omega_h)$ bzw. $\mathbb{R}^{N_l}$	$K_l \, \underline{u}_l \; = \; \underline{f}_l$

auf dem feinsten Gitter:

<u>main</u> **MGM** ⋮ <u>array</u> $K_l,\ \underline{f}_l,\ \underline{u}_l,\ \ldots;\quad (*)$ $\underline{u}_l := \underline{u}_l^0;$ (Anfangsnäherung !) <u>for</u> $k := 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> k_ε <u>do</u> **MGM** $(l,\ \underline{u}_l,\ \underline{f}_l,\ K_l)$ ⋮	
$k_\varepsilon = O(\ln \varepsilon^{-1}),\ \ \varepsilon \in (0,1)$ – gewünschte relative Genauigkeit <u>praktisch:</u> Genauigkeitstest, z.B. Defekttest $(\downarrow)$: $\Vert K_l\, \underline{u}_l - \underline{f}_l \Vert \leq \varepsilon \Vert K_l\, \underline{u}_l^0 - \underline{f}_l \Vert.$	

<u>Bemerkungen:</u>

1. <u>Glättung:</u> $\Rightarrow$ üblich: $\nu_V(q) = \nu_V = \text{const.} = 1, 2, \ldots, 4;$ <u>Standard:</u> $\nu_V = 2,$
   $\nu_N(q) = \nu_N = \text{const.} = 0, 1, \ldots, 4;$ <u>Standard:</u> $\nu_N = 1.$

2. <u>V–Zyklus</u>, d.h. $\gamma(q) = 1 \quad \forall\ q = \overline{2, l-1}$:

   (a) reiner V–Zyklus: $\nu_V(q) = \nu_V = \text{const.}$
   $\nu_N(q) = \nu_N = \text{const.}$

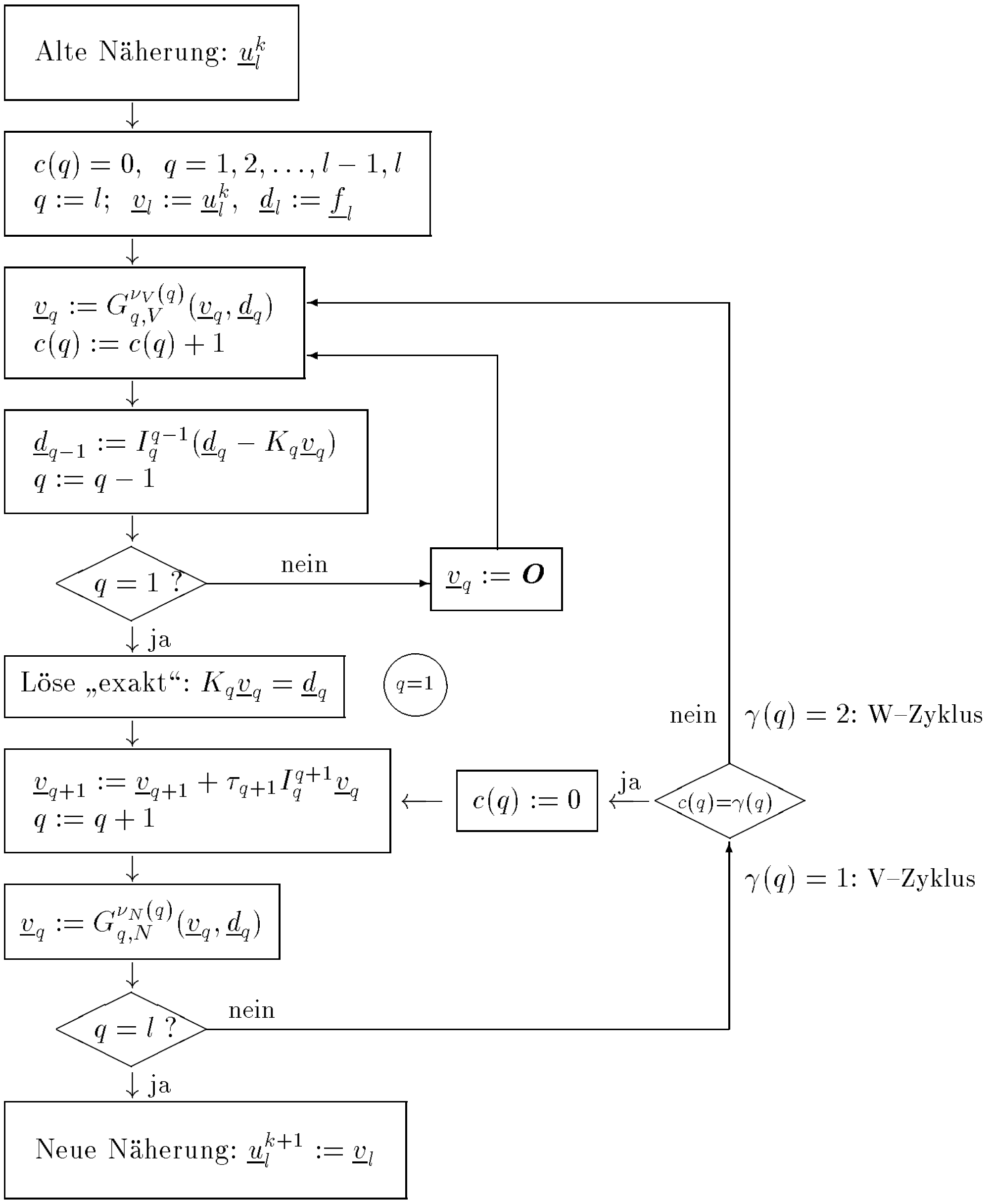
   (b) Verallg. V–Zyklus: $$\left.\begin{array}{lcl} \nu_V(q) & \stackrel{\text{z.B.}}{=} & 2\nu_V(q+1) \\ \nu_N(q) & = & 2\nu_N(q+1) \end{array}\right\}\ q = \overline{2, l-1}$$

3. <u>Speicherplatz:</u> $(*)$ <u>array</u> $K_q,\ \underline{d}_q,\ \underline{v}_q,\ \ldots \quad \Rightarrow M_q \leq c\, N_q$!
   Dann erhalten wir aus der Bedingung $N_q \leq N_{q+1}/2^d$ sofort:

$$M \leq \sum_{q=1}^{l} c\, N_q = c\, N_l \sum_{q=1}^{l} \left(\frac{1}{2^d}\right)^{q-1} = c\, \frac{1 - \left(\frac{1}{2^d}\right)^l}{1 - \frac{1}{2^d}}\, N_l \leq c\, \frac{2^d}{2^d - 1}\, N_l$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M \ \leq \left\{ \begin{array}{l} c\,\frac{4}{3}\, N_l, \text{ für } d = 2 \\ c\,\frac{8}{7}\, N_l, \text{ für } d = 3 \end{array} \right.}$$

- **PAP für MG–Algorithmus zur Lösung von $K_l \underline{u}_l = \underline{f}_l$,** falls zur Programmierung eine Programmiersprache verwendet werden soll, die keinen rekursiven UP–Aufruf hat, wie z.B. BASIC und FORTRAN: $\underline{u}_l^k \longmapsto \underline{u}_l^{k+1}$



3.3 Die Full-Multigrid–Methode (FMGM)

3.3.1 Der FMGM–Algorithmus

- **FMGM** = „Nested–Iteration"–Prinzip + MGM (als „Nested–Iteration")
  = Prinzip der geschachtelten Iteration + MGM

- **Idee:** Im Multigrid–Algorithmus aus Pkt. 3.2 wurde vom feinsten Gitter (mit dem Index l) ausgegangen. Um eine möglichst gute Startnäherung $\underline{u}_l^0$ zu erhalten, ist es aber oft sinnvoll, vom gröbsten Gitter auszugehen und unter Anwendung des Nested–Iteration–Prinzips immer feinere und feinere Gitter einzubeziehen, bis hin zum gewünschten feinsten Gitter !

- **Dann ergibt sich der folgende Algorithmus:**

```
main  FMGM
  ⋮
u_1 := K_1^{-1} f_1
for   q := 2 step 1 until l do
      begin   u_q := I⃗^q_{q-1} u_{q-1} (Startnäherung für Level q)
              for k := 1 step 1 until k_q do
                   MGM (q, u_q, f_q, K_q)
      end
```

Hierbei sind:

$K_q\,\underline{u}_q = \underline{f}_q$ – Gleichungssystem, das bei der Diskretisierung des RWP bzgl. des Gitters mit dem Index q entsteht,

$\vec{\boldsymbol{I}}^{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{q-1}}: I\!R^{N_{q-1}} \to I\!R^{N_q}$ – Interpolationsoperator für die volle Approximation:
$\Rightarrow$ möglich: $\vec{I}^q_{q-1} = I^q_{q-1}$,
besser: $\vec{I}^q_{q-1}$ = Interpolationsoperator höherer Genauigkeit,

$\boldsymbol{k_q}$ – Anzahl der „nested" MG–Iterationen, d.h. Anzahl der Multigrid–Schritte auf dem „nested" Gitter mit dem Index q:
$\Rightarrow$ praktisch: $k_q = 1, 2$ für $q = \overline{2, l-1}$,
$k_l = 1, 2, \ldots, 4$,
$\Rightarrow$ theoretisch: $k_q = k_* \neq k_*(q)$
$\Longrightarrow$ Iteration zum Diskretisierungsfehler (siehe Kap. 4) !

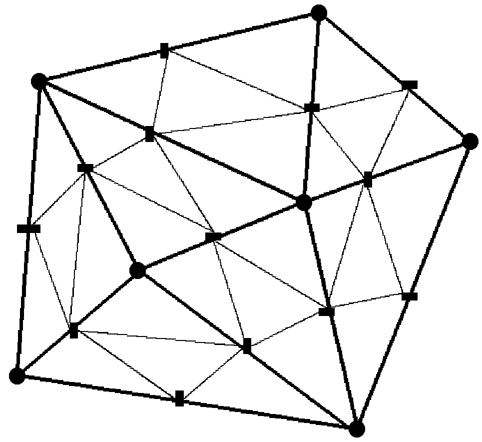
- **Bemerkung:**
  FMGM bietet die Möglichkeit einer adaptiven Netzverfeinerung, denn zur Konstruktion des Gitters „q“ kann $\underline{u}_{q-1} \equiv \underline{u}_{q-1}^{k_{q-1}}$ genutzt werden !
  Literatur: [16] (Brandt A.), [5] (Bank R.E., Weiser A.).

- $\boxed{\textbf{Ü 3.1}}$ Zeichnen Sie das Piktogramm für die FMGM mit den folgenden Parametern:
  $l = 4,\ \gamma = 2,\ k_2 = k_3 = 1,\ k_4 = 2.$

3.3.2 Die Konstruktion des feinen Gitters

Wie generiert man das nächstfeinere Gitter ?
Geg.: $\tau_{q-1}, \omega_{q-1}, \underline{u}_{q-1}$.
Ges.: τ_q, ω_q.

2D–Fall: lineare Dreieckselemente, gleichmäßige Verfeinerung

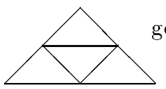
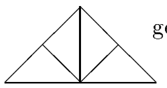


τ_{q-1}, $\bullet \in \omega_{q-1}$

τ_q, $\blacksquare \in \omega_q \setminus \omega_{q-1}$

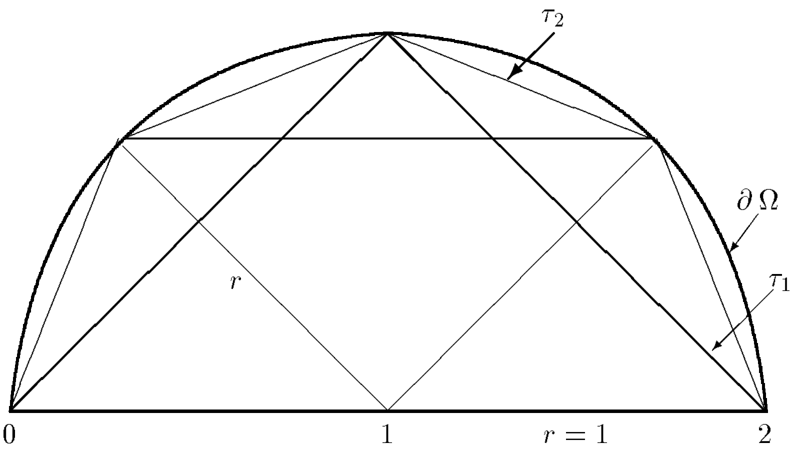
reguläre, gleichmäßige Verfeinerung,
d.h. jedes Dreieck wird in
4 kongruente Teildreiecke zerlegt

- Qualität eines Dreiecks wird mittels $\frac{\text{Inkreisrad.}}{\text{Umkreisrad.}} = \frac{\rho_I}{\rho_A}$ gemessen.
- Ein Dreieck heißt degeneriert, wenn $\frac{\rho_I}{\rho_A}$ nahe Null ist.

- Ω geradlinig begrenzt $\Longrightarrow \min\limits_{\tau_q} \frac{\rho_{I,q}(\tau_q)}{\rho_{A,q}(\tau_q)} \geq c = \text{const.} > 0 \quad \forall\, q = \overline{1,l}, \quad c \neq c(q)$
  Eine solche Vernetzung heißt **stabil**.
- 2 Möglichkeiten der Dreiecksviertelung:
  - Viertelung:  $\stackrel{\text{geradlinig}}{\Longrightarrow}$ 4 kongruente Teildreiecke
  - zweistufige Bisektion:  $\stackrel{\text{geradlinig}}{\Longrightarrow}$ 4 Ähnlichkeitsklassen [6] (längste Seite !)

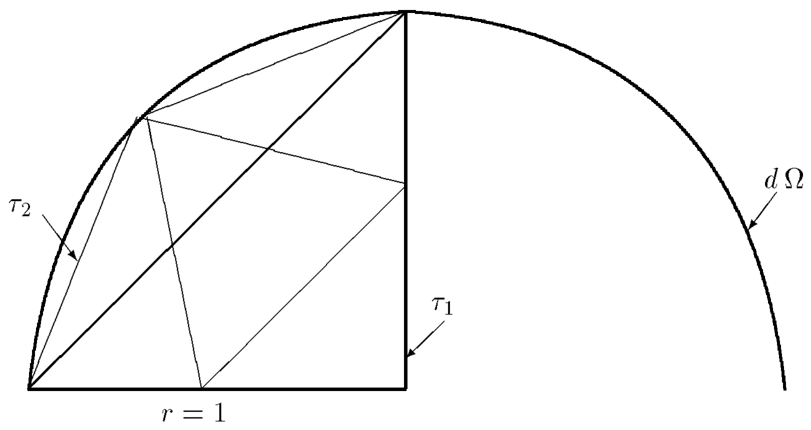
■ Ω krummlinig begrenzt
$\Longrightarrow$ ungünstige Anfangsvernetzung führt zu degenerierenden Dreiecken, d.h. $\dfrac{\rho_I}{\rho_A} \overset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0$, und somit zu einer instabilen Vernetzung.

▷ <u>Instabile Vernetzung (Viertelung)</u>



$$\boxed{\frac{\pi^2}{6}\,h_q^2 \leq \frac{\rho_{I,q}}{\rho_{A,q}} \leq \frac{\pi^2}{2}\,h_q^2 = O\left(h_q^2\right)} \underset{q\to\infty}{\overset{h\to 0}{\longrightarrow}} 0$$

▷ <u>Stabile Vernetzung (Viertelung)</u>
$\to$ Vermeidung von 2 gekrümmten Randseiten pro Dreieck in der Ausgangsvernetzung.

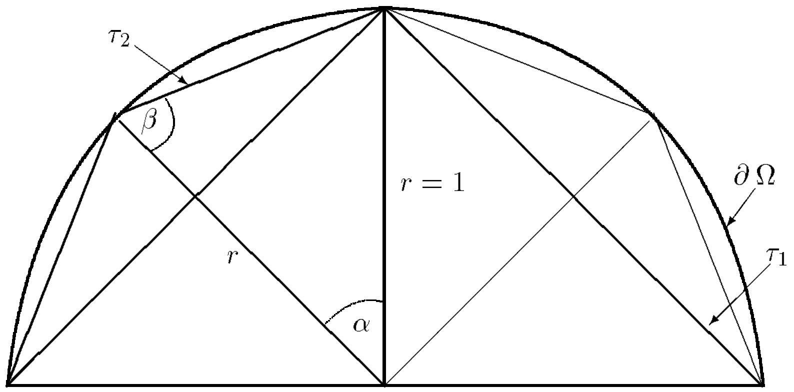


$$\boxed{\frac{r_{I,q}}{r_{A,q}} = O\left(1\right) \quad \forall\, q = \overline{1,l}}$$

Anmerkung: • $\frac{r_I}{r_A}$ kann max. $\frac{1}{2}$ annehmen (gleichseitiges Dreieck) !

▷ Stabile Vernetzung (zweistufige Bisektion)

$\rightarrow$ Vermeidung von 2 gekrümmten Randseiten pro Dreieck im feineren Netz.



- Die weitere Verfeinerung ab dem 2. Gitter τ_2 kann auf den vorigen Fall einer stabilen Vernetzung zurückgeführt werden.
- Falls die zweistufige Bisektion auch auf den feineren Gittern $\tau_2, \ldots, \tau_{l-1}$ angewandt wird, sichert nur eine Bisektion der längsten Seite eine stabile Vernetzung.
- Es gilt: $\frac{\rho_I}{\rho_A} = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$

  Gleichschenkeliges $\triangle$: $\frac{\rho_I}{\rho_A} = 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2\frac{\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2}\,(1-\cos\beta)$

  $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ $\qquad \frac{\rho_I}{\rho_A} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,(1-\sin\frac{\alpha}{2})$

$$\Rightarrow \quad \tau_1 : \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\rho_I}{\rho_A}\right)_1 = \sqrt{2} - 1 \qquad \approx 0.4142$$

$$\tau_2 : \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{\rho_I}{\rho_A}\right)_2 = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx 0.4725$$

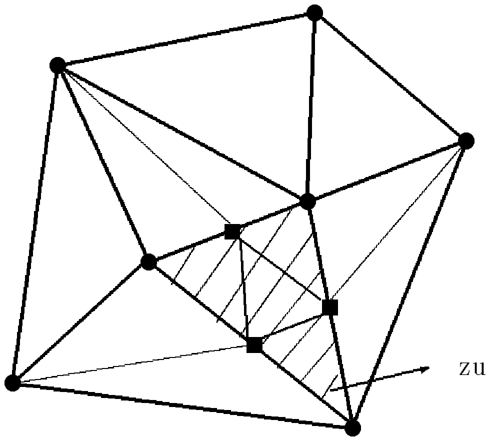
$\Rightarrow$ Die Qualität des Netzes τ_2 ist hier (lokal) besser als die Qualität von τ_1 !

! Vorsicht bei konkaven Gebietsrändern !

2D–Fall: adaptive Verfeinerung

Adaptive Verfeinerung: Nutzen die bekannte iterative Lösung $\underline{u}_{q-1}$, um den Fehler $z_{q-1} = u - u_{q-1}$ lokal abzuschätzen (verschiedenste Schätzer/Indikatoren möglich). Das Gitter τ_{q-1} wird nur dort verfeinert, wo der geschätzte Fehler relativ groß ist (siehe z.B. [44]).

$\oplus$ Gleiche Genauigkeit der Lösung $\underline{u}_q$ bei weniger Knoten im Vergleich zu einer gleichmäßigen Verfeinerung $\longrightarrow$ geringerer arithmetischer Aufwand !

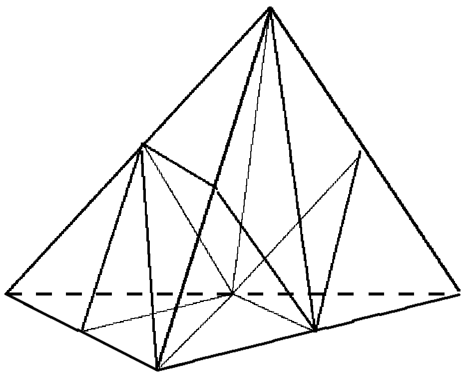


Algorithmus:
1. gleichmäßige Verfeinerung der markierten Elemente (rote Verfeinerung).
2. regulärer Abschluß der Verfeinerung (green closure).

Die Teilelemente des grünen Abschlusses haben i. a. eine schlechtere Qualität als das Ausgangselement.
$\Rightarrow$ Bei mehrmaliger adaptiver Verfeinerung müssen die am grünen Abschluß beteiligten Elemente temporär wieder vergröbert werden (hier: Halbierung zurücknehmen).

3D–Fall 4 Knoten–Tetraedernetze: gleichmäßige Verfeinerung

▷ Dreifache Bisektion: Auf jeder der 4 Tetraederflächen wird eine zweifache Bisektion nach der längsten Seite durchgeführt. Jeweils 3 bzw. 4 der Bisektionskanten definieren eine Schnittfläche.



Diese Unterteilung in 8 kleine Tetraeder ist stabil, da nur endlich viele Tetraedertypen entstehen [6], d.h., $\exists\, c > 0 : \ \rho_I/\rho_A \geq c \quad \forall\, \tau_q$

▷ Achtelung: [8]
Ziel: Analog zur Dreiecksviertelung in 2D soll ein Tetraeder T in 8 volumengleiche Teiltetraeder T_i $(i = \overline{1,8})$ unterteilt werden.

- <u>Schritt A:</u> Abschneiden der 4 zu T ähnlichen Tetraeder an den Ecken von T (Viertelung der Tetraederflächen).

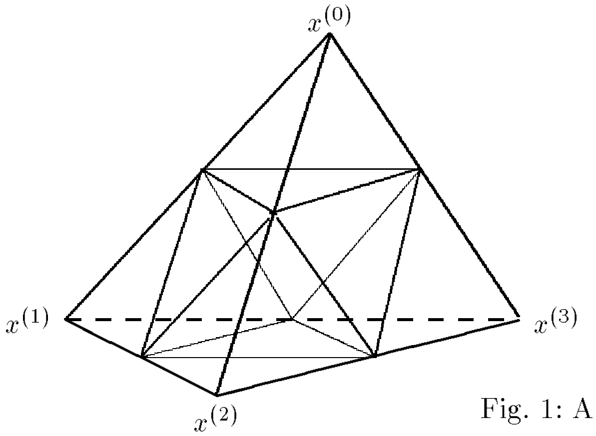


Fig. 1: Abschneiden der Ecken

$\Longrightarrow$ Tetraeder T_1, T_2, T_3, T_4 + Oktaeder O

- <u>Schritt B:</u> Das Oktaeder O besitzt 3 Mittelebenen (def. durch jeweils 4 Kantenmittelpunkte des Ausgangstetraeders T), welche O in zwei bis auf Spiegelung kongruente Pyramiden zerlegt.

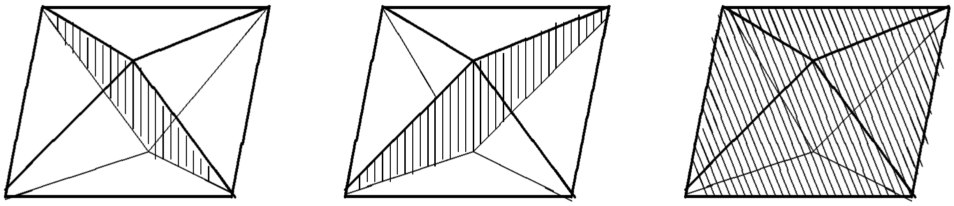


Fig. 2: Die 3 Schnittebenen des Oktaeders O

Zerschneidet man O entlang von zweien dieser Parallelogramme, so entstehen 4 Tetraeder gleichen Volumens.

Frage: Welche 2 Schnittebenen muß man für eine stabile Verfeinerung auswählen ?

$\Rightarrow$ Eine stabile Vernetzung kann nur durch eine zyklische Vertauschung der Schnittebenen mit fortschreitender Verfeinerung erreicht werden (nur 6 Ähnlichkeitsklassen) [8].

$\Rightarrow$ Rekursiver Algorithmus (Reihenfolge/Orientierung der Knoten wichtig !)
Verfeinere ($T = [x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}]$)
begin

$$T_1 := \left[\quad x^{(0)} \quad , \tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(1)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(2)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(3)}\right) \right]$$

$$T_2 := \left[\tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(0)}\right), \quad x^{(1)} \quad , \tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(3)}\right) \right]$$

$$T_3 := \left[\tfrac{1}{2}\left(x^{(2)} + x^{(0)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(2)} + x^{(1)}\right), \quad x^{(2)} \quad , \tfrac{1}{2}\left(x^{(2)} + x^{(3)}\right) \right]$$

$$T_4 := \left[\tfrac{1}{2}\left(x^{(3)} + x^{(0)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(3)} + x^{(1)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(3)} + x^{(2)}\right), \quad x^{(3)} \quad \right]$$

$$T_5 := \left[\tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(1)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(2)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(3)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(3)}\right) \right]$$

$$T_6 := \left[\tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(1)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(2)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(3)}\right) \right]$$

$$T_7 := \left[\tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(2)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(3)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(3)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(2)} + x^{(3)}\right) \right]$$

$$T_8 := \left[\tfrac{1}{2}\left(x^{(0)} + x^{(2)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(3)}\right), \tfrac{1}{2}\left(x^{(2)} + x^{(3)}\right) \right]$$

for $i = 1, 8$ do if Weiterverfeinern (T_i) then Verfeinere (T_i)
end

- ▷ Orientierung der 4 (zu T ähnlichen) Tetraeder T_1, T_2, T_3, T_4 ist wieder die Orientierung des Ausgangstetraeders T, siehe Fig. 1.
- ▷ Hat das Ausgangstetraeder T eine Orientierung gemäß Fig. 1, so wird das Oktaeder O durch die 2 linken Schnittebenen in Fig. 2 in T_5, T_6, T_7, T_8 unterteilt (Fig. 3).

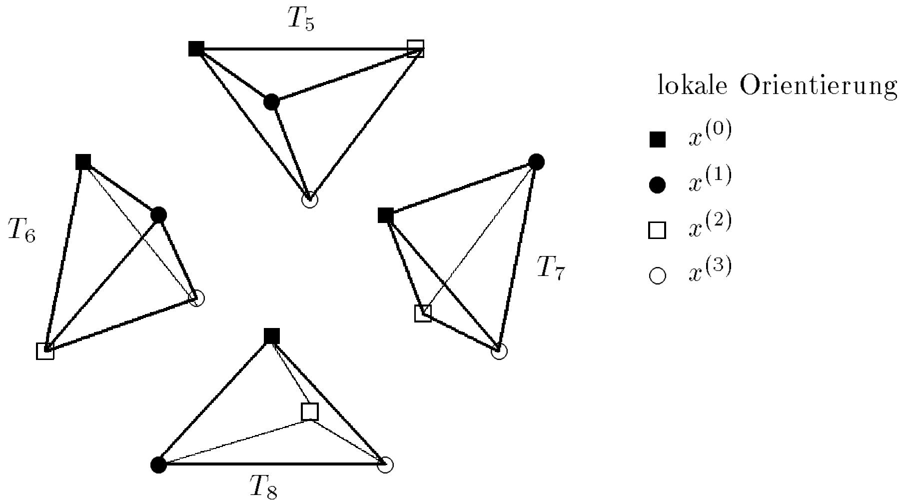


Fig. 3: Unterteilung des Oktaeders mit Orientierung der Teiltetraeder

- ▷ Weitere Unterteilungen erfolgen rekursiv in den Teiltetraedern $T_i \quad i = \overline{1,8}$ entsprechend der Orientierung.

3D–Fall: adaptive Verfeinerung:

Analog wie im 2D–Fall ist ein „grüner“ Abschluß notwendig. In jedem Tetraeder des grünen Abschlusses muß beim weiteren Vorgehen je nach Anzahl und Lage der bereits unterteilten Randkanten unterschieden werden.

3.4 Algebraisches Multigrid

3.4.1 Grundidee

Betrachten zunächst den Fall, daß man aus den Informationen des feinsten Gitters

▷ Matrix $K_h = K_l,\ f_h = f_l$

▷ Gitter $\tau_h = \tau_l,\ w_l$

die folgenden Komponenten der Grobgitter konstruieren kann:

▷ Grobgitter $\tau_q,\ w_q$ $\qquad q = \overline{1, l-1},$

▷ Transferoperatoren $I^q_{q-1},\ I^{q-1}_q$ $\qquad q = \overline{2, l},$

▷ Matrizen K_q $\qquad q = \overline{1, l-1}.$

▷ rechte Seite f_q $\qquad q = \overline{1, l-1}$

Nach der Def. geeigneter Glättungsoperatoren S_q wendet man auf die entstandene Gitterfolge $\{\tau_q\}_{q=1}^l$ den Multigridalgorithmus MGM an.

- Falls keine Gitterinformation τ_l vorliegt, muß man sich ein rein algebraisches Multigridverfahren konstruieren (→ Pkt. 3.4.4).

3.4.2 Eine exakte Zweigittermethode

Annahme: Es existiere bereits eine Einteilung der Knoten in

Grobgitterknoten	„C“	mit Indexmenge	w_C	und
Nichtgrobgitterknoten	„F“	–”–	w_F	

⟶ Ausgangsproblem

$$(1) \qquad \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CF} \\ K_{FC} & K_{FF} \end{bmatrix}}_{=K} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_C \\ \underline{u}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_C \\ \underline{f}_F \end{bmatrix}}$$

$$\left.\begin{matrix} u_C \in \mathbb{R}^{N_C} \\ u_F \in \mathbb{R}^{N_F} \end{matrix}\right\} u \in \mathbb{R}^N$$

Mittels $T = \begin{bmatrix} I & \mathbf{O} \\ K_{FF}^{-1} K_{FC} & I \end{bmatrix}$ wird K aus (1) in der Blockdiagonalform

(2) $$\boxed{K = T^T \begin{bmatrix} S_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & K_{FF} \end{bmatrix} T}$$

dargestellt.

Die Matrix

$$S_C = K_{CC} - K_{CF}\, K_{FF}^{-1}\, K_{FC}$$

heißt Schurkomplement (bzgl. der F-Komponenten).

Definieren:

$$P := \begin{pmatrix} I \\ -\,K_{FF}^{-1} K_{FC} \end{pmatrix},\ R := \begin{pmatrix} I & -\,K_{CF}\, K_{FF}^{-1} \end{pmatrix},\ G := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{FF}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Lemma 1:

Bezüglich der Transferoperatoren P, R stellt das Schur-Komplement den Galerkin–Grobgitteroperator dar, d.h.

(3) $$\boxed{S_C \;=\; R\, K\, P}$$

Beweis: Übung (einfaches Nachrechnen) ■

Lemma 2:

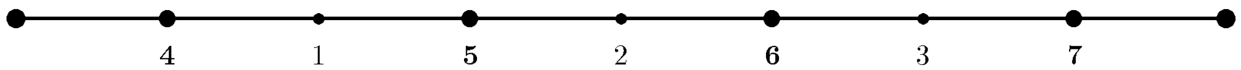
Die Zweigittermethode, bestehend aus der durch P, R, S_C definierten Grobgitterkorrektur und dem Nachglättungsschritt $I - GK$, ist exakt.

Beweis: Man sieht leicht, daß $G = T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{FF}^{-1} \end{pmatrix} T^{-T}$, $P\, S^{-1} R = T^{-1} \begin{pmatrix} S_C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-T}$ und $K^{-1} = T^{-1} \begin{pmatrix} S_C^{-1} & 0 \\ 0 & K_{FF}^{-1} \end{pmatrix} T^{-T}$ gilt, wobei $T^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -K_{FF}^{-1} K_{FC} & I \end{pmatrix}$ und $T^{-T} = \begin{pmatrix} I & -K_{CF} K_{FF}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ist.

Die Iteration mit dem Multigridoperator M wird als $\underline{u}^{k+1} = (I - M)\, K^{-1} f + M\, u^k$ geschrieben. Falls nun der Fehlerübergangsoperator M Null ist, ist die Zweigittermethode exakt.

$$
\begin{aligned}
M_{\text{exakt}} &= \overbrace{(I - GK)}^{\text{Nachglättung}}\ \overbrace{(I - P\,S_C^{-1} R\,K)}^{\text{Grobgitterkorrektur}} = \\
&= \left(I - T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{FF}^{-1}\end{pmatrix} T^{-T} K\right)\left(I - T^{-1}\begin{pmatrix} S_C^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} T^{-T} K\right) = \\
&= \underbrace{I - \underbrace{T^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{FF}^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_C^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) T^{-T}}_{\overset{(2)}{=}\, K^{-1}} K}_{0} + \\
&\qquad\qquad + T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{FF}^{-1}\end{pmatrix} T^{-T}\ \underset{(2)\ \text{einsetzen}}{K}\ T^{-1}\begin{pmatrix} S_C^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} T^{-T} K = \\
&= T^{-1}\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{FF}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_C & 0 \\ 0 & K_{FF}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}}\begin{pmatrix} S_C^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{0} T^{-T} K = 0 \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

<u>MBsp. 1:</u> $N = 7,\ h = \frac{1}{8}$ $\quad (-u'' = f,\ u(0) = u(1) = 0 \quad x \in (0,1))$



$$
K_h = \frac{1}{h^2}\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|cccc}
2 & & & -1 & -1 & & \\
& 2 & & & -1 & -1 & \\
& & 2 & & & -1 & -1 \\ \hline
-1 & & & 2 & & & \\
-1 & -1 & & & 2 & & \\
& -1 & -1 & & & 2 & \\
& & -1 & & & & 2
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ C \\ \\ \\ \mathbf{F} \\ \\ \\ \end{array} \\
\quad C \qquad\qquad \mathbf{F}
\end{array}
= \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CF} \\ K_{FC} & K_{FF} \end{bmatrix}
$$

$$
P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \\ 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} = -\,K_{FF}^{-1}K_{FC} \qquad \text{lineare Interpolation !}
$$

$$
R = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & & & 1 & 1 & & \\ & 2 & & & 1 & 1 & \\ & & 2 & & & 1 & 1 \end{bmatrix} = -\,K_{CF}K_{FF}^{-1} \qquad \text{lineare Restriktion !}
$$

$$K_H := S_C = R\,K_h \cdot P = \frac{1}{(2\,h)^2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Die Grobgittermatrix S ist bis auf den Faktor 2 gleich der FDM-Matrix K_H des groben Gitters (dann ist aber full weighted restriction $R = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & & & 1 & 1 & & \\ & 2 & & & 1 & 1 & \\ & & 2 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$ für die Erfüllung der Galerkinbedingung notwendig).

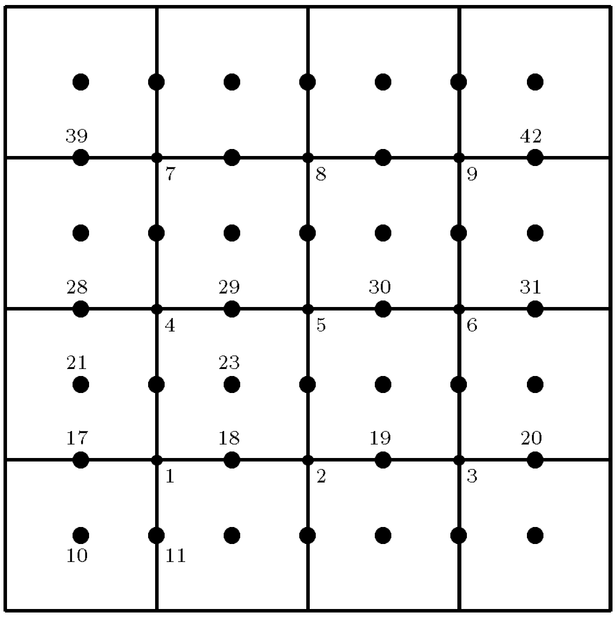
! K_{FF} ist Diagonalmatrix
$\Rightarrow$ leicht invertierbar
$\Rightarrow$ keine Fernwirkung.

MBsp. 2: $N = 7,\ h = \frac{1}{8}$ $\quad (-\Delta u = f,\ u|_\Gamma = 0 \quad (x,y) \in (0,1)^2)$

FEM: $K_h = \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$

K_{FF} keine Diagonalmatrix
$\rightarrow$ Invertieren genauso teuer wie Lösen der Ausgangsaufgabe

$\Rightarrow$ Exaktes MG nicht brauchbar in 2D !



(Fig. 1)

$\omega_C = \{1, \ldots, 9\}$
$\omega_F = \{10, \ldots, 49\}$

Betrachten trotzdem einmal die Struktur der Transfermatrizen P, R und des Schur–Komplements bei einem exakten Zweigitterverfahren.

$$P = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccc} & & I_C & & & & & & \\ 0.169 & 0.014 & 0.001 & 0.014 & \dots & & & & \\ 0.338 & 0.049 & 0.004 & 0.008 & \dots & & & & \\ 0.183 & 0.184 & 0.015 & 0.016 & 0.017 & \dots & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0.055 & 0.055 & 0.005 & 0.351 & 0.352 & 0.009 & 0.055 & 0.055 & 0.0054 \\ \vdots & & & & & & & & \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{r} \\ \text{Zeile } 10 \\ 11 \\ 12 \\ \\ 29 \\ \\ \end{array}$$

$R = P^T$

$$S_C = RK_hP = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{ccccccccc} \vdots & & & & & & & & \\ -\mathbf{0.48} & \underline{-1.88} & -\mathbf{0.48} & \underline{-1.88} & \boxed{10.4} & \underline{-1.88} & -\mathbf{0.48} & \underline{-1.88} & -\mathbf{0.48} \\ \vdots & & & & & & & & \\ -0.008 & -0.05 & -0.07 & -0.05 & -\mathbf{0.48} & \underline{-1.8} & -0.07 & \underline{-1.8} & \boxed{10.5} \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \text{Zeile 5} \\ \\ \text{Zeile 9} \end{array}$$

<u>Beobachtung:</u> Die Struktur der betragsmäßig größten Einträge in $P\,(R)$ und S_C entspricht der Struktur einer bilinearen Interpolation/Restriktion und dem 5-Punkte Differenzenstern einer Grobgittermatrix bzw. eines **9-Punkte Differenzensterns**.

<u>Frage:</u> Wie weit ist das übliche Zweigitterverfahren (mit linearer Interpolation/Restriktion) vom exakten Zweigitterverfahren entfernt, d.h., wie groß ist
$\kappa([\underbrace{(I - M_{\text{real}})K^{-1}}_{C^{-1}-\text{Vorkonditionierer}}] \cdot K) = \kappa\,(I - M_{\text{real}})$?

<u>Antwort:</u> Kap. 5.2

3.4.3 Geometrisches Zweigitterverfahren / Multigrid

<u>MBsp. 2</u> $\rightarrow$ Exaktes Multigrid nicht realisierbar.

$\rightarrow$ Idee: Approximation von $-K_{FF}^{-1}K_{FC}$ durch einen geeigneten Operator B_{FC}.

geom. $\downarrow$ τ_h entstand aus τ_H !

▷ Knoten „C“ und „F“ spannen mittels der FE–Knotenbasis $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ den FE–Ansatzraum auf, welcher durch die Basistransformation $T = \begin{bmatrix} & 0 \\ P & I \end{bmatrix}$ in die orthogonalen Teilräume

$$\mathbf{V}_F = \text{span}\left(\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}\right) \qquad\qquad \mathbf{V}_C = \text{span}(\Phi \cdot P)$$

zerlegt wird. $\left(\rightarrow \text{Diagonalmatrix} \begin{bmatrix} S_C & 0 \\ 0 & K_{FF} \end{bmatrix}\right)$

▷ Ersetzt man $P = \begin{pmatrix} I \\ -K_{FF}^{-1}K_{FC} \end{pmatrix} \longrightarrow \widetilde{P} = \begin{pmatrix} I \\ B_{FC} \end{pmatrix}$, verliert man diese Orthogonalität bei den Räumen $\widetilde{\mathbf{V}}_C = \mathrm{span}\,(\Phi\,\widetilde{P})$ und $\widetilde{\mathbf{V}}_F = \mathrm{span}\left(\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}\right)$.

<u>**Lemma 3:**</u> Sei $D_C = \left(B_{FC}^T + K_{CF}K_{FF}^{-1}\right) K_{FF} \left(B_{FC} + K_{FF}^{-1}K_{FC}\right)$ die Störung des Schurkomplements $S_C = K_{CC} - K_{CF}K_{FF}^{-1}K_{FC}$, so läßt sich der Winkel zwischen den Räumen $\widetilde{\mathbf{V}}_C$ und $\widetilde{\mathbf{V}}_F$ mittels

$$\gamma := \cos \sphericalangle \left(\widetilde{\mathbf{V}}_C, \widetilde{\mathbf{V}}_F\right) = \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}$$

ausdrücken, wobei $\mu = \rho\,(S_C^{-1}D_C)$ der Spektralradius von $S_C^{-1}D_C$ ist.

<u>Beweis:</u> [20]

<u>**Satz 1:**</u> Definieren einen Zweigitteralgorithmus wie folgt

- $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} I \\ B_{FC} \end{pmatrix}, \qquad R = \widetilde{P}^T$
- $\widetilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_F^{-1} \end{bmatrix}, \qquad C_F = C_F^T > 0$
- Grobgitterlöser $C_C = C_C^T > 0$

mit den Spektraläquivalenzungleichungen $(\gamma > 0)$

(4) $\quad \underline{\gamma}_C C_C \le S_C + D_C \le \bar{\gamma}_C C_C$ und $\underline{\gamma}_F C_F \le K_F \le \bar{\gamma}_F C_F$

und $\quad S_C = K_C - K_{CF}K_F^{-1}K_{FC}$
$\quad D_C = \left(B_{FC}^T + K_{CF}K_F^{-1}\right) K_F \left(B_{FC} + K_F^{-1}K_{FC}\right).$

Sei $\quad \mu = \rho\,(S_C^{-1}D_C)$ der Spektralradius von $S_C^{-1}D_C$ und

(5) $\quad \rho_F = \max\left\{|1 - \underline{\gamma}_F|, |1 - \bar{\gamma}_F|\right\}$
$\quad \rho_C = \max\left\{|1 - \underline{\gamma}_C|, |1 - \bar{\gamma}_C|\right\}$,

dann läßt sich die Konvergenzrate q des Zweigitteralgorithmus zu

(6) $$\boxed{q = \rho_C + (1 - \rho_C)\left(\rho_F + (1 - \rho_F)\sqrt{\mu/(1+\mu)}\right)^2}$$

abschätzen, falls $\rho_C, \rho_F \in [0, 1)$.

<u>Beweis:</u> [40]

<u>Bemerkung:</u> Wie aus (6) ersichtlich ist, wird für $\rho_C = \rho_F = 0$ die Konvergenzrate $q = \frac{\mu}{1+\mu}$, d.h., sie wird von der Güte der Interpolation/Restriktion bestimmt.

3.4.3.1 Schlußfolgerungen aus Satz 1

Um ein gutes und schnelles algebraisches Zweigitterverfahren zu erhalten, muß

(A) $C_F \sim K_{FF} \to \widetilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_F^{-1} \end{pmatrix}$ Glättung $\Downarrow$ $\underline{\gamma}_F, \bar{\gamma}_F$ beliebig gut

(B) $\widetilde{S}_C = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hängt von Prolongation/Restriktion ab !}}}{\widetilde{S}_C} (B_{FC}) = \widetilde{S}\,(P) \sim \widetilde{C}_C$

Pattern $(\widetilde{S}) \stackrel{!}{\Longleftarrow} P, R = P^T$

- Wünschenswert ist ein Besetztheitsmuster analog zu K_h. (Multigrid !)

(C) $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} I \\ B_{FC} \end{pmatrix}$ sollte lokal realisierbar sein, aber gleichzeitig den $\sphericalangle(\widetilde{\mathbf{V}}_C, \widetilde{\mathbf{V}}_F)$ nahe $\frac{\pi}{2}$ halten.

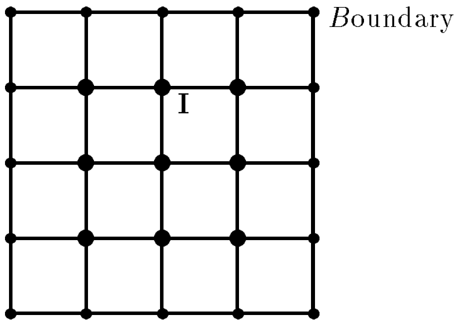
- Keine Invertierung von K_{FF} !

3.4.3.2 Die Prolongation $\widetilde{P}$

$P = \begin{pmatrix} I \\ -K_{FF}^{-1} K_{FC} \end{pmatrix}$ ist eine diskrete, harmonische Erweiterung unter Beachtung von K_{FF}.

▷ Betrachten zur Motivation der harmonischen Erweiterung das Problem:

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \partial\,\Omega \end{aligned}}$$

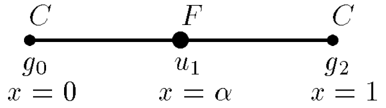


mit der Diskretisierung:

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{O} \\ K_{IB} & K_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_B \\ \underline{u}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{g} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \underline{u}_I = -K_{II}^{-1} K_{IB}\, \underline{g}$ dies ist analog zu $-K_{FF}^{-1} K_{FC}$ $\boxed{F \to I}$

▷ In 1D ist die harmonische Erweiterung nichts weiter als die gewichtete lineare Interpolation.



$$\boxed{\begin{aligned} -u''(x) &= 0, & x \in (0,1), \\ u(0) &= g_0, & \\ u(1) &= g_2, & \end{aligned}}$$ harmonische Erweiterung in 1D

Diskretisierung: $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \\ g_2 \end{bmatrix}}_{\underline{f}} \qquad K_{11} = -(K_{10}+K_{12})$$

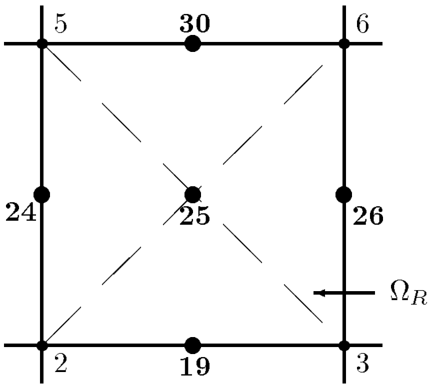
$\Rightarrow$ (7) $$\boxed{u_1 = (1-\alpha)\, g_0 + \alpha \cdot g_1 = \frac{1}{K_{10}+K_{12}} \Big\{ K_{10}\, g_0 + K_{12}\, g_2 \Big\}}$$

$\longrightarrow$ vgl. MBsp. 1 in 3.4.1 $\qquad\uparrow$ Allg. Matrizen !

- Interpolationsgewichte sind von Koeff. der Matrix abhängig.

▷ Approximieren $-K_{FF}^{-1}K_{FC}$ im 2D Fall durch 1D–homogene Erweiterungen (9 Punkte–Differenzenstern)

(Fig. 1) $\rightarrow$



$\{2,3,5,6\} \subset \omega_C$

$\{19,24,25,26,30\} \subset \omega_F$

- $u_{19}, u_{24}, u_{26}, u_{30}$ werden analog zu (7) berechnet.
- u_{25}: a) $u_{25} := \dfrac{1}{K_{25,2}+K_{25,6}} \Big\{ K_{25,2} \cdot g_2 + K_{25,6} \cdot g_6 \Big\} \Longrightarrow$ gewichtete lineare Interpolation (nur 9-Punkte-Stern möglich !)

  b) Bestimme diskrete, harmonische Erweiterung in Ω_R, d.h. löse $0 = \underset{\substack{\uparrow \\ 25\text{–te Zeile}}}{K_{25,*}} \cdot \underline{u}$

$$u_{25} = \frac{-1}{K_{25,25}} \Big\{ K_{25,19}\, u_{19} + K_{25,24}\, u_{24} + K_{25,26}\, u_{26} + K_{25,30}\, u_{30} \Big\}$$

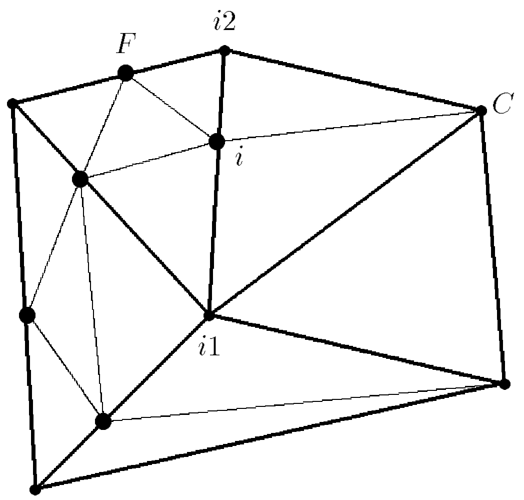
$\vdots$

weiteres Einsetzen der $u_{19}, \ldots, u_{30}$ aus a)

hier gilt: $K_{25,25} = -\Big\{ K_{25,19} + K_{25,24} + K_{25,26} + K_{25,30} \Big\}$

$\Longrightarrow$ gewichtete bilineare Interpolation auch auf 5 Punkte–Stern

▷ Allgemeine Netze mit $\tau_H \subset \tau_h$, d.h. das Feingitternetz entstand durch reguläre Verfeinerung.



$i1, i2 \in \omega_C$
$i \in \omega_F$

Bezeichnung: Vater: Knoten auf Grobnetz
Sohn: neuer Knoten auf Feinnetz mit (mind.) 2 Vätern $(i1, i2)$

$\Longrightarrow$ Gewichtete lineare Interpolation:

$$\text{(8)} \qquad \boxed{u_i := \frac{1}{K_{i,i1} + K_{i,i2}} \Big\{ K_{i,i1} \cdot g_{i1} + K_{i,i2} \cdot g_{i2} \Big\}}$$

$\Rightarrow$ Interpolationsgewichte: $\alpha_{i,i1} := \dfrac{K_{i,i1}}{K_{i,i1} + K_{i,i2}}, \qquad \alpha_{jj} = 1 \quad j \in \omega_C$

$\alpha_{i,i2} := \dfrac{K_{i,i2}}{K_{i,i1} + K_{i,i2}}, \qquad 0$ sonst

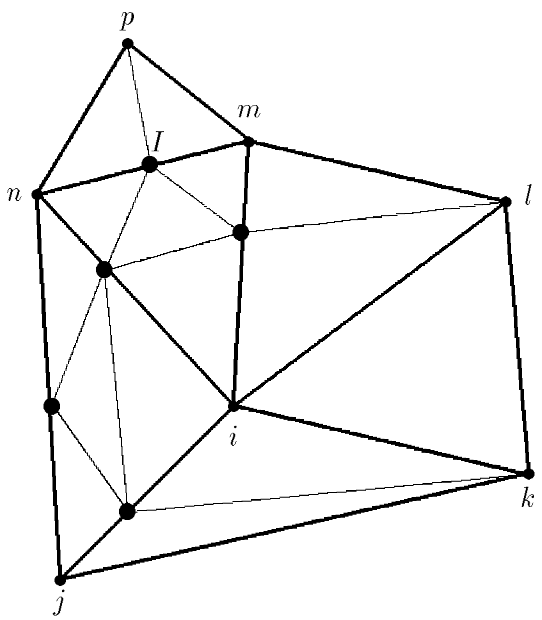
Bemerkung: Interpolationen analog zur bilinearen Interpolation im regelmäßigen Fall sind hier ebenfalls denkbar.

3.4.3.3 Die Grobgittermatrix $\widetilde{S}$

$$\widetilde{S} = \widetilde{P}^T K \widetilde{P} \qquad\qquad \tau_H \subset \tau_h$$

$$\begin{array}{llllllll} = S + T = & K_{CC} & + & B_{FC}^T K_{FC} & + & K_{CF} B_{FC} & + & B_{FC}^T K_{FF} B_{FC} \\ & i \leftarrow l & & i \longleftarrow m & & i \longleftarrow m & & i \ \longleftarrow \ p \end{array}$$

Betrachten Zeile $i \in \omega_C$ in $\widetilde{S}$



$\{i, j, k, l, m, n, p\} \subset \omega_C$

Sei K mittels linearer FEM Diskretisierung erzeugt, dann bleibt die Dünnbesetztheit von K auch für $\widetilde{S}$ erhalten (weil sich $K_{CF}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{globaler Transport}}}{K_{FF}^{-1}}\ K_{FC}$ in S und T aufheben !)

$p \to i$! Jedoch ergibt ein Abschluß einer adaptiven Verfeinerung einen zusätzlichen Eintrag im Vergleich zur restlichen Verfeinerung.

2D:
- K_h – 5 Punkte Diff.-stern + lin. Interpolation/Restriktion $\to$ $\widetilde{S}$: 5 Punkte Diff.-stern
- –"– + bilineare Interpolation $\to$ $\widetilde{S}$: eine Art 9 Punkte Diff.-stern
- K_h – 9 Punkte Diff.-stern + bilineare Interpolation $\to$ $\widetilde{S}$: 9 Punkte Diff.-stern

Wie bestimmt man die Matrixeinträge ?

- $P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \\ & & \ddots \\ & [\alpha_{ij}] & \end{bmatrix}$

- $\mathcal{I}_i = \{$ Menge aller Punkte p_j, welche mit p_i Verbindung haben (Nachbarn) $\}$,
  d.h. $i \in \mathcal{I}_i$, (Söhne von $i \in \mathcal{I}_i$), evtl. $\omega_C \ni j \in \mathcal{I}_i$ (auch Grobgitterknoten p) sind in $\mathcal{I}_i$ enthalten.

$i, j \in \omega_C$

$$\Longrightarrow \quad (9) \qquad \boxed{\widetilde{S}_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{I}_i} \sum_{l \in \mathcal{I}_j} \alpha_{ki} \, K_{kl} \cdot \alpha_{lj}}$$

3.4.3.4 Das Bestimmen der Grobgitterknoten ω_C

$V_i := \{$ Nachbarknoten von $i\}$	Menge der Nachbarknoten $\cup \{i\}$
$\quad = \{j : \lvert K_{ij}\rvert + \lvert K_{ji}\rvert \neq 0\}$	
V	Menge aller Knoten

<u>Einfacher Vergröberungsalgorithmus</u>

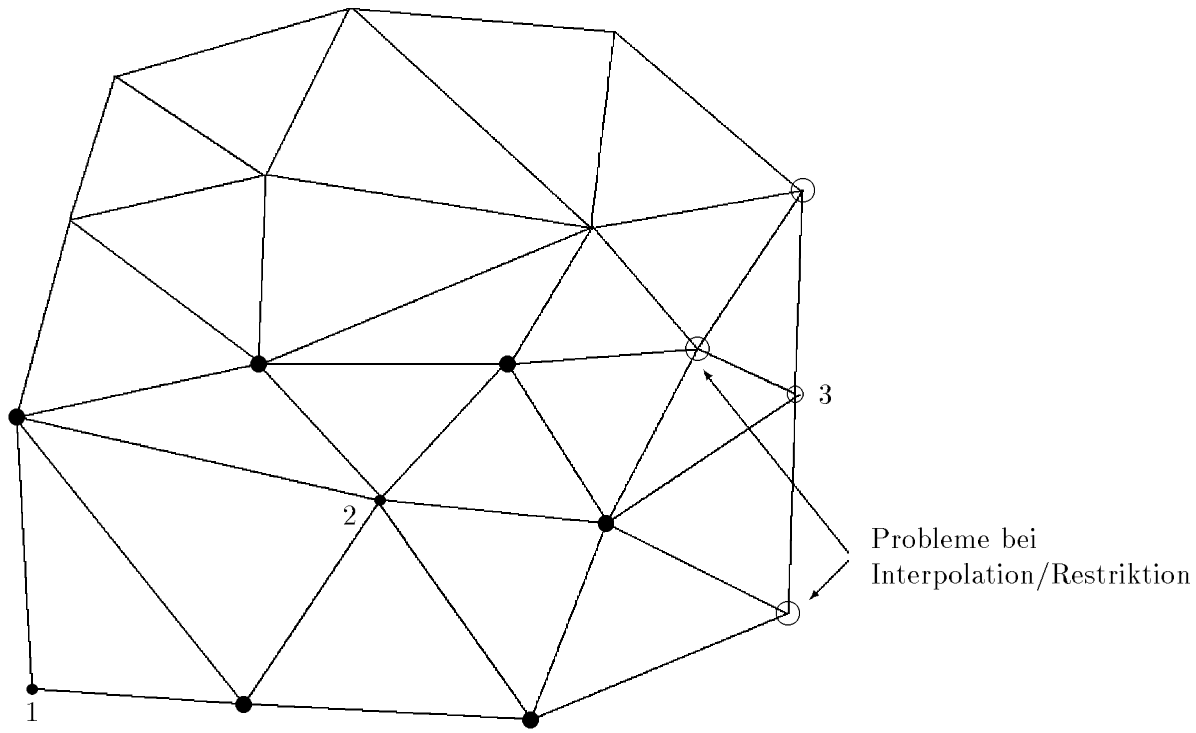
$F := \emptyset$	
$C := \emptyset$	
$U := V$	restliche Knoten (frei)
while $U \neq \emptyset$ do	
* pick $i \in U$	Welches i ? ($\rightarrow$ heuristisch)
$C := C \cup \{i\}$	neuen Grobgitterknoten hinzufügen
$F := F \cup \{V_i \cap U\}$	freie Knoten der Umgebung V_i zu Feingitter
$U := U \setminus \{(V_i \cap U) \cup \{i\}\}$	Demarkieren der Knoten (gesperrt)
done	
$\omega_C := C$	
$\omega_F := F$	

(*) • Verbesserte Heuristiken müssen die Kopplung der Knoten über die Matrix K_h nutzen $\longrightarrow$ nächster Abschnitt.

(*) • Man könnte z.B. den Knoten $i \in U$ mit den meisten Nachbarn auswählen.

- Bestimmte Knoten können a priori zu C gehören $\longrightarrow$ Geometrie bleibt erhalten.

Illustration zum Einfachen Vergröberungsalgorithmus



3.4.4 Reines Algebraisches Multigrid (AMG)

Es werden keine Gitter mehr benutzt, d.h.,
geg.: Matrix $K_h = K_l,\ f_h = f_l$;
ges.: Transferoperatoren I_{k-1}^{k}, I_k^{k-1} $\quad k = \overline{2,l}$
Matrizen K_k $\quad k = \overline{1,l-1}$
f_k $\quad k = \overline{1,l-1}$

3.4.4.1 Zwei–Level AMG

geg.: K_h
ges.: $[\omega_C, \omega_F], P, R, K_H = R\, K_h\, P$

Das Hauptproblem besteht nunmehr im (intelligenten) Finden der Indexmengen ω_C und ω_F aus den in der Matrix K_h enthaltenen Informationen. Die Bestimmung von Interpolation/Restriktion geschieht dann wie im Pkt. 3.4.3.2.

Einfacher Vergröberungsalgorithmus aus 3.4.2.4 $\rightarrow$ große Probleme bei anisotropen Partiellen Differentialgleichungen.

Bezeichne $(I \subset V)$

$$d\,(i,I) := \frac{1}{\max\limits_{k\neq i}\{-K_{ik}\}} \sum_{j\in I} -K_{ij}$$

die Stärke der Kopplung einer Menge von Knoten (meist eines Knotens) zu einem Knoten i.
Dann ist

$$S^i := \{j \in V | d\,(i,\{j\}) \geq \alpha\} \qquad \overset{\bullet}{i}\longleftarrow\overset{\bullet}{j}$$

die Menge aller Knoten, deren Kopplung an i größer ist als ein Parameter $\alpha \in [0,1]$, und

$$S^{i,T} := \{j \in V | i \in S^j\} \qquad \overset{\bullet}{i}\longrightarrow\overset{\bullet}{j}$$

ist die Menge aller Knoten, zu denen i eine starke Kopplung besitzt.

Bemerkung:
Für K_h, resultierend aus der Diskretisierung des Laplace-Operators, gilt $S^i = S^{i,T}$. Jedoch gilt dies nicht mehr bei anisotropen Koeffizienten in der Differentialgleichung.

Vergröberung nach Ruge / Stüben: [38], [39]

Phase I (Teile V in C, F ein)

1. $C = \emptyset,\ F = \emptyset$
2. While $C \cup F \neq V$ do
   pick $i \in V \setminus \{C \cup F\}$ with maximal $|S^{i,T}| + |S^{i,T} \cap F|$ heuristisch
   if $|S^{i,T}| + |S^{i,T} \cap F| = 0$
      then $F := V \setminus C$ $\hat{=}$ Abbruch
      else $C := C \cup \{i\},\ F := F \cup \{S^{i,T} \setminus C\}$
   endif

Phase II (Absichern, daß jeder Punkt aus F entweder mit einem Punkt aus C stark gekoppelt ist, oder zumindest mit einem Punkt aus F gekoppelt ist, der seinerseits stark mit einem Knoten in C gekoppelt ist.

1. $T := \emptyset$ — Menge der bereits getesteten Knoten

2. While $T \subset F$ do

   pick $i \in F \setminus T$; $T := T \cup \{i\}$

   $\widetilde{C} := \emptyset$

   $C^i = S^i \cap C$ — starke Nachbarn in C

   $F^i = S^i \cap F$ — starke Nachbarn in F

   While $F^i \neq \emptyset$ do

       pick $j \in F^i$; $F^i := F^i \setminus \{j\}$ — Nimm Pkt. j heraus

       if $d(j, C^i) \leq \beta \cdot d(i, \{j\})$

           then **if** $|\widetilde{C}| = 0$

                   then $\widetilde{C} := \{j\}$; $C^i = C^i \cup \{j\}$

                   else $C := C \cup \{i\}$; $F = F \setminus \{i\}$; GOTO 2

               endif

           endif

     od

     $C := C \cup \widetilde{C}$, $F = F \setminus \widetilde{C}$

   od

   $\omega_C = C$, $\omega_F := F$

▷ Die fettgedruckten Algorithmenteile sind heuristisch, d.h., hier sind andere Vorgehensweisen denkbar.

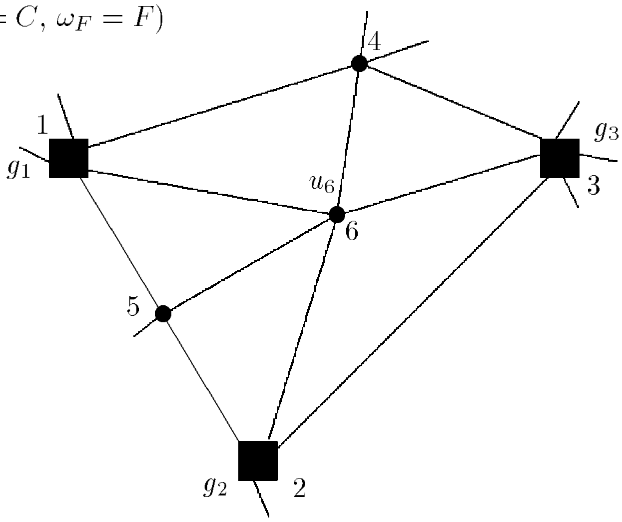
▷ Die Parameter α, β werden ebenfalls heuristisch gewählt. In [42] wird $\alpha = 0.25$ (wird aus 5 Pkte. Diff.-stern plausibel) und $\beta = 0.35$ gewählt.

▷ Im Falle eines regelmäßigen Netzes und des Laplace-Operators liefert der Ruge – Stüben Algorithmus das zu erwartende regelmäßige Grobnetz – falls die Numerierung die heuristischen (nichtdeterministischen) Punkte im Algorithmus unterstützt.

▷ Falls die Geometrie bekannt ist, können zur besseren Approximation der Geometrie bestimmte Punkte zwangsweise zur jeweiligen Knotenmenge ω_C zugeordnet werden.
$\rightarrow$ Starte Ruge – Stüben Algorithmus mit $C = \{$ Geometrieknoten $\}$

3.4.4.2 Interpolation im AMG

Betrachten den Ausschnitt der durch den Matrixgraphen gegebenen Vernetzung nach der Vergröberung ($\omega_C = C$, $\omega_F = F$)



$\{1,2,3\} \subset \omega_C$
$\{4,5,6\} \subset \omega_F$

(Fig. 3)

- $\triangleright$ $C^i = \{$ Knoten $\in \omega_C$, welche mit $\underbrace{\text{Knoten } i}_{\in \omega_F}$ verbunden sind $\}$

  $\longrightarrow \; C^6 = \{1,2,3\}$
  $ \; C^5 = \{1,2,\ldots\}$
  $ \; C^4 = \{1,3,\ldots\}$

  $F^i = \{$ Knoten $\in \omega_F$, welche mit Knoten $i \in \omega_F$ verbunden sind $\}$
  $\longrightarrow F^6 = \{4,5\}$

- $\triangleright$ Interpolationsgewichte

  $\alpha_{jj} = 1 \qquad \forall\, j \in \omega_C$

  zu bestimmen: $\alpha_{ij} \qquad \forall\, i \in \omega_F \quad \forall\, j \in C^i$
  $\alpha_{ij} = 0 \qquad$ sonst

<u>Bestimmung der Integrationsgewichte α_{ij}:</u>

- $\triangleright$ <u>Variante $\emptyset$:</u>

  Lineare Interpolation (8) zwischen Vater- und Sohnknoten
  (Fig. 3) $\rightarrow$ keine eindeutigen Vater-Sohn–Beziehungen mehr.

  $i = 6 \quad \Longrightarrow \quad$ 3 Väterpaare $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$
  $ \quad \Longrightarrow \quad$ alle 3 Grobgitterknoten, d.h. $j \in C^i$ zur Interpolation heranziehen

  verbesserbar

- $\triangleright$ <u>Variante 1:</u>

  Interpolation in $i = 6 \iff$ harmonische Erweiterung mit Polygonzug
  $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ als Rand

  $$\iff \sum_{j \in F^i \cup C^i \cup \{i\}} K_{ij} u_j = 0$$

  $+$ RB $\; u_j = g_j \quad \forall\, j \in F^i \cup C^i$

$$\text{(Fig. 3)} \longrightarrow K_{66}\,u_6 = -\underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\,\in\, C^j}}^{3} K_{6j}\,g_j}_{g_j \text{ bekannt}} - \underbrace{\sum_{\substack{j=4\\ j\in F^j}}^{5} K_{6j}\,g_j}_{g_j \text{ unbekannt !}} \tag{$*$}$$

- Lineare Interpolation (8) zur Bestimmung der $g_j \;\; j \in F^i$

$$\rightarrow \;\; g_5 = \frac{K_{51}\,g_1 + K_{52}\,g_2}{K_{51} + K_{52}\,[+\underbrace{K_{53}}_{=0}]} \quad \left[= \widehat{C}_{51}\,g_1 + \widehat{C}_{52}\,g_2 \right]$$

$$g_4 = \frac{K_{41}\,g_1 + K_{43}\,g_3}{K_{41} + K_{43}}$$

$(*) \Longrightarrow$

$$5,4 \in F^6 \qquad 6 \in F^i$$

$$u_6 = \frac{-1}{K_{66}} \Bigg\{ \left(K_{61} + \frac{K_{65}\,K_{51}}{K_{51} + K_{52}} + \frac{K_{64}\,K_{41}}{K_{41} + K_{43}} \right) g_1 \; + \tag{$**$}$$

$$+ \left(K_{62} + \frac{K_{65}\,K_{52}}{K_{51} + K_{52}} \right) g_2 + \left(K_{63} + \frac{K_{64}\,K_{43}}{K_{41} + K_{43}} \right) g_3 \Bigg\}$$

$$\text{NR:} \quad \frac{K_{65}\,K_{51}}{K_{51} + K_{52}} + \frac{K_{64}\,K_{41}}{K_{41} + K_{43}} = \frac{K_{65}\,K_{51}}{K_{51} + K_{52} + \underbrace{K_{53}}_{=0}} + \frac{K_{64}\,K_{41}}{K_{41} + \underbrace{K_{42}}_{=0} + K_{43}} =$$

$$= \frac{K_{65}\,K_{51}}{\sum\limits_{l\,\in\, C^6} K_{5,l}} + \frac{K_{64}\,K_{41}}{\sum\limits_{l\,\in\, C^6} K_{4,l}} = \sum_{k\,\in\, F^6} \frac{K_{6,k}\,K_{k,1}}{\sum\limits_{l\,\in\, C^6} K_{k,l}} =: \widehat{c}_{61}$$

$\searrow$

$$\text{(10')} \qquad \boxed{\widehat{c}_{ij} := \sum_{k\,\in\, F^i} \frac{K_{ik} \cdot K_{kj}}{\sum\limits_{l \in C^i} K_{kl}}}$$

$(**) \overset{i:=6}{\searrow}$

$$u_i^h = u_i = \frac{-1}{K_{ii}} \left\{ \sum_{j\,\in\, C^i} (K_{ij} + \widehat{c}_{ij})\, \underbrace{g_j}_{= u_j^H} \right\}$$

$\searrow$

$$\text{(11')} \qquad \boxed{\widehat{\alpha}_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \in \omega_C \\ \dfrac{-(K_{ij} + \widehat{c}_{ij})}{K_{ii}} & i \in \omega_F, \; j \in C^i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}}$$

Die lineare Interpolation zur Bestimmung der $g_j \quad j \in F^i$ in $(*)$ kann noch verbessert werden ohne daß das Besetztheitsmuster des Prolongationsoperators P (und damit das Pattern von $K_H = \widetilde{S}$) verändert wird.

$\Downarrow$

▷ <u>Variante 2:</u> Ruge / Stüben [38], [39]

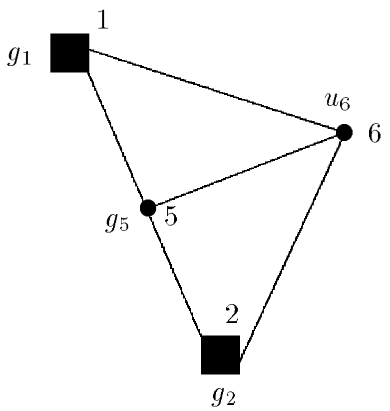
$(*) \underset{\text{Fig. 3}}{\longrightarrow}$ Verbesserte Bestimmung von g_5, g_4.

Betrachten für g_5 das lokale System

$K_{51}\, g_1 + K_{52}\, g_2 + \widetilde{K}_{55}\, g_5 + K_{56}\, u_6 = 0$

mit geg. $g_1, g_2, \underline{\underline{u_6}}$

und $\widetilde{K}_{55} = -(K_{51} + K_{52} + K_{56})$ ↖ Zeilensumme $= 0$



$$\Longrightarrow g_5 = \frac{K_{51}}{K_{56} + K_{51} + K_{52}}\, g_1 + \frac{K_{52}}{K_{56} + K_{51} + K_{52}}\, g_2 + \frac{K_{56}}{K_{56} + K_{51} + K_{52}}\, u_6$$

analog g_4.

$$\begin{aligned}
\overset{(*)}{\Longrightarrow} K_{66}\, u_6 = \; & -\Bigg\{ \left(K_{61} + \frac{K_{65}\, K_{51}}{K_{56} + K_{51} + K_{52}} + \frac{K_{64}\, K_{41}}{K_{46} + K_{41} + K_{43}} \right) g_1 + \\
& + \left(K_{62} + \frac{K_{65}\, K_{52}}{K_{56} + K_{51} + K_{52}} \right) g_2 + \left(K_{63} + \frac{K_{64}\, K_{43}}{K_{46} + K_{41} + K_{43}} \right) g_3 + \qquad (***) \\
& + \left(\frac{K_{65}\, K_{56}}{K_{56} + K_{51} + K_{52}} + \frac{K_{64}\, K_{46}}{K_{46} + K_{41} + K_{43}} \right) u_6 \Bigg\}
\end{aligned}$$

NR: $$\frac{K_{65}\, K_{51}}{K_{56} + K_{51} + K_{52}\, [+K_{53}]} + \frac{K_{64}\, K_{41}}{K_{46} + K_{41} + K_{42}\, [+K_{43}]} =$$

$$= \frac{K_{65}\, K_{51}}{K_{56} + \sum\limits_{l \in C^6} K_{5,l}} + \frac{K_{64}\, K_{41}}{K_{46} + \sum\limits_{l \in C^6} K_{4,l}} = \sum_{k \in F^6} \frac{K_{6k}\, K_{k,1}}{\sum\limits_{l \in C^6} K_{kl} + K_{k6}} =: c_{61}$$

↘

$$(10) \qquad \boxed{c_{ij} := \sum_{k \in F^i} \frac{K_{ik} \cdot K_{kj}}{\sum\limits_{l \in C^i} K_{kl} + K_{ki}}} \qquad \text{Ruge / Stüben}$$

$$\overset{(**)}{\searrow}$$

$$(K_{66}+c_{66})\,u_6 = -(K_{61}+c_{61})\,g_1 - (K_{62}+c_{62})\,g_2 - (K_{63}+c_{63})\,g_3$$

$$\overset{i=6}{\searrow}$$

$$u_i^h = u_i = \frac{-1}{K_{ii}+c_{ii}} \left\{ \sum_{j\,\in\,C^i} (K_{ij}+c_{ij})\, \underbrace{g_j}_{=u_j^H} \right\}$$

$$\searrow$$

$$(11) \qquad \boxed{\alpha_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \in \omega_C \\ \dfrac{-(K_{ij}+c_{ij})}{K_{ii}+c_{ii}} & i \in \omega_F,\ j \in C^i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \qquad \text{Ruge – Stüben}$$

3.4.4.3 Generieren der Grobgittermatrix in AMG

$K_H := \widetilde{S} = R\,K_h\,P$

$R = P^T$ mit α_{ij} aus (11)

$\searrow$ Abschnitt 3.4.2.3

$$(8) \qquad \boxed{[K_H]_{ij} = \left[\sum_{k\,\in\,\mathcal{I}_i} \sum_{l\,\in\,\mathcal{I}_j} \alpha_{ki}\, K_{kl}\, \alpha_{lj} \right]_{ij}}$$

mit $\mathcal{I}_i = \{$ Knoten p_j, mit denen p_i Verbindung hat $\}$ (einschl. p_i !)
$\qquad = C^i \cup F^i \cup \{i\}$

▷ Eine simple Implementierung von (8) resultiert wegen der großen Anzahl von Suchprozessoren und einer Komplexität von $O\,(N_C^2)$ in einem sehr schlechten Laufzeitverhalten bei der Generierung des Grobgittersystems.
Seien F^i, C^i wie in 3.4.3.2 definiert, so ergibt eine Vertauschung der Schleifendurchläufe den folgenden optimalen Algorithmus:

Algorithmus zur Generierung der Grobgittermatrix nach (8)

```
For k ∈ ω_F ∪ ω_C do
    Bestimme F^k, C^k
    For l ∈ F^k ∪ C^k ∪ {k} do
        T := C^k ∪ C^l ∪ ({l} ∩ ω_C)
        For i ∈ T do
            For j ∈ T do
                K_{H,i,j} := K_{H,i,j} + α_{ki} K_{kl} α_{lj}
            od
        od
    od
od
```

Dieser Algorithmus hat eine Komplexität von $O(N_F) = O(N_C)$, d.h. er ist optimal.

3.5 Multigrid–Methoden zur Lösung nichtlinearer Probleme

- **Betrachten**
  nichtlineare Gittergleichungen bzw. entsprechende nichtlineare GS

(1) $A_h(u_h(x)) = 0, \quad x \in \omega_h$ $\qquad A_h(\underline{u}_h) = \boldsymbol{O}$ in $\mathbb{R}^{N_h}$

$$h = h_l : \; A_h(\underline{u}_h) \equiv \underbrace{K_h(\underline{u}_h)}_{\parallel} - \underline{f}_h \equiv K_l(\underline{u}_l) - \underline{f}_l = \boldsymbol{O}$$

„quasilinear“ $\longrightarrow \parallel$

$$\hat{K}_h(\underline{u}_h)\,\underline{u}_h \;\text{ mit }\; \hat{K}_h(\underline{u}_h) : \mathbb{R}^{N_h} \longmapsto \mathbb{R}^{N_h}$$

die durch Diskretisierung (auf Gitterfolgen) nichtlinearer, elliptischer RWA mittels FDM bzw. FEM entstehen, z.B.:

$\boxed{\text{MBsp. 4}}$ Wärmeleitproblem mit temperaturabhängigen Wärmeleitkoeffizienten und Wärmeübergangszahlen:

<u>KF:</u>

Ges. $u(x) \in X = C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \Gamma_1) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$:

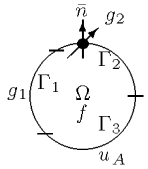
$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda_2(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + q\,(x,u)\,u = f(x)$$
$$\forall\, x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$+$ Randbedingungen z.B.:

$u = g_1$ auf Γ_1,

$$\frac{\partial u}{\partial N} := \lambda_1\,(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\,n_1 + \lambda_2\,(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\,n_2 = g_2 \text{ auf } \Gamma_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(x,\cancel{u})\,(u_A - u) \text{ auf } \Gamma_3.$$



$\Downarrow \quad \Uparrow \quad \longleftarrow$ Regularitätsvoraussetzungen !

<u>VF:</u>

Ges. $u \in V_g := \{v \in V = W_2^1\,(\Omega) : v = g_1 \text{ auf } \Gamma_1\}$:

$$a\,(u,v) = \langle F, v \rangle \qquad \forall v \in V_0 := \{v \in V : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\},$$

mit
$$\underbrace{a\,(u,v)}_{\nearrow\ \text{nichtlinear} \quad \nwarrow\ \text{linear}} := \int_\Omega \left\{\lambda_1\,(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\,\frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda_2\,(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\,\frac{\partial v}{\partial x_2} + q\,(x,u)\,uv\right\} dx + \int_{\Gamma_3} \alpha(x)\,uv\,ds,$$

$$\langle F, v \rangle := \int_\Omega f v\,dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v\,ds + \int_{\Gamma_3} \alpha\,u_A v\,ds.$$

$\Downarrow$

<u>FEM:</u>

$V_{gh} \subset V_g$, $V_{0h} \subset V_0$ (mittels FEM: siehe Numerik II [33]).

Ges. $u_h \in V_{gh}\ :\ a\,(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall\, v_h \in V_{0h}$,

$\updownarrow \longleftarrow$ Homogenisieren der Dirichletschen Rbd. (nichtlinear !)

Ges. $\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h}\ :\ K_h\,(\underline{u}_h) = \underline{f}_h$ in $\mathbb{R}^{N_h}$.

$\boxed{\text{MBsp. 5}}$ Berechnung magnetischer Felder:

KF:

Ges. $u = A_z$ (z–Komponente des Vektorpotentials):

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu\,(x,|\nabla u|)}\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mu\,(x,|\nabla u|)}\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) =$$

$$= S_z(x) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu}\,B_{x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mu}\,B_{x_1}\right), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$+$ Randbedingungen z.B.:
$u = 0$ auf $\partial\,\Omega$.

$$\Downarrow \quad \Uparrow$$

VF:

Ges. $u \in V_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:

$$a\,(u,v) = < F, v > \qquad \forall\, v \in V_0,$$

mit
$$a\,(u,v) := \int_\Omega \left\{\frac{1}{\mu\,(x,|\nabla u|)}\right. \nabla^T u\, \nabla v\, dx\,,$$

$$< F, v > := \int_\Omega S_z v\, dx + \int_{\Omega_M} \frac{1}{\mu_M}\left(B_{x_2}\,\frac{\partial v}{\partial x_1} - B_{x_1}\,\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) dx.$$

$$\Downarrow$$

FEM:

$V_{0h} \subset V_0$ (mittels FEM: siehe Numerik II [33]).

Ges. $u_h \in V_{0h}\ :\ a\,(u_h, v_h) = < F, v_h > \quad \forall\, v_h \in V_{0h}$,

$\updownarrow \longleftarrow$ Homogenisieren der Dirichletschen Rbd. (nichtlinear !)

Ges. $\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h}\ :\ K_h\,(\underline{u}_h) = \underline{f}_h$ in $\mathbb{R}^{N_h}$.

Hierbei sind:

$\mu\,(x,|\nabla u|) = \mu_0\,\mu_r\,(x,|\nabla u|)$	–	Permeabilität,
μ_0	–	absolute Permeabilität,
$\mu_r\,(x,|\nabla u|)$	–	relative Permeabilität,
$\mu_M = \mu_0\,\mu_{r,\text{Magnet}}$	–	Permeabilität des Permanentmagneten,
$S_z = S_z\,(x) = S_z\,(x_1,x_2)$	–	Stromeinprägung,
$\vec{B} = (B_{x_1}, B_{x_2})^T$	–	Remanenzinduktion,
$\Omega_M \subset \Omega$	–	Teilgebiet der Permanentmagneten.

$\boxed{\text{MBsp. 6}}$ Nichtlineare Poisson–Gleichung

<u>KF</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} -\Delta u + q\,(x,u) = f\,(x) \text{ in } \Omega \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \end{array}}$$

$\Longrightarrow$ $\uparrow$ $\boxed{\text{Vor.}}$ $\downarrow$ $\Longleftarrow$

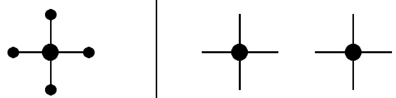
<u>VF</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } u \in V_g := \{v \in V = W_2^1(\Omega) : v = g \text{ auf } \partial\Omega\}: \\ \int\limits_\Omega (\nabla^T u \,\nabla v + q(x,u)\,v)\,dx = \int\limits_\Omega f v\,dx, \\ \qquad\qquad \forall\, v \in V_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \end{array}}$$

FDM

FEM

$V_{gh} \subset V_g, \;\; V_{0h} \subset V_0$



$$A_h(u_h) := \underbrace{-\Delta_h u_h(x) + q(x, u_h(x))}_{K_h(\underline{u}_h)} - \underbrace{f(x)}_{\underline{f}_h}, \;\; x \in \omega_h$$

$$\boxed{A_h\,(\underline{u}_h) \equiv K_h\,(\underline{u}_h) - \underline{f}_h = \boldsymbol{O}}$$

<u>Beispiel:</u> Gleichungen der inneren Elektronik: $\qquad q\,(x,u) \;=\; e^{u-u_1} \;+\; e^{u_2-u}$.

■ <u>Bemerkungen:</u>

1. MBsp. 4 und 5 sind quasilinear, d.h. $K_h\,(\underline{u}_h) = \underbrace{K_h\,(\underline{u}_h)}_{N_h \times N_h\text{–Matrix}}\,\underline{u}_h$.

2. MBsp. 6 ist i. allgem. <u>nicht</u> quasilinear (vgl. Gleichungen der inneren Elektronik !).

3.5.1 Indirekte Anwendung der Multigrid–Methode auf nichtlineare Probleme

- **Idee:**

  – iterative Linearisierung von (1) z.B. durch Newton– bzw. newtonähnliche Methoden (siehe NUMERIK I [32]);

  – Lineare Systeme werden mit MGM gelöst;

  – Bsp.: Newton–Verfahren zur Linearisierung:

$$\underbrace{\underline{u}_h^k}_{\text{Ausgangs-näherung}} \longrightarrow \underline{d}_h^k = -A_h\,(\underline{u}_h^k) = \underline{f}_h - K_h\,(\underline{u}_h^k)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\underbrace{A'_h\,(\underline{u}_h^k)}_{\text{Jacobi-Matrix}}\,\underline{w}_h^k = \underline{d}_h} \quad \text{– wird mit (linearer) MGM gelöst !}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\underline{u}_h^{k+1}}_{\text{verbesserte Näherung}} = \underline{u}_h^k + \underline{w}_h^k$$

- **Problem:** Optimale Anpassung der $\boxed{\text{inneren}}$ MG–Iterationen an die $\boxed{\boxed{\text{äußeren}}}$ (Newton–)Iterationen:

  $\boxed{\text{innere}}$ ↪ Konvergenzgeschwindigkeit = linear !

  $\boxed{\boxed{\text{äußere}}}$ ↪ Konvergenzgeschwindigkeit = quadratisch !

$\boxed{\text{Methode I}}$ 1 MG–Zyklus pro Newtonschritt !
Resultat: Nur lineare Konvergenzgeschwindigkeit !

$\boxed{\text{Methode II}}$ MG–Zyklen werden von einem zum anderen Newtonschritt entsprechend der MG–Konvergenzrate vergrößert, z.B. verdoppelt, wenn MG–KF = 0.1:

Newton	:	1	2	3	4	: $\Vert\underline{u}_h^{k+1} - \underline{u}_h\Vert \le c\,\Vert\underline{u}_h^k - \underline{u}_h\Vert^2$, $c = ?$.
MGM	:	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	: bei KF ≈ 0.1 und $c \approx 1$.
		10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-8}	

→ laufend a–posteriori Konvergenzanalyse notwendig !

Ziel: Rettung der quadratischen Konvergenz !

■ **In der Praxis:** Anwendung der Full–Multigrid–Newton–Technik:

Btr. dazu (1) auf einer Folge sich verfeinernder Triangulationen, die wir wieder mit den Diskretisierungsparametern

$$h_1 > h_2 > \ldots > h_q > h_{q+1} > \ldots > h_l$$

verbinden wollen. Wir interessieren uns im Endeffekt für die Lösung des nichtlinearen ($\curvearrowright$ quasilinearen) Gleichungssystems

$$(1) \qquad K_l\,(\underline{u}_l) \;=\; \underline{f}_l \quad \text{mit} \quad K_l\,(\underline{u}_l) = \underbrace{\hat{K}_l\,(\underline{u}_l)}_{N_l \times N_l\text{–Matrix}}\,\underline{u}_l$$

auf dem feinsten Gitter h_l.

<u>**F**ull–**M**ulti–**G**rid–**N**ewton–**T**echnik (**FMGNT**):</u>

<u>main</u> **FMGNT**

⋮

C: *Lösung des Grobgitterproblems mit reinem Newton–Verfahren;*

$\underline{u}_1 := \hat{K}_1^{-1}(\boldsymbol{O})\underline{f}_1$; (*direkter Solver;* $K_1(\cdot) = \hat{K}_1(\cdot)\cdot$)

$[B_1 := K_1'(\boldsymbol{O})$ *für das modifizierte Newton–Verfahren*];

$\underline{d}_1 := \underline{f}_1 - K_1\,(\underline{u}_1)$;

$d\emptyset := \|d_1\|$;

$d1 := d\emptyset$;

<u>for</u> $j := 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> j_1 <u>do</u>

    <u>begin</u> <u>if</u> $d1 \le \varepsilon_1 * d\emptyset$ <u>then</u> <u>goto</u> $1\emptyset$;

        $[B_1 := K_1'\,(\underline{u}_1)$ *für das Newton–Verfahren*];

        $\underline{w}_1 := B_1^{-1}\,\underline{d}_1$; *(direkter Solver)*

        $\underline{u}_1 := \underline{u}_1 + \tau_{1,j}\underline{w}_1$;

        $\underline{d}_1 := \underline{f}_1 - K_1\,(\underline{u}_1)$;

        $d1 := \|d_1\|$;

    <u>end</u>;

```
C:  Nested–Iteration;
1Ø  for q := 2 step 1 until l do
    begin  C: Benutze u_{q-1} und d_{q-1} zur adaptiven Gittererzeugung;
           u_q := Ĩ^q_{q-1} u_{q-1}    (Prolongation/Interpolation);
           [B_q := K'_q (u_q) für das modifizierte Newton–Verfahren];
           d_q := f_q − K_q (u_q);
           dØ := ||d_q||;
           d1 := dØ;
           for j := 1 step 1 until j_q do
           begin  if d1 ≤ ε_q * dØ then goto 20;
                  [B_q := K'_q (u_q) für das Newton–Verfahren];
                  w_q := O
                  for k = 1 step 1 until k_qj do MGM (q, w_q, d_q, B_q);
                  u_q := u_q + τ_qj w_q;
                  d_q := f_q − K_q (u_q);
                  d1 := ||d_q||;
           end
20         C: Genauigkeit auf dem q–ten Level erreicht !
    end
  ⋮
```

Hierbei ist $K'_q(\underline{u}_q) = \left[\sum\limits_{j=1}^{N_q} \left(\frac{\partial}{\partial u_q^{(k)}} \left[\hat{K}_q(\underline{u}_q)\right]^{ij} \right) \underline{u}_q^{(j)} + \left[\hat{K}_q(\underline{u}_q)\right]^{ik} \right]_{i,k=\overline{1,N_q}}$ die Jacobi–Matrix von $K_q(\underline{u}_q) = \left[\sum\limits_{j=1}^{N_q} \left[\hat{K}_q(\underline{u}_q)\right]^{ij} \underline{u}_q^{(j)}\right]_{i=\overline{1,N_q}}$.

<u>Kernstück</u> der **FMGNT** ist die lineare Multigrid–Prozedur **MGM** $(q, \underline{w}_q, \underline{d}_q, B_q)$ zur Lösung des linearen Gleichungssystems

(2) $\quad B_q\, \underline{w}_q = \underline{d}_q$

(siehe Pkt. 3.2).

- **Problem:** Steuerung und Adaption (an das konkrete Problem) der FMGNT:

  1. A–priori und a–posteriori Gitteradaptionsalgorithmus:
     $\longrightarrow$ adaptiver, automatischer, hierarchischer Netzgenerator !
  2. $\left.\begin{array}{l} j_q \text{ – Anzahl der Newtonschritte} \\ \varepsilon_q \text{ – relative Genauigkeit } (0 < \varepsilon_q < 1) \end{array}\right\}$ auf jedem Gitter $q = \overline{1,l}$.
     Testwahl: Defekttest, ... ?
  3. k_{qj} – Anzahl der linearen MG–Zyklen pro Newtonschritt $j = \overline{1, j_q}$ auf jedem Gitter $q = \overline{2,l}$.
  4. τ_{qj} – Newton–Dämpfungsparameter für $j = \overline{1, j_q}$ und $q = \overline{1,l}$.
  5. Newton–Verfahren/Modifiziertes Newton–Verfahren/... ?
  6. Nested–Iterations–Prolongation $\tilde{I}^q_{q-1}$, $q = \overline{2,l}$.
  7. Wahl der linearen MG–Prozedur **MGM** $(q, \underline{w}_q, \underline{d}_q, B_q)$:
     - Hilfsgitteroperatoren: $B_q \to B_{q-1} \to \ldots \to B_2 \to B_1$:
       (a) $B_i \quad (i = \overline{1,q})$ aus der Nested–Iteration !
       (b) Galerkin–Projektion: $B_{i-1} = I_i^{i-1}\, B_i\, I^i_{i-1}$, $i = q(-1)2$;
     - Glättungsiteration, Parameterwahl, Anzahl der Glättungsschritte;
     - Prolongation I^i_{i-1} und Restriktion I_i^{i-1}, $i = \overline{2,l}$;
     - MG–Zyklenwahl;
     - Relaxation der Grobgitterkorrektur.

3.5.2 Direkte Anwendung der Multigrid–Methode auf nichtlineare Probleme

3.5.2.1 FAS = Full–Approximation–Scheme von A. Brandt

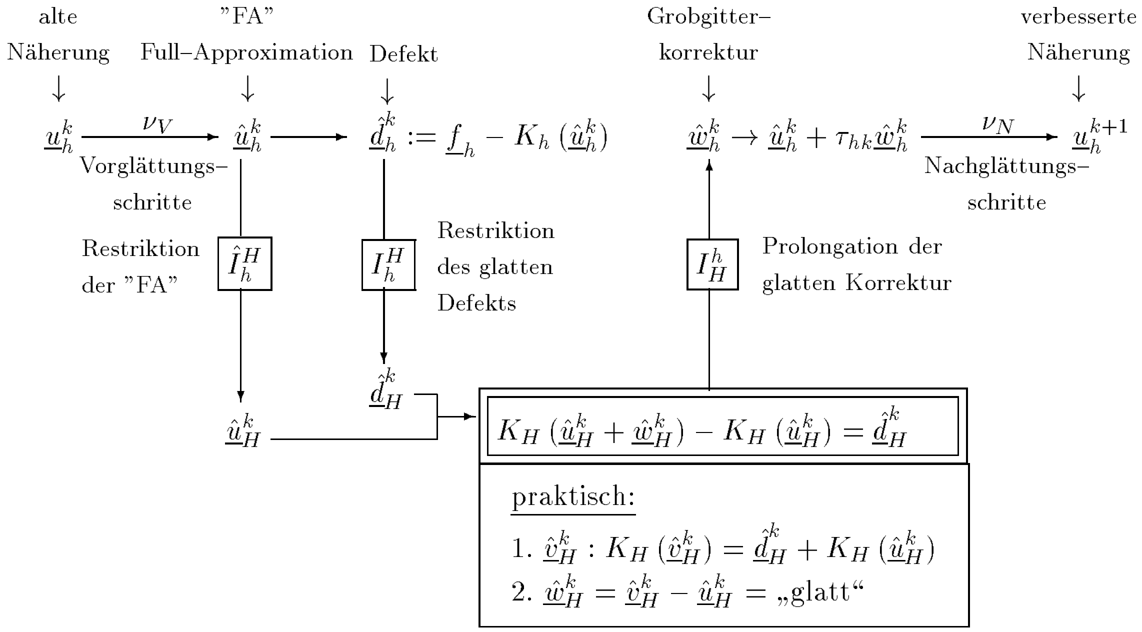
- **Idee:** für (h, H)–Zweigittermethode: $\underline{u}_h^k \longmapsto \underline{u}_h^{k+1}$:

Btr. (1) $\quad A_h\,(\underline{u}_h) = \boldsymbol{O} \quad \Longleftrightarrow \quad K_h\,(\underline{u}_h) = \underline{f}_h$.

Defektsystem:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{Geg. } \underline{\hat{u}}_h & & \\ \text{Defekt} & : & \underline{\hat{d}}_h = \underline{f}_h - K_h\,(\underline{\hat{u}}_h) \\ \underline{\hat{w}}_h & : & K_h\,(\underline{\hat{u}}_h + \underline{\hat{w}}_h) - K_h\,(\underline{\hat{u}}_h) = \underline{\hat{d}}_h \end{array}}$$

$\boxed{(h,H)\text{–Methode}}$ $\quad \underline{u}_h^k \longmapsto \underline{u}_h^{k+1}$



- **FAS–MGM:** ↪ Rekursiv auf Gitterfolgen $h_l, h_{l-1}, \ldots, h_1$ definieren:
  Löse $\boxed{\boxed{}}$ mit $(H, H') = (h_{l-1}, h_{l-2})$–Methode etc.:
  ↪ Analog wie im linearen Fall: V–Zyklus, W–Zyklus, … ;
  ↪ Siehe Pkt. 3.4.2.3 zur Beschreibung des Algorithmus !

- **Unterschiede zum linearen Fall:**

  1. Zur Glättung sind nichtlineare Relaxationsmethoden notwendig, z.B.:
     (a) nichtlineare Gauß–Seidel–Methoden:
     etwa Newton–Gauß/Seidel–Relaxation

$$\boxed{K_h(\underline{u}_h) = f_h \quad : \quad K_i(\underbrace{u_1, u_2, \ldots, u_n}_{\underline{u}_h}) = f_i, \quad i = \overline{1, N}}$$

Geg. $\underline{u}_h^{(j)} = (u_1^j, u_2^j, \ldots, u_N^j)^T$ – alte Näherung;

Bestimme neue Näherung $\underline{u}_h^{(j+1)} = (u_1^{j+1}, u_2^{j+1}, \ldots, u_N^{j+1})^T$ nach der folgenden Prozedur:

u_1^{j+1}: Führe i_{1j} Newton–Schritte für die skalare Gleichung

$K_1\,(\mathbf{u_1}, u_2^j, \ldots, u_n^j) = f_1$

mit der Startnäherung $u_1^{j,0} := u_1^j$ durch:

$$u_1^{j,p+1} = u_1^{j,p} + \frac{f_1 - K_1\,(u_1^{j,p}, u_2^j, \ldots, u_N^j)}{\frac{\partial K_1}{\partial u_1}\,(u_1^{j,p}, u_2^j, \ldots, u_N^j)}, \quad p = 0, 1, \ldots, i_{1j} - 1,$$

$$\Longrightarrow \; u_1^{j+1} = u_1^{j,i_{1j}};$$

u_2^{j+1}: Führe i_{2j} Newton–Schritte für die skalare Gleichung

$K_2\,(u_1^{j+1}, \mathbf{u_2}, u_3^j, \ldots, u_N^j) = f_2$

mit der Startnäherung $u_2^{j,0} = u_2^j$ durch.

usw.

(b) nichtlineare Jacobi–Methoden:
etwa Newton–ω-Jacobi–Relaxation.

etc.

2. Neben dem „glatten“ Defekt muß auch die i. allgem. „nichtglatte“ volle Approximation $\underline{\hat{u}}_h^{(k)}$ (geglättet wird nur der Fehler und der Defekt !) auf das gröbere Gitter ω_H projiziert werden:

   $\curvearrowright$ $\hat{I}_h^H : \underline{\hat{u}}_h^k \longrightarrow \underline{\hat{u}}_H^k$ – spezielle Restriktionsoperatoren notwendig (vgl. jedoch NMGM von Hackbusch im Pkt. 3.4.2.2)

   <u>aber</u> rückinterpoliert wird nur die „glatte“ Korrektur $\underline{\hat{w}}_H^k$!

3. Grobgittergleichung zur Bestimmung von $\underline{\hat{w}}_H^k$ ist nichtlinear:

   $K_H\,(\underline{\hat{u}}_H^k + \underline{\hat{w}}_H^k) - K_H\,(\underline{\hat{u}}_H^k) = \underline{\hat{d}}_H^k$, d.h.

   $\underline{\hat{w}}_H^k = K_H^{-1}\,(\underline{\hat{d}}_H^k + K_H\,(\underline{\hat{u}}_H^k)) - \underline{\hat{u}}_H^k$.

3.5.2.2 Die NMGM von W. Hackbusch

- Neben der FAS von A. Brandt wurden auch **andere Vorschläge zur Lösung nichtlinearer Aufgaben** gemacht, die <u>nicht</u> die Projektion der vollen Approximation benötigen,

  z.B. führte W. Hackbusch die folgende Vorschrift zur Bestimmung der Grobgitterkorrektur $\underline{\hat{w}}_h^k$ ein:

  (3) $\quad \underline{\hat{w}}_h^k = \frac{1}{\sigma}\, I_H^h \left(K_H^{-1} \left(K_H\,(\underline{\tilde{u}}_H) + \sigma\, \underline{\hat{d}}_H^k \right) - \underline{\tilde{u}}_H \right)$

$$\left[= \frac{1}{\sigma}\, I_H^h \left(\underline{\tilde{u}}_H + \sigma\, K_H^{-1}\, \underline{\hat{d}}_H^k - \underline{\tilde{u}}_H \right) = I_H^h\, K_H^{-1}\, \underline{\hat{d}}_H^k \right]$$

$\uparrow$

K_H–linear !

$$= \frac{1}{\sigma}\, I_H^h \left(K_H^{-1} \left(\underline{\tilde{f}} + \sigma\, \underline{\hat{d}}_H^k \right) - \underline{\tilde{u}}_H \right),$$

wobei σ – ein zusätzlicher Parameter ist,

$\underline{\tilde{f}}_H = K_H\,(\underline{\tilde{u}}_H)$,

$\underline{\tilde{u}}_H =$ ein geeignet (?) gewählter Grobgittervektor ist.

■ Bemerkungen:

1. Realisierung von (3): $\underline{v}_H^k : K_H\,(\underline{v}_H^k) = \underline{\tilde{f}}_H + \sigma\, \underline{d}_H^k$,

   $\underline{\hat{w}}_H^k = (\underline{v}_H^k - \underline{\tilde{u}}_H)/\sigma$,

   $\underline{\hat{w}}_h^k = I_H^h\, \underline{\hat{w}}_H^k$.

   Vom feinen zum groben Gitter wird nur der „glatte“ Defekt übertragen !

2. Frage: Wahl von $\underline{\tilde{u}}_H$? (siehe Pkt. 3.4.2.3: FNMGM).

3. Für $\sigma = 1$ und $\underline{\tilde{u}}_H = \underline{\hat{u}}_H^k := \hat{I}_h^H\, \underline{\hat{u}}_H^k$ erhalten wir aus dem Schema von Hackbusch als Spezialfall das FAS von A. Brandt, (mms).

4. Von W. Hackbusch gibt es für die NMGM eine Konvergenztheorie:

   Resultat: 1) Lineare Konvergenzgeschwindigkeit,

   2) Konvergenzfaktor ist unabhängig von h, d.h. von l !

   Literatur: [22], [23], [36].

3.5.2.3 FNMGM–Algorithmen

- **Analog zum linearen Fall kann für nichtlineare Probleme eine FNMGM mit der "Nested–Iteration"–Strategie definiert werden:**

<u>main</u> **FNMGM**
⋮
$\underline{\tilde{u}}_1 :=$ *Näherungslösung von* $K_1(\underline{u}_1) = \underline{f}_1$
z.B. durch (gedämpftes) Newton–Verfahren mit direktem Solver
für das Jacobi–Problem;
<u>for</u> $q := 2$ <u>step</u> 1 <u>until</u> l <u>do</u>
<u>begin</u> $[\underline{\tilde{f}}_{q-1} := K_{q-1}(\underline{\tilde{u}}_{q-1})]$ *nur für Hackbusch* NMGM !
$\underline{\tilde{u}}_q := \tilde{I}^q_{q-1}\,\underline{\tilde{u}}_{q-1}$;
<u>for</u> $k := 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> j_q <u>do</u>
NMGM $(q, \underline{\tilde{u}}_q, \underline{f}_q, K_q(\cdot))$;
<u>end</u>

wobei **NMGM** $(q, \underline{\tilde{u}}_q, \underline{f}_q, K_q(\cdot))$ eine nichtlineare MGM–Prozedur ist, also z.B.

- die FAS–MGM von A. Brandt (siehe Pkt. 3.4.2.1) oder
- die NMGM von W. Hackbusch (siehe Pkt. 3.4.2.2), in der $\underline{\tilde{f}}_j = K_j(\underline{\tilde{u}}_j)$, $\underline{\tilde{u}}_j$ und der Parameter σ_j für alle $j = \overline{1, q-1}$ benötigt werden.

- **<u>Die Prozedur NMGM $(q, \underline{\tilde{u}}_q, \underline{f}_q, K_q(\cdot))$:</u>**

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{alte Näherung} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ \underline{\text{procedure}}\ \mathbf{NMGM}\ (q, \underline{\tilde{u}}_q, \underline{f}_q, K_q(\cdot)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{neue Näherung} \end{array}$$

C: Zur Lösung von $K_q(\underline{u}_q) = \underline{f}_q$ *mit der Startnäherung* $\underline{\tilde{u}}_q$.

<u>if</u> $q = 1$ <u>then</u> „*Löse* $K_1(\underline{u}_1) = \underline{f}_1$ *hinreichend genau z.B. mit dem Newton–Verfahren unter Verwendung der Startnäherung* $\underline{\tilde{u}}_1$.“
<u>else</u>

<u>begin</u> <u>for</u> $j := 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> $\nu_V(q)$ <u>do</u> $\underline{\tilde{u}}_q := NG_q^{(V)}(\underline{\tilde{u}}_q, \underline{f}_q, K_q(\cdot))$;

$\underline{d}_q := \underline{f}_q - K_q(\underline{\tilde{u}}_q)$;

$\underline{d}_{q-1} := I_q^{q-1}\, \underline{d}_q$;

$[\underline{\tilde{u}}_{q-1} := \hat{I}_q^{q-1}\, \underline{\tilde{u}}_q;\ \underline{\tilde{f}}_{q-1} := K_{q-1}(\underline{\tilde{u}}_{q-1});\ \sigma_{q-1} = 1]$ FAS *von A. Brandt;*

$[\underline{\tilde{u}}_{q-1} =$ *geg.*, $\underline{\tilde{f}}_{q-1} = K_{q-1}(\underline{\tilde{u}}_{q-1}) =$ *geg. von* FNMGM,

$\sigma_{q-1} := \sigma(\|\underline{d}_{q-1}\|)]$ *in* NMGM *von W. Hackbusch;*

$\underline{v}_{q-1} := \underline{\tilde{u}}_{q-1}$;	TGM: $K_{q-1}(\underline{\tilde{u}}_{q-1} + \sigma_{q-1}\, \underline{w}_{q-1}) = \underline{\tilde{f}}_{q-1} + \sigma_{q-1}\, \underline{d}_{q-1}$

<u>for</u> $j := 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> $\gamma(q-1)$ <u>do</u>

NMGM $(q-1, \underline{v}_{q-1}, \underline{\tilde{f}}_{q-1} + \sigma_{q-1}\, \underline{d}_{q-1}, K_{q-1}(\cdot))$;

$\underline{w}_{q-1} := (\underline{v}_{q-1} - \underline{\tilde{u}}_{q-1})/\sigma_{q-1}$;

$\underline{\tilde{u}}_q := \underline{\tilde{u}}_q + I_{q-1}^q\, \underline{w}_{q-1}$;

<u>for</u> $j := 1$ <u>step</u> 1 <u>until</u> $\nu_N(q)$ <u>do</u> $\underline{\tilde{u}}_q := NG_q^{(N)}(\underline{\tilde{u}}_q, \underline{f}_q, K_q(\cdot))$;

<u>end</u>

<u>Bemerkungen:</u>

1. $\gamma(1) = 1$.
2. $NG_q^{(N/V)}(\cdot,\cdot,\cdot)$ bezeichnen nichtlineare Vor– bzw. Nachglättungsprozeduren (siehe Pkt. 3.4.2.1).

Kapitel 4

Allgemeine Methoden zur Konvergenz– und Effektivitätsanalyse von Multigrid–Algorithmen für lineare Probleme

4.1 Allgemeine Bemerkungen zur Konvergenzuntersuchung linearer Iterationsverfahren

- **Jedes (zweischichtige, stationäre, reguläre) „lineare“ Iterationsverfahren zur Lösung des regulären ($\exists\, K_l^{-1}$) GS**

  (1) $\qquad K_l\,\underline{u}_l \;=\; \underline{f}_l$

  kann man in der Form

  $$(2)\qquad \begin{cases} \underline{u}_l^{k+1} = M_l \underline{u}_l^k + A_l \underline{f}_l & (\curvearrowright\ \underline{u}_l^k \longmapsto \underline{u}_l^{k+1} - \text{ affine lineare Abb.}) \\ k = 0, 1, \ldots \\ \underline{u}_l^0 \in \mathbb{R}^{N_l} - \text{ gegebene Startnäherung} \end{cases}$$

  aufschreiben, wobei

  $$M_l : \mathbb{R}^{N_l} \longmapsto \mathbb{R}^{N_l} - \overset{\text{(Fehler–)}}{\text{Iterationsoperator}} \text{ (–matrix)},$$

  $$A_l : \mathbb{R}^{N_l} \longmapsto \mathbb{R}^{N_l} - \text{affiner Anteil.}$$

  $\uparrow$

  lineare Operatoren ($\curvearrowright$ Matrizen)

- **Beispiele:**

1. ω–JACOBI–Verfahren: $D_l = \operatorname{diag} K_l$

$$\underline{u}_l^{k+1} = \underbrace{(I_l - \omega D_l^{-1} K_l)}_{=:M_l} \underline{u}_l^k + \underbrace{\omega D_l^{-1}}_{=:A_l} \underline{f}_l \qquad \boxed{\begin{array}{l} B_l = D_l \\ \tau \;\; = \omega \end{array}}$$

2. Präkonditioniertes Richardson–Verfahren:

$$B_l \, \frac{\underline{u}_l^{k+1} - \underline{u}_l^k}{\tau} + K_l \, \underline{u}_l^k = \underline{f}_l \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u}_l^{k+1} = \underbrace{(I_l - \tau B_l^{-1} K_l)}_{=:M_l} \underline{u}_l^k + \underbrace{\tau B_l^{-1}}_{=:A_l} \underline{f}_l$$

3. Zweigittermethode, MGM: $\underline{u}_l^k \longmapsto \underline{u}_l^{k+1} =$ i. allg. affine linear
(↳ Pkt. 4.2.1 bzw. 4.3.1)

- Als <u>**notwendige**</u> **Konvergenzbedingung** (gegen die Lsg. von (1)) erhält man sofort die Forderung, daß die Lösung $\boldsymbol{\underline{u}_l = K_l^{-1} \underline{f}_l}$ von (1) Fixpunkt von (2) sein muß, d.h.

$$(3) \quad \underline{u}_l = M_l \underline{u}_l + A_l \underline{f}_l \equiv M_l \underline{u}_l + A_l \underbrace{K_l \, \underline{u}_l}_{= \underline{f}_l}, \quad \forall \, \underline{u}_l \in I\!R^{N_l}$$

$$\uparrow$$
$$(\forall \, \underline{f}_l \in I\!R^{N_l})$$

$$\Longleftrightarrow I_l = M_l + A_l \, K_l$$

$$(4) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{A_l = (I_l - M_l) K_l^{-1}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{M_l = I_l - A_l \, K_l}$$

- **Um das Konvergenzverhalten**

$$\underline{z}_l^k = \underline{u}_l - \underline{u}_l^k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 \;? \qquad (\text{Fehler} \longrightarrow 0 \;?)$$

des Iterationsverfahrens (2) zu untersuchen, müssen wir das <u>Fehlerschema</u> aufstellen.
Aus (3) – (2) folgt

$$(5) \qquad \underline{z}_l^{k+1} = M_l \, \underline{z}_l^k,$$

d.h. für das Konvergenzverhalten des Iterationsverfahrens (2) ist nur der <u>Iterationsoperator</u> M_l (= Fehlerdämpfungsoperator = Fehlerüberqansoperator) verantwortlich !

- **Zur Bestimmung von M_l:**

1. $\underline{f}_l = 0$ ↳ affiner Teil $= 0$ ↳ $\underline{u}_l^{k+1} = M_l \, \underline{u}_l^k$ ↳ $\boxed{M_l}$

2. $A_l = (I_l - M_l)\, K_l^{-1}$

Bekannte Resultate zur Konvergenz von Iterationsverfahren:

1. Konvergenz $\Longleftrightarrow \rho_l^* \equiv \rho_{h_l}^* := \rho(M_l) < 1$,
   $(\underline{z}_l^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0)$ wobei $\rho(M_l) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } M_l\}$
   $= \text{Spektralradius von } M_l$

2. Konvergenzgeschwindigkeit ist die Frage danach, wie schnell der Fehler $\underline{z}_l^k$ in einer bestimmten Norm reduziert werden kann:

$$\overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad \underset{\text{Vektornorm}}{\|\, \underline{z}_l^{k+1} \,\|} \quad \leq \quad \underset{\substack{\text{zugeordnete}\\ \text{Matrixnorm}}}{\|\, M_l \,\|} \quad \underset{\text{Vektornorm}}{\|\, \underline{z}_l^k \,\|}.$$

Definieren: $\sigma_l^* := \|\text{ Iterationsoperator }\| =$

$$= \underset{\text{zugeordnete Matrixnorm}}{\|\, M_l \,\| := \sup_{\uparrow\ \underline{v}_l \neq 0} \frac{\|M_l \underline{v}_l\|}{\|\underline{v}_l\|}} \leq \|\, M_l \,\|_{\text{verträglich}}$$

heißt Konvergenzfaktor (KF) bzw. Konvergenzrate:

$$\Longrightarrow \|\, \underline{z}_l^{k+1} \,\| \leq (\sigma_l^*)^{k+1} \|\, \underline{z}_l^0 \,\|$$

Aus $\sigma_l^* < 1 \Longrightarrow$ Konvergenz mit KF σ_l^* in der Norm $\|\cdot\|$.

3. Asymptotische Eigenschaften für $h = h_l \to 0 \quad (l \to \infty)$:

$\rho_h^* \underset{h\to 0}{\longrightarrow}$ $\rho^* = 1$ bei den meisten bekannten IV (Jacobi, Gauß–Seidel, SOR, ...),
$\rho^* < 1$ typisch für MGM (z.B. $\rho^* = 0.1$),

$\sigma_h^* \longrightarrow$ $\sigma^* = 1$ bei den meisten bekannten Iterationsverfahren (IV),
$\sigma^* < 1$ typisch für MGM (z.B. $\sigma^* = 0.1$).

Literatur:

[24] Hackbusch W.: Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.
Teubner–Studienbücher Mathematik, Teubner–Verlag, Stuttgart 1991 (→ Kap. 3)

4.2 Konvergenz des Zweigitterverfahrens (TGM)

4.2.1 Der Zweigitteriterationsoperator M_h^H

- **Der Glättungsoperator $G_h^{(V/N)}$ habe die Form**

$$(1) \qquad G_h^{(V/N)} \underline{u}_h^k := \underbrace{\overset{\substack{\text{Iterationsoperator des Glättungsverfahrens}\\ \downarrow}}{S_h^{(V/N)}} \underline{u}_h^k}_{\text{linearer Anteil}} + \underbrace{T_h^{(V/N)} \underline{f}_h}_{\text{affiner Anteil}}$$

- **Btr. das Zweigitterverfahren aus Pkt. 3.1 für den Fall $\underline{f}_h = \boldsymbol{O}$.**

In diesem Fall ist der Operator, der $\underline{u}_h^k$ in $\underline{u}_h^{k+1}$ überführt, identisch mit dem Zweigitteriterationsoperator (affiner Anteil fehlt !) = Fehlerübergangsoperator, der i. allg. Fall ($\underline{f}_h \neq \boldsymbol{O}$) den alten Fehler $\underline{z}_h^k$ in den neuen Fehler $\underline{z}_h^{k+1}$ überführt:

$$\begin{aligned}
\underline{u}_h^{k+1} &= \left(S_h^{(N)}\right)^{\nu_N} \left(\underline{\hat{u}}_h^k + \tau_h \, \underline{\hat{w}}_h^k\right) = \\
&= \left(S_h^{(N)}\right)^{\nu_N} \left(\underline{\hat{u}}_h^k + \tau_h \, I_H^h \, K_H^{-1} \, \underline{\hat{d}}_H^k\right) = \\
&= \left(S_h^{(N)}\right)^{\nu_N} \left(\underline{\hat{u}}_h^k + \tau_h \, I_H^h \, K_H^{-1} \, I_h^H \, \underline{\hat{d}}_h^k\right) = \\
&= \left(S_h^{(N)}\right)^{\nu_N} \left(\underline{\hat{u}}_h^k + \tau_h \, I_H^h \, K_H^{-1} \, I_h^H \Big(\underbrace{\underline{f}_h}_{=\boldsymbol{O}} - K_h \underline{\hat{u}}_h^k\Big)\right) = \\
&= \left(S_h^{(N)}\right)^{\nu_N} \left(\underline{\hat{u}}_h^k - \tau_h \, I_H^h \, K_H^{-1} \, I_h^H \, K_h \, \underline{\hat{u}}_h^k\right) = \\
&= \underbrace{\left(S_h^{(N)}\right)^{\nu_N} \left(I_h - \tau_h \, I_H^h \, K_H^{-1} \, I_h^H \, K_h\right) \left(S_h^{(V)}\right)^{\nu_V}}_{=:M_h^H} \underline{u}_h^k
\end{aligned}$$

- **<u>Resultat:</u>**

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Zweigitteriterationsoperator:}\\ M_h^H := \left(S_h^{(N)}\right)^{\nu_N} \underbrace{\left(I_h - \tau_h \, I_H^h \, K_H^{-1} \, I_h^H \, K_h\right)}_{=:\,C_h^H = \text{Grobgitterkorrekturoperator}} \left(S_h^{(V)}\right)^{\nu_V}\end{array}}$$

- **Aus Pkt. 4.1 folgt damit für den allg. Fall ($\underline{f}_h \neq O$):**

  - Fehler: $\underline{z}_h^{k+1} = M_h^H \, \underline{z}_h^k$ mit $\underline{z}_h^k = \underline{u}_h - \underline{u}_h^k$
    $\downarrow$
    d.h. M_h^H = Fehlerübergangsoperator

  - TGM: $$\underline{u}_h^{k+1} = \underbrace{M_h^H \, \underline{u}_h^k}_{=\text{linearer Teil}} + \underbrace{\underbrace{\left(I_h - M_h^H\right) K_h^{-1}}_{=: A_h} \underline{f}_h}_{=\text{affiner Teil}}$$

    $$\underline{u}_h^{k+1} = \left(I_h - \underbrace{\left[\left(I_h - M_h^H\right) K_h^{-1}\right]}_{=: A_h =: B_h^{-1} \Rightarrow \text{Präkonditionierer !}} K_h\right) \underline{u}_h^k + \left(I_h - M_h^H\right) K_h^{-1} \underline{f}_h$$

    $$B_h(\underline{u}_h^{k+1} - \underline{u}_h^k) + K_h \, \underline{u}_h^k = \underline{f}_h$$

    $\widehat{=}$ Präkonditioniertes Richardson–Verfahren mit $\tau = 1$ (siehe Kap. 6 !)

- **<u>Bemerkungen:</u>**

  1. Zur Wahl des Grobgitterkorrektur–Relaxationsparameters τ_h:
     - i. allg.: $\tau_h = 1$
     - K_h spd $\curvearrowright$
       (a) $\tau_h = \tau_h(k) \to$ nichtstationäres IV (Tschebyschev–Idee)
       (b) $\tau_h = \tau_h\left(\underline{\hat{d}}_h^k, \underline{\hat{w}}_h^k\right) \to$ nichtaffine lineares IV (Gradientenidee),

       d.h. Energie $:= J\left(\underline{\hat{u}}_h^k + \tau \, \underline{\hat{w}}_h^k\right) \longrightarrow \min\limits_{\tau}$

       mit $J_h(\underline{v}_h) := \frac{1}{2}(K_h \, \underline{v}_h; \underline{v}_h) - (\underline{f}_h, \underline{v}_h)$,

       $\curvearrowright \tau_h := \left(\underline{\hat{d}}_h^k, \underline{\hat{w}}_h^k\right) / \left(K_h \, \underline{\hat{w}}_h^k, \underline{\hat{w}}_h^k\right)$.

  2. Glättungsverfahren muß nichtnotwendig stationär oder affine linear sein, z.B. Tschebyschev–Typ–Verfahren, Gradientenverfahren, CG–Verfahren usw.
     $\Longrightarrow$ Zweigitter– bzw. Multigriditeration ist dann natürlich ebenfalls nichtnotwendig stationär oder affine linear !

4.2.2 Methoden zur Abschätzung von M_h^H

- **pragmatisches Herangehen:** $\Longrightarrow$ Fehlschlag !

$$\text{z.B. } S_h^{(N)} = S_h^{(V)} = S_h$$

$$\rho\,(M_h^H) \;\leq\; \left\| M_h^H \right\| \;=\; \left\| \left(\overset{N}{S_h}\right)^{\nu_N} C_h^H \left(\overset{V}{S_h}\right)^{\nu_V} \right\| \;\leq\; \left\| C_h^H \right\| \; \left\| S_h \right\|^{\nu}$$

mit $\nu = \nu_V + \nu_N = O(1) = 1, \ldots, 10$

$$\| C_h^H \| \geq 1 \qquad\qquad \| S_h \|^{\nu} = (1 - O(h^{\alpha}))^{\nu} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 1,$$

da $\nu = \text{fix} = 1, \ldots, 10$.

Tatsächlich:

$I_h^H = \left[\; \equiv \; \right]_{N_H \times N_h}$ – Restriktionsoperator,

ker $I_h^H := \left\{ \underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h} : I_h^H \, \underline{u}_h = \boldsymbol{O} \right\}$ $\curvearrowright$ „hochfrequent“,

i. allg. rang $I_h^H = N_H$ ($\curvearrowright$ Vollrangmatrix)

$\Rightarrow$ dim ker $I_h^H = N_h - N_H > 0$

$$\Longrightarrow \| C_h^H \| \;=\; \sup_{\substack{\underline{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h} \\ \underline{u}_h \neq \boldsymbol{O}}} \frac{\| C_h^H \, \underline{u}_h \|}{\| \underline{u}_h \|} \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{\underline{u}_h \in K_h^{-1}(\ker\, I_h^H) \\ \underline{u}_h \neq \boldsymbol{O}}} \frac{\| \underline{u}_h - \tau_h \, I_H^h \, K_H^{-1} \overbrace{I_h^H \, K_h \, \underline{u}_h}^{=\boldsymbol{O}} \|}{\| \underline{u}_h \|} = 1.$$

! $\boxed{\text{Keine Berücksichtigung der Unterschiede zwischen niedrig– und hochfrequenten Anteilen !}}$

- **Ausweg:** = andere (nichttriviale) Aufspaltung von M_h^H ! (siehe Pkt. 4.2.2)

4.2.2.1 Methode der Fourier–Analysis

1. Modell–Problem–Analyse:

   Idee: Fehleranalyse durch Zerlegung des Fehlers $\underline{z}_h^k$ z.B. nach den Eigenfunktionen von K_h bzw. $K_h \underline{\varphi}_h = \lambda B_h \underline{\varphi}_h$, falls $S_h = I - \omega B_h^{-1} K_h$.

   Anwendung: nur auf beschränkte Problemklassen möglich:

   1) Efkt. von K_h müssen explizit bekannt sein
   $\longrightarrow$ Rechteck, konstante Koeff., uniforme Netze etc.

   2) Efkt. müssen bei der Glättung invariant bleiben:
   $\longrightarrow$ Jacobi- bzw. Richardson-Typ–Glättung !

   3) Invarianzeigenschaften bei Grobgitterkorrektur:
   $\longrightarrow$ Einschränkungen an Projektion und Interpolation !

   Resultat: Analyse liefert Spektralradius und exakte Konvergenzfaktoren (i. allg. bzgl. der Euklidischen Norm).

   Bsp.: 1. MBsp. 1 (Kap. 1)/FDM: $K_h = h^{-2}[-1 \;\; 2 \;\; -1]_h, \quad H = 2h$

   $G_h = \omega$–Jacobi: $\nu_V = \nu, \;\; \nu_N = 0 \curvearrowright \omega = 1/2 \Rightarrow$ GF: $\mu = 1/2$

   $I_h^{2h} = \frac{1}{4}[1 \;\; 2 \;\; 1]_h =$ "Full residual weighting"

   $K_{2h} = \frac{1}{(2h)^2}[-1 \;\; 2 \;\; -1]_{2h}$

   $I_{2h}^h =$ lineare Interpolation

$\omega = 1/2$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$\rho\left(M_h^{2h}\right)$	1/2	1/4	1/8	0.083
$\Vert M_h^{2h} \Vert_2$	1/2	1/4	0.156	0.116
μ^ν	1/2	1/4	1/8	0.0625

   2. MBsp. 2: [25] Lecture Notes Bd. 960, S. 29 – 41.

2. Lokale Fourier–Analyse: $(\longrightarrow$ Archi Brandt)

   Idee: „lokale" Idealisierung des Problems unter Vernachlässigung der Rbd., von Gitteränderungen, von Koeffizientenänderung etc.
   $\Longrightarrow$ sodaß Fourier–Analyse nach $e^{i\theta x/h}$–Fkt. möglich ist !

   Resultat: liefert in einigen Situationen realistische KF !

   Literatur: [25] Lecture Notes Bd. 960, S. 77 – 140.

4.2.2.2 Klassische und allgemeine Methoden

- **„klassisch“ = „für hinreichend viele Glättungsschritte“.**

- **Btr. hier nur den Fall mit Vorglättung: $\boldsymbol{\nu_V = \nu}$, $\boldsymbol{\nu_N = 0}$**

  $\Longrightarrow \; M_h^H = \left(I_h - \tau_h\, I_H^h\, K_H^{-1}\, I_h^H\, K_h\right) S_h^\nu = C_h^H\, S_h^\nu.$

- <u>**Methode I:**</u> Die summarische Aufspaltung (russische Schule, 1966 ff.)

  - Btr.

$$M_h^H \;=\; C_h^H\, S_h^\nu \;=\; C_h^H\, I_h\, S_h^\nu \;=\; C_h^H \left(P_h^{\text{low}} \,\oplus\, P_h^{\text{high}}\right) S_h^\nu$$

$$\uparrow \qquad\qquad \nearrow$$

$$\boxed{I_h = P_h^{\text{low}} \oplus P_h^{\text{high}}}$$

$\oplus$ orthogonale Zerlegung
bzgl. energetischen
Skalarproduktes, falls
K_h spd und P_h–Orthoproj.

$$\downarrow$$

$\widehat{=}$ Aufspaltung des Gitterfktraumes $\mathbb{G}(\omega_h) = \mathbb{G}^{\text{low}}(\omega_h) \;\oplus\; \mathbb{G}^{\text{high}}(\omega_h)$

$$\| M_h^H \| \le \underbrace{\|C_h^H P_h^{\text{low}}\|}_{\underline{\underline{\text{klein}}}} \; \underbrace{\|S_h\|^\nu}_{\le 1} \;+\; \underbrace{\|C_h^H\|}_{\le c = \text{const.}} \; \underbrace{\|P_h^{\text{high}} S_h^\nu\|}_{\underline{\underline{\text{klein}}}} = (*) \le \varepsilon + c(GF)^\nu < 1$$

$$\downarrow$$

$$0 < \varepsilon < 1$$

bei geeigneter $(1-ch^\alpha)^\nu \approx 0.99$
Wahl von "low"

$\uparrow$

H–Approximation der
niedrigfrequenten Anteile

für hinreichend
große ν

$\uparrow$

Glättung der
hochfrequenten Anteile

  - <u>Bemerkung:</u> "low"/"high"

    1. $K_h = K_h^T$ p.d.: Energienorm $\|\cdot\|^2 := (K_h\cdot,\cdot) = a(\cdot,\cdot)$:

       $\mathbb{G}^{\text{low}}(\omega_h) := \text{span}\,\{\underline{\varphi}_h^{(i)} : i \in \omega_h^{\text{low}}\}$ – niedrigfrequente Efkt.,

       $\mathbb{G}^{\text{high}}(\omega_h) := \text{span}\,\{\underline{\varphi}_h^{(i)} : i \in \omega_h^{\text{high}}\}$ – hochfrequente Efkt.,

       $\underline{\varphi}_h^{(i)}$ Efkt.: $K_h\,\underline{\varphi}_h^{(i)} \;=\; \lambda_i\, D_h\,\underline{\varphi}_h^{(i)}$ bzw. $K_h\,\underline{\varphi}_h^{(i)} \;=\; \lambda_i\, B_h\,\underline{\varphi}_h^{(i)}$.

       (Jacobi: $D_h = \text{diag}\, K_h$) (Richardson–Glätter mit Präkonditionierer B_h)

Fehler: $\underline{z}_h^k = \underline{u}_h - \underline{u}_h^k = \underbrace{\sum_{i\in\omega_h^{\text{low}}} \alpha_i^{(k)} \underline{\varphi}_h^{(i)}}_{H\text{–Approximation}} \oplus \underbrace{\sum_{i\in\omega_h^{\text{high}}} \alpha_i^{(k)} \underline{\varphi}_h^{(i)}}_{\text{Glättung}}$

$\oplus$ bzgl. $(\cdot,\cdot)_{K_h}$, $(\cdot,\cdot)_{D_h}$ bzw. $(\cdot,\cdot)_{B_h}$

2. $\mathbb{G}^{\text{low}}(\omega_h) := \text{im } I_H^h$, $\quad \mathbb{G}^{\text{high}}(\omega_h) := \ker I_h^H$,
   falls $I_h^H = (I_H^h)^T$.

   Diese Wahl wird durch die folgende Zerlegung motiviert:

$$\begin{array}{rcccc}
\mathbb{R}^{N_h} & = & \ker I_h^H & \oplus & (\ker I_h^H)^\perp \\
 & & & \uparrow & \| \\
 & & & (\cdot,\cdot) & \text{im } (I_h^H)^T = \text{im } I_H^h \\
 & = & \ker I_h^H & \oplus & \text{im } I_H^h \\
 & & \text{„hochfrequent“} & & \text{„niederfrequent“}
\end{array}$$

   Literatur: [1983: McCormick]

- Bemerkung: Nachteile dieser Abschätztechnik:
  1. $\nu =$ „hinreichend groß“ $= O(1) \searrow$
  2. $\| M_h^H \| \leq (*) \leq \varepsilon + c\,(GF)^\nu < 1$ für $\varepsilon \in [0,1)$.
     $(*) \geq \|C_h^H P_h^{\text{low}}\| \; \|S_h\|^\nu \approx \varepsilon \cdot (1 - ch^\alpha)^\nu \approx 0.99 \cdot \varepsilon$
     $=$ praktisch unabhängig von ν !

- Literatur: [3], [1], [30],...

■ **Methode II:** Die Produktaufspaltung (W. Hackbusch, 1989 ff.)

- Btr.

$$M_h^H = C_h^H S_h^\nu = C_h^H I_h S_h^\nu = C_h^H K_h^{-1} K_h S_h^\nu$$

$$\uparrow \; \boxed{I_h = K_h^{-1} K_h}$$

$$\|M_h^H\| \leq \underbrace{\|C_h^H K_h^{-1}\|}_{\leq ch^\delta} \cdot \underbrace{\|K_h S_h^\nu\|}_{\leq \eta(\nu) h^{-\delta}} \leq c\,\eta(\nu) < 1$$

mit $\eta(\nu) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für hinreichend große ν !

unabhängig von h, z.B. $\eta(\nu) = \frac{\bar{c}}{\bar{c}+\nu}$

$\uparrow$ $\boxed{\text{Approximationseigenschaft (approximation property)}}$ $\quad$ $\uparrow$ $\boxed{\text{Glättungseigenschaft (smoothing property)}}$

- Motivation: $K_h^{-1} \sim A^{-1}$: $V_0^* \longrightarrow V_0$

  $H^{-1} \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^1$ $\}$ falls A Diff.–Oper.

  $L_2 \longrightarrow H^2$ $\}$ 2. Ordnung

  Pseudodifferentialoperator (der Ordnung +2) wirkt glättend !

- Nachteil: $\nu = O\,(1)$ – hinreichend groß !?

- Vorteil gegenüber Methode I:

  $\| M_h^H \| \le (*) \le c\,\eta\,(\nu) \overset{\text{z.B.}}{=} O\,(\nu^{-1}) \underset{\nu\to\infty}{\overset{\text{schnell}}{\longrightarrow}} 0$

- Bemerkung: Im Kap. 5 (Teil II) werden wir die Produktaufspaltung benutzen !

- Literatur: [23] Hackbusch W.: Multigrid Methods and Applications. Springer–Verlag, Berlin 1985.

4.3 Konvergenz– und Effektivitätsabschätzungen für Multigrid–Methoden

4.3.1 Der Multigrid–Iterationsoperator M_l

■ **Zweigitterverfahren:** $\longrightarrow$ siehe Pkt. 4.2.1 ! $(q = h,\ \ q-1 = H)$

$$M_q^{q-1} = (S_q^{(N)})^{\nu_N}(I_q - \tau_q\, I_{q-1}^q\, \boldsymbol{K_{q-1}^{-1}} I_q^{q-1}\, K_q)\,(S_q^{(V)})^{\nu_V}$$

Defektgleichung

(1) $\boxed{K_{q-1}\,\underline{w}_{q-1} \;=\; \underline{d}_{q-1}}$ wird exakt gelöst, d.h. $\underline{w}_{q-1} = K_{q-1}^{-1}\,\underline{d}_{q-1}$!

■ **MGM:** Lösen (1) näherungsweise durch $\gamma_{q-1} \equiv \gamma\,(q-1)$ MG–Iterationen ($(q-1)$-Gitter–Zyklen) mit Startnäherung $\underline{w}_{q-1}^0 := \boldsymbol{O}$!

↳ Bezeichnen $(q-1)$–Gitter–Iterationsoperator mit M_{q-1}.

↳ Ziel: Rekursive Definition von M_q !

- **Machen dazu folgende einfache Überlegung (lassen Index „$q-1$" weg):**

Btr. (1) $K\,\underline{w} = \underline{d}$ mit Startnäherung $\underline{w}^0 = \boldsymbol{O}$ für MGM ↷

$$\begin{array}{cccc} M^\gamma & : & K^{-1}\,\underline{d} - \underline{w}^0 & \longmapsto & K^{-1}\,\underline{d} - \underline{w}^\gamma, \text{ d.h.} \\ & & \text{Anfangsfehler} & & \text{Fehler nach } \gamma \text{ Zyklen} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad K^{-1}\,\underline{d} - \underline{w}^\gamma = M^\gamma\,(K^{-1}\,\underline{d} - \underline{w}^0) = M^\gamma\,K^{-1}\,\underline{d}$$

- **Resultat:** $\underline{w}^\gamma = (I - M^\gamma)\,K^{-1}\,\underline{d}$ ↷ gestörte Grobgittergleichung !

$$\begin{array}{cccc} \Longrightarrow & K_{q-1}^{-1} & \rightsquigarrow & \left(I_{q-1} - M_{q-1}^{\gamma_{q-1}}\right)\,K_{q-1}^{-1} \\ & \text{exakte Lösung der} & & \text{approximative Lösung durch} \\ & (q-1)\text{–Gittergleichung} & & \gamma_{q-1}\ \ (q-1)\text{–Gitter–Zyklen} \end{array}$$

- **Lemma 4.1:**

Der Iterationsoperator M_l der MGM wird rekursiv durch die folgenden Beziehungen definiert:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_2 = M_2^1 \equiv \left(S_2^{(N)}\right)^{\nu_N} \left(I_2 - \tau_2\,I_1^2\,K_1^{-1}\,I_2^1\,K_2\right) \left(S_2^{(V)}\right)^{\nu_V} \\ M_q = \left(S_q^{(N)}\right)^{\nu_N} \left(I_q - \tau_q\,I_{q-1}^q \left(I_{q-1} - M_{q-1}^{\gamma_{q-1}}\right)\,K_{q-1}^{-1}\,I_q^{q-1}\,K_q\right) \left(S_q^{(V)}\right)^{\nu_V} \\ q \quad = 3, 4, \ldots, l \end{array} \right.$$

4.3.2 Analyse des Iterationsoperators M_l und Normabschätzung

- **Lemma 4.1** $\Longrightarrow$ Der MG–Iterationsoperator M_q kann als gestörter Zweigitteroperator M_q^{q-1} aufgefaßt werden:

$M_2 \;=\; M_2^1$ – bei exakter Lösung der Gleichung auf dem gröbsten Gitter (z.B. durch direktes Verfahren),

$q = 3, 4, \ldots, l$:

$$M_q = \underbrace{\left(\overset{N}{S_q}\right)^{\nu_N} \left(I_q - \tau_q\,I_{q-1}^q\,K_{q-1}^{-1}\,I_q^{q-1}\,K_q\right) \left(\overset{V}{S_q}\right)^{\nu_V}}_{=:\,M_q^{q-1}} +$$

$$+\tau_q \underbrace{\left(\overset{N}{S_q}\right)^{\nu_N} I_{q-1}^q}_{=:\,A_{q-1}^q}\,M_{q-1}^{\gamma_{q-1}}\,\underbrace{K_{q-1}^{-1}\,I_q^{q-1}\,K_q \left(\overset{V}{S_q}\right)^{\nu_V}}_{=:\,B_q^{q-1}} \;=\; M_q^{q-1} + \tau_q\,A_{q-1}^q\,M_{q-1}^{\gamma_{q-1}}\,B_q^{q-1}.$$

■ Lemma 4.2:

Vor.: $\tau_q = 1$,

$\|M_q^{q-1}\| \le \sigma^* < 1$ (siehe Pkt. 4.2),

$\|A_{q-1}^q\| \cdot \|B_q^{q-1}\| \le c = \text{const.} \ne c\,(h_q)$,

$q = 2, 3, \ldots, l$ mit $l = 3, 4, \ldots$.

Bh.: Dann gilt

$$\|M_l\| \le \eta_l,$$

wobei η_l rekursiv durch die folgende Vorschrift definiert wird:

$$(3) \qquad \begin{cases} \eta_2 = \sigma^*, \\ \eta_q = \sigma^* + c\,\eta_{q-1}^{\gamma_{q-1}}, \quad q = 3, 4, \ldots, l, \end{cases}$$

mit $l = 3, 4, \ldots$.

Beweis:

Aus der Darstellung $M_q = M_q^{q-1} + A_{q-1}^q\, M_{q-1}^{\gamma_{q-1}}\, B_q^{q-1}$ und den Voraussetzungen folgt sofort die Abschätzung

$$\|M_q\| \le \|M_q^{q-1}\| + \|A_{q-1}^q\|\, \|M_{q-1}\|^{\gamma_{q-1}}\, \|B_q^{q-1}\| \le$$

$$\le \sigma^* + c\,\eta_{q-1}^{\gamma_{q-1}} := \eta_q .$$

q.e.d.

■ Folgerungen aus Lemma 4.2:

Aus Lemma 4.2 lassen sich nun h_l–unabhängige (d.h. levelanzahlunabhängige) Konvergenzfaktorabschätzungen für das MG–Verfahren ableiten, falls die (h_q, h_{q-1})–Zweigitterverfahren für alle q mit hinreichend kleinem σ^* konvergieren und das Zyklenregime $\{\gamma_q\}_{q=2,3,\ldots}$ geeignet gewählt wird !

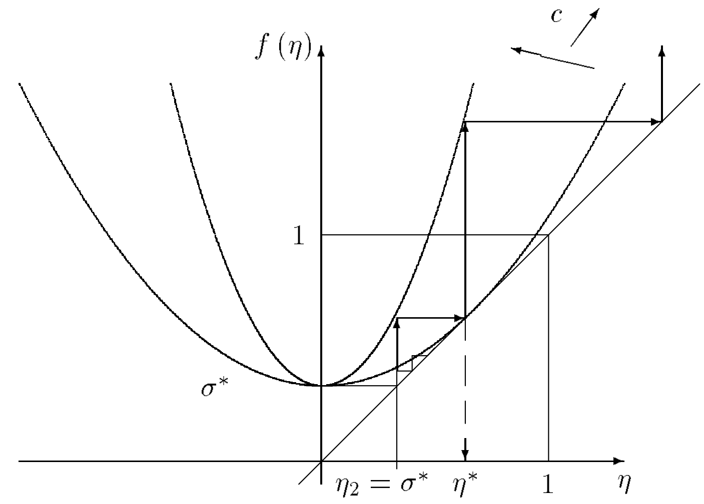
Btr. dazu die Rekursionsformel (3) aus Lemma 4.2

$$\boxed{\eta_q := \sigma^* + c\,\eta_{q-1}^{\gamma_{q-1}}, \quad q = 3, 4, \ldots; \quad \eta_2 = \sigma^*}$$

für die folgenden Fälle:

1. $\underline{\gamma = \gamma_q = 2 \ \forall\, q \ : \ \ W\text{–Zyklus:}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \eta_2 = \sigma^* \\ \eta_q = \sigma^* + c\,\eta_{q-1}^2 \end{array}} \quad = \quad \begin{array}{c} \text{Fixpunktiteration für Fixpunktgleichung:} \\ \eta = f\,(\eta) := \sigma^* + c\,\eta^2 \end{array}$$



$\eta_q \ \nearrow \ \eta^* = \sigma^* + c\,(\eta^*)^2$

$\sigma_* \leq \eta_q < \eta^*$

<u>Vor.:</u> c (bzw. σ^*) hinreichend klein !

<u>Ges.:</u> kleinste Wurzel von $\eta = \sigma^* + c\,\eta^2$, d.h. $\eta^2 - c^{-1}\,\eta + c^{-1}\,\sigma^* = 0$:

$$\Longrightarrow \quad \eta_{1,2} = \frac{1}{2c} \pm \sqrt{\frac{1}{4c^2} - \frac{\sigma^*}{c}} \qquad \text{unter der Vor.} \ \ 1 - 4\,\sigma^*\,c \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \eta^* = \left(1 - \sqrt{1 - 4\,\sigma^*\,c}\right)/2c$$

<u>Resultat:</u>

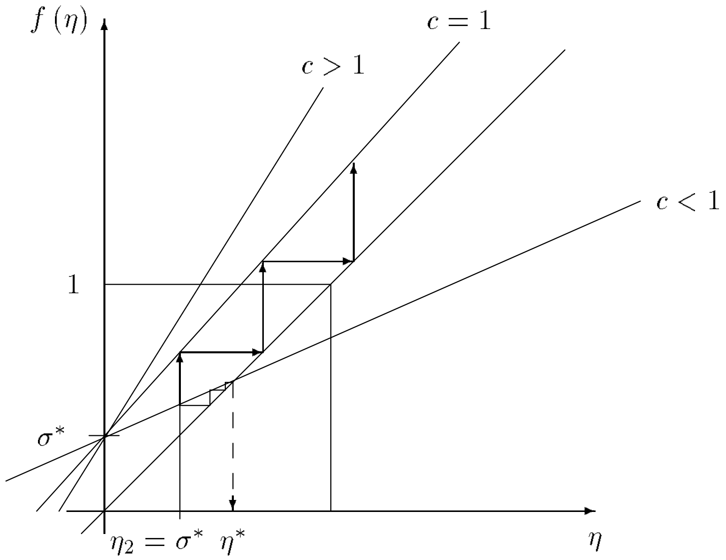
$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\text{Vor.:}} & 4\,\sigma^*\,c \leq 1, \ \text{ d.h. } \ \sigma^* \leq 1/(4c) \\ \underline{\text{Bh.:}} & \sigma_l \equiv \|M_l\| \leq \eta^* = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4\sigma^*\,c}}{2c} \underset{\uparrow}{\leq} 2\,\sigma^* \\ & \forall\, l \geq 2 \qquad\qquad \boxed{\begin{array}{l} 1-\sqrt{1-x} \leq x \\ 1-x \leq \sqrt{1-x}, \ \forall x \in [0{,}1] \end{array}} \end{array}}$$

<u>Beispiel:</u> $c = 1: \ \ \sigma^* = 1/4 \ \Longrightarrow \ \sigma_l \leq \eta^* = 1/2,$

$\sigma^* = 1/10 \ \Longrightarrow \ \sigma_l \leq \eta^* = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0.127.$

2. $\underline{\gamma = \gamma_q = 1 \ \forall\, q \ : \ \ V\text{–Zyklus:}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_2 &= \sigma^* \\ \eta_q &= \sigma^* + c\,\eta_{q-1} \\ q\ &= 3, 4, \ldots \end{aligned}}$$



= Fixpunktiteration für Fixpunktgleichung: $\eta = f\,(\eta) := \sigma^* + c\,\eta$

$$\Longrightarrow \quad \eta = \sigma^* + c\,\eta \ \curvearrowright\ (1-c)\,\eta = \sigma^* \ \curvearrowright\ \eta^* = \frac{\sigma^*}{1-c}$$

<u>Resultat:</u>

<u>Vor.:</u>	$c < 1$
<u>Bh.:</u>	$\sigma_l \equiv \lVert M_l \rVert \leq \eta^* = \dfrac{\sigma^*}{1-c} < 1$, falls $\sigma^* < 1 - c$

<u>Leider:</u> i. allg. $c \geq 1$!
d.h. mit dieser Technik ist <u>kein</u> Konvergenzbeweis für MGM mit V–Zyklus auch bei beliebig guter 2–Gitterrate (σ^* klein !) möglich !
$\Longrightarrow$ Neue Beweistechnik für V–Zyklus notwendig (Teil II) !

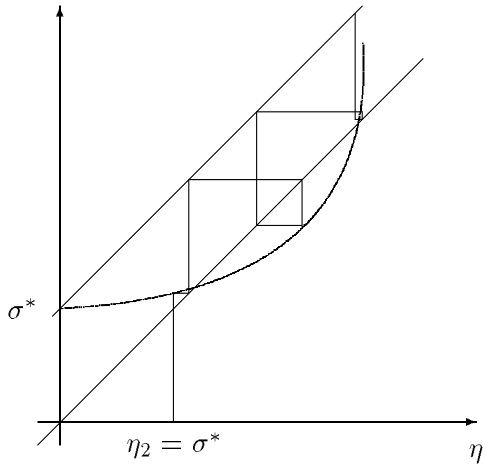
<u>Praktische Regel:</u>

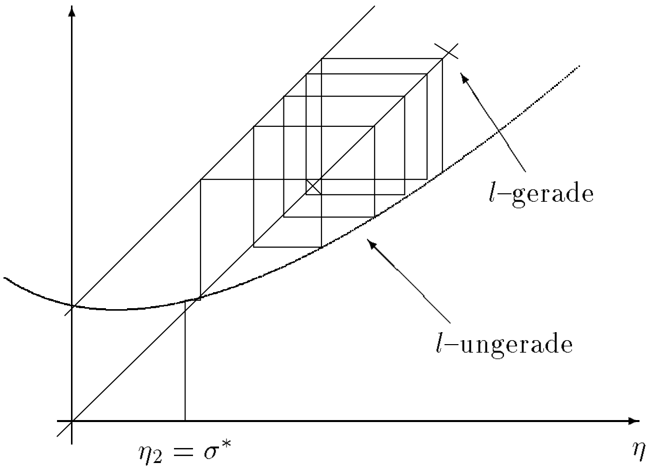
σ^* klein $\Longrightarrow$ W–Zyklus hat gute Konvergenz
$\Downarrow$
V–Zyklus hat gute Konvergenz

für „gutartige“ Probleme !

3. Es lassen sich jedoch Konvergenzresultate ableiten, die „zwischen" reinem V–Zyklus und reinem W–Zyklus liegen:

   (a) <u>Alternierender Zyklus:</u> $$\boxed{\gamma_q = \begin{cases} 1\,, & q - \text{ungerade} \\ 2\,, & q - \text{gerade} \end{cases}}$$





Divergenz, da σ^* zu groß !

- <u>l–ungerade:</u> $\eta_l = \sigma^* + c\eta_{l-1}^2 = \sigma^* + c(\sigma^* + c\eta_{l-2})^2$

  Fixpunktgl.: $\eta = \sigma + c(\sigma^2 + 2c\sigma\eta + c^2\eta^2)$

$$\eta^2 - \frac{1 - 2\sigma c^2}{c^3}\,\eta + \frac{\sigma(1 + c\sigma)}{c^3} = 0$$

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2c^3}\left(1 - 2\sigma c^2 \pm \sqrt{1 - 4c^2(1+c)\sigma}\right)$$

- <u>l–gerade:</u> $\eta_l = \sigma^* + c\eta_{l-1} = \sigma^* + c(\sigma^* + c\eta_{l-2}^2)$

  Fixpunktgl.: $\eta = \sigma + c(\sigma + c\eta^2)$

$$\eta^2 - \frac{1}{c^2}\,\eta + \frac{\sigma(1+c)}{c^2} = 0$$

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2c^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4c^2\sigma(1+c)}\right)$$

Resultat:

Vor.: $4c^2(1+c)\,\sigma^* \le 1$, d.h. $\sigma^* \le \dfrac{1}{4c}\,\dfrac{1}{c(1+c)}$.

Bh.:

$$\sigma_l = \|M_l\| \le \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4c^2(1+c)\,\sigma^*}}{2c^2} \le 2\sigma^*(1+c), & l-\text{gerade} \\ \qquad\qquad\uparrow \\ \qquad\boxed{1-\sqrt{1-x} \le x} \\ \qquad\qquad\downarrow \\ \dfrac{1-2\sigma^* c^2-\sqrt{1-4c^2(1+c)\sigma^*}}{2c^3} \le \dfrac{3\sigma^*}{c}, & l-\text{ungerade} \end{cases}$$

(b) Zusammengesetzter Zyklus: $\gamma_q = \begin{cases} 1\,, & l \ge q \ge l_0 \\ 2\,, & l_0 > q \ge 2 \end{cases}$

Resultat:

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma^* & - & \text{hinreichend klein} \\ l_0 & - & \text{hinreichend groß} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} h_l - (l-)\text{unabhängiger} \\ \text{Konvergenzfaktor} \end{array}$$

$\uparrow$

genaue Analyse
mms

(c) Verallgemeinerter V–Zyklus: $\gamma_q = 1,\ \ \nu_q = s\nu_{q+1}$ mit $s \ge 2$

Resultat:

Vor.:

1) $\sigma_q^* = \|M_q^{q-1}\| \le \dfrac{\alpha}{\nu_q}, \ \ \forall\, q = \overline{2, l},$
mit $\alpha = \text{const.} > 0$ (siehe Teil II),

2) $s > c$,

3) $\dfrac{\alpha}{\nu_l} < \dfrac{s-c}{s}$, d.h. $\nu_l > \dfrac{\alpha s}{s-c}$.

Bh.: $\sigma_l \equiv \|M_l\| \le \dfrac{\alpha}{\nu_l}\,\dfrac{s}{s-c} < 1.$

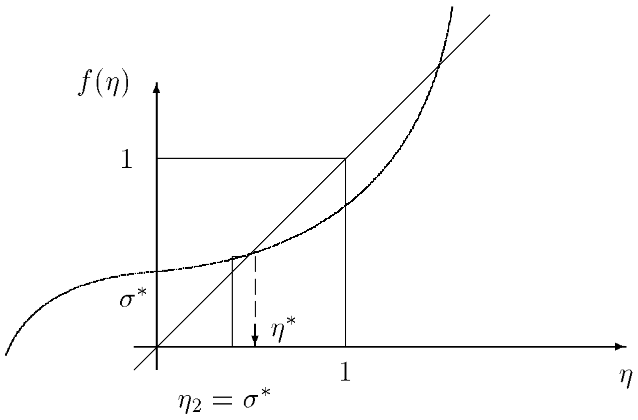
Beweis:

$$\begin{aligned}\eta_l &= \sigma_l^* + c\,\eta_{l-1} \le \frac{\alpha}{\nu_l} + c\left(\frac{\alpha}{s\nu_l} + c\,\eta_{l-2}\right) \le \\ &\le \frac{\alpha}{\nu_l} + c\left(\frac{\alpha}{s\nu_l} + c\left(\frac{\alpha}{s^2\nu_l} + c\,\eta_{l-3}\right)\right) \le \ldots \le \\ &\le \frac{\alpha}{\nu_l}\left(1 + \left(\frac{c}{s}\right) + \left(\frac{c}{s}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c}{s}\right)^{l-2}\right) \le \\ &\le \frac{\alpha}{\nu_l}\,\frac{1}{1-\left(\frac{c}{s}\right)}\,.\end{aligned}$$

q.e.d.

4. $\underline{\gamma = \gamma_q = 3 \;\; \forall\, q: \;\; \text{3er–Zyklus:}}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\eta_2 = \sigma^* \\ &\eta_q = \sigma^* + c\,\eta_{q-1}^3 \\ &q \;\; = 3, 4, \ldots\end{aligned}}$$



Resultat:

Vor.:	σ^* hinreichend klein (mms)
Bh.:	$\Vert M_l \Vert \le \eta^* < 1 \quad \forall\, l \ge 2$ mit η^* – kleinste positive Wurzel: $\eta = \sigma^* + c\,\eta^3.$

- **Generell gilt:**

Voraussetzung an σ^* $\xrightarrow{\text{verschärften sich !}}$

$$\sigma^* < \eta_{4\text{er}} < \eta_{3\text{er}} < \eta_W < \eta_{\text{Alt.}} < \underbrace{\eta_V < 1}_{?}$$

neue Beweis–
technik notwendig !
$\rightarrow$ siehe Teil II.

- **Bemerkung:** zur Konstante c: $\|A^q_{q-1}\| \cdot \|B^{q-1}_q\| \leq c$ mit

$$A^q_{q-1} = \left(\overset{N}{S}_q\right)^{\nu_N} I^q_{q-1}, \;\; B^{q-1}_q = K^{-1}_{q-1}\, I^{q-1}_q\, K_q \left(\overset{V}{S}_q\right)^{\nu_V}.$$

Im allgem.: $c \geq 1$, aber nicht sehr groß !

Bsp.: MBsp. 2, d.h. $-\Delta u = f$ in $\Omega = (0,1)^2$, $u = 0$ auf $\partial\,\Omega$;

FDM–Diskretisierung;

GS–Glättung, I^{q-1}_q – Full weighting, I^q_{q-1} – lineare Interpolation:

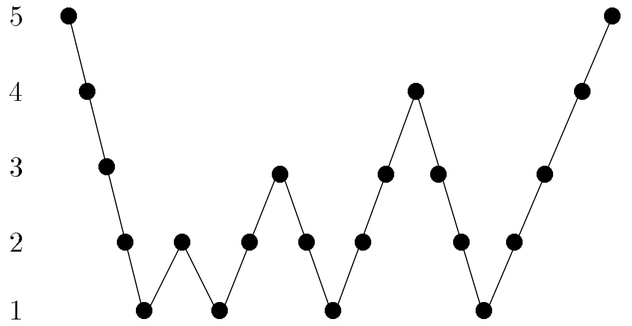
$\Longrightarrow$ a) $\|\cdot\|$ = Spektralnorm: $\curvearrowright$ $c \leq \sqrt{2}$,

b) $\|\cdot\|$ = Energienorm: $\curvearrowright$ $c = 1$.

■ **Ü 4.1** Zwischen dem $V-$ und dem W–Zyklus ist auch der sogenannte F–Zyklus angesiedelt, der, wie folgt, rekursiv definiert wird:

- Für $q = 2$ stimmen $F-$ und W–Zyklus überein;
- Für $q \geq 3$ werden auf dem Level $q - 1$ ein F–Zyklus und anschließend ein V–Zyklus durchgeführt.

Geben Sie das Piktogramm (siehe Pkt. 3.2) für $l = 5$ an,



und schätzen Sie $\| M_l \|$ mit Hilfe von Lemma 4.2 ab, d.h., geben Sie die Bedingung für die Zweigitterrate σ^* an, sodaß gleichmäßige MG–Konvergenzfaktoren erhalten werden können.

4.3.3 Effektivitätsabschätzungen

■ **Sei N_q = Anzahl der Unbekannten auf Gitterniveau $q = \overline{1, l}$:**

$N_q = p \cdot |\omega_q|$, wobei $|\omega_q|$ – Anzahl der Gitterpunkte auf Gitterniveau q,
p – Anzahl der Freiheitsgrade (Knotenparameter) pro Gitterpunkt.

■ **Voraussetzungen:**

1. $N_q \geq \tau \, N_{q-1} \quad \forall \, q = \overline{2, q}$,
   wobei $\tau > 1$ – Vergrößerungsfaktor für die Anzahl der Unbekannten.

   Standard: $h_q = h_{q-1}/2, \quad N_q \approx h_q^{-d}$
   d–dim. Probleme : $\tau = 2^d$
   $d = 2$: $\tau = 4$

Der Einfachheit halber setzen wir

(4) $$N_q \;=\; \tau\, N_{q-1}.$$

2. $\gamma_q = \gamma \quad \forall\, q = \overline{2, l-1}$.

■

j	Gitter $q = l - j$	Anzahl der Unbekannten $N_q = \tau\, N_{q-1}$
0	l	$N_l = N$ = Anzahl der Unbek. auf feinstem Gitter
1	$l-1$	$N_{l-1} \overset{\leq}{=} N/\tau$
$\vdots$	$\vdots$	
$j = \overline{0, l-1}$	$l-j$	$N_{l-j} \overset{\leq}{=} N/\tau^j$
$\vdots$	$\vdots$	
$l-2$	2	$N_2 \overset{\leq}{=} N/\tau^{l-2}$
$l-1$	1	$N_1 \overset{\leq}{=} N/\tau^{l-1}$ = Anzahl der Unbekannten auf dem gröbsten Gitter

■ **Aufwand an arithmetischen Operationen auf $(l-j)$–tem Level, $j = \overline{0, l-2}$:**

1. $\nu = \nu_{l-j} = \nu_V + \nu_N$ – Glättungsschritte: $\nu\, c_1\, N/\tau_j$ arithmetische Operationen

2.
$$\left.\begin{array}{lll} \underline{d}_{l-j} - K_{l-j}\, \underline{w}_{l-j} & – \text{ Defektberechnung} & : \\ I_{l-j}^{l-j-1}\, \underline{d}_{l-j} & – \text{ Restriktion} & : \\ I_{l-j-1}^{l-j}\, \underline{w}_{l-j-1} & – \text{ Interpolation} & : \\ \oplus & – \text{ Korrektur} & : \end{array}\right\} \quad c_2\, N/\tau_j \;\; \text{arithmetische Operationen}$$

■ **Aufwand auf gröbstem Gitter:** $K_1\, \underline{w}_1 = \underline{d}_1$

$\Longrightarrow$ $c_3\, N_1 = c_3\, N/\tau^{l-1}$ – arithmetische Operationen

Bem.: $$c_3 = c_3\,(N_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{direkte Lösung}}}{\leq} \tilde{c}\, \frac{(\text{Bandweite})^2}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ d=2}}{=} O\,(N_1) \underset{\substack{\uparrow \\ N \to \infty}}{\overset{!}{=}} O\,(1)\ !?$$

- **Anzahl an arithmetischen Operationen pro Multigrid–Zyklus auf feinstem Gitter:**

$$
\begin{aligned}
Q(M_l) &= \text{Anzahl der arithmetischen Operationen pro Multigrid–Zyklus auf feinstem Gitter} = \\
&= (\nu\, c_1 + c_2)\, N + \gamma \left\{ (\nu\, c_1 + c_2)\, \frac{N}{\tau} + \gamma \left\{ (\nu\, c_1 + c_2)\, \frac{N}{\tau^2} + \dots \right.\right. \\
&\quad \dots + \gamma \left\{ (\nu\, c_1 + c_2)\, \frac{N}{\tau^{l-2}} + c_3\, \frac{N}{\tau^{l-1}} \right\} \underset{\cdots\cdots}{\overset{(l-2)}{\text{Klammern}}} \Bigg\} = \\
&= (\nu\, c_1 + c_2)\, N \sum_{j=0}^{l-2} \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^j + c_3\, \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{l-1} N = \\
&= \left[(\nu\, c_1 + c_2)\, \frac{1-\beta^{l-1}}{1-\beta} + c_3\, \frac{1}{\gamma}\, \beta^{l-1} \right] N \le \\
&\le \max \left\{ (\nu\, c_1 + c_2), \frac{c_3}{\gamma} \right\} \sum_{j=0}^{l-1} \beta^j \cdot N = c \sum_{j=0}^{l-1} \beta^j\, N_l
\end{aligned}
$$

mit $\beta = \gamma/\tau$, $c := c(\nu, \gamma) := \max\{(\nu\, c_1 + c_2),\ c_3/\gamma\}$.

- **Resultat:**

1. $1 \le \gamma < \tau \curvearrowright \beta = \gamma/\tau < 1$:

$$\Longrightarrow Q(M_l) \le \frac{c}{1-\beta}\, N_l \qquad \boxed{Q(M_l) = O(N_l)}$$

2. $\gamma = \tau \quad \curvearrowright \beta = \gamma/\tau = 1$:

$$Q(M_l) \le c \left[\sum_{j=0}^{l-1} 1 \right] N = c\, l\, N = c\, \frac{\ln N + \ln\left(\frac{\tau}{N_1}\right)}{\ln \tau}\, N$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N_1 \equiv N/\tau^{l-1} \curvearrowright \tau^l = N\,(\tau/N_1) \\ l = \dfrac{\ln N + \ln(\tau/N_1)}{\ln \tau} \end{array}}$$

$$\Longrightarrow Q(M_l) \le c\, \frac{\ln N_l + \ln\left(\frac{\tau}{N_1}\right)}{\ln \tau}\, N_l \qquad \boxed{Q(M_l) = O(\ln N_l \cdot N_l)}$$

3. $\gamma > \tau \quad \curvearrowright \beta = \gamma/\tau > 1$:

$$\Longrightarrow Q(M_l) \le c\, \frac{\beta^l - 1}{\beta - 1}\, N_l \qquad \boxed{Q(M_l) = O\left(N_l^{1+\ln\beta}\right)}$$

da $\beta^l \approx \beta^{\ln N} = N^\alpha \Longrightarrow \ln N\, \ln\beta = \alpha\, \ln N$, d.h. $\alpha = \ln\beta$.

- **Satz 4.3:** $\eta^* \equiv \eta \neq \eta\,(h_l)$

> Vor.: 1) $\|M_l\| \le \eta^* < 1$, mit $\eta^* \neq \eta^*\,(h_l)$; siehe Pkt. 4.3.2.
>
> 2) $1 \le \gamma < \tau$.
>
> Bh.: $Q\,(\varepsilon)$ = Anzahl der arithmetischen Operationen, die notwendig sind, um den Anfangsfehler in der vorgegebenen Norm $\|\cdot\|$ auf das ε–fache zu reduzieren ($\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^{K_*}\| \le \varepsilon\,\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^0\|$)
>
> $$= \underbrace{\frac{\ln \varepsilon^{-1}}{\ln \eta^{-1}}}_{=:\, I\,(\varepsilon) \,=\, \text{Anzahl der Iterationen} \,=\, k_* \,=\, k_l} Q\,(M_l) = O\,(N \ln \varepsilon^{-1})$$
>
> mit der vorgegebenen relativen Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-5} \in (0,1)$, $\eta = \eta^*$.

Beweis: folgt aus der offensichtlichen Relation

$$Q\,(\varepsilon) = I\,(\varepsilon)\,Q\,(M_l)$$

und den obigen Abschätzungen von $Q\,(M_l)$ für $1 \le \gamma < \tau$, sowie der Iterationsfehlerabschätzung

$$\|\,\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k_* = I\,(\varepsilon)}\,\| \;\le\; \underbrace{\eta^{k_*}}_{\le \varepsilon}\,\|\,\underline{u}_l - \underline{u}_l^0\,\|.$$

$$\downarrow$$

$$0 < \eta^{k_*} \le \varepsilon < 1 \iff k_* \ge \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{\ln \eta^{-1}}$$

q.e.d.

- **Folgerung:**

Unter den Voraussetzungen 1) und 2) aus Satz 4.3 ist das Multigrid–Verfahren asymptotisch optimal bezüglich der arithmetischen Operationen und ebenfalls bezüglich des benötigten Speicherplatzes M (siehe Kap. 3), d.h. bei fixierter relativer Genauigkeit ε $(0 < \varepsilon < 1)$ ist der Aufwand proportional zur Anzahl $N \equiv N_l$ der Unbekannten auf dem feinsten Gitter !

Allerdings gilt i. allgem.: $\varepsilon = c\,h_l^p = \underbrace{10^{-1}}_{\text{Sicherheitsfaktor}} *$ Diskretisierungsfehler

$$\Downarrow$$

$$Q\,(\varepsilon) = O\,(h_l^{-d}\underline{\ln h_l^{-1}}) = O\,(N_l \ln N_l)$$

$$\Downarrow$$

Verfahren ist nur asymptotisch fast optimal !

$\Longrightarrow$ Frage: Kann das Verfahren so modifiziert werden, daß $10^{-1}*$ Diskretisierungsfehler mit asymptotisch optimalem, arithmetischen Aufwand erreicht werden kann, d.h.

$$Q\,(\varepsilon = c\,h_l^p) = O\,(N_l) = O\,(h_l^{-d})\ ?$$

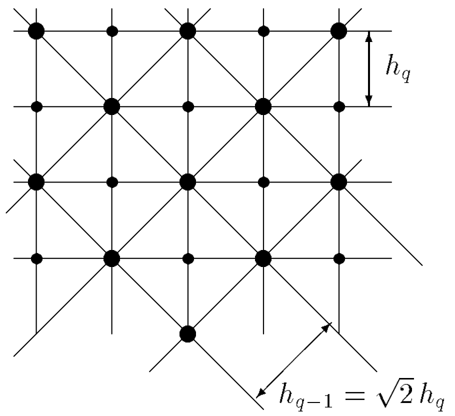
Antwort: ja ! ↳ FMGM (siehe Pkt. 4.4 !).

■ Diskussion von $Q\,(M_l)$ für zwei Standardfälle in 2D:

1. Btr. 2D–Probleme ($d=2$) und Standardgittervergröberung $h_{q-1} = 2\,h_q :\Longrightarrow \underline{\underline{\tau = 4}}$:

$$
Q\,(M_l) \le \begin{cases}
c \sum\limits_{j=0}^{l-1} \left(\frac{1}{4}\right)^j N_l \le c\,(\nu,1)\,\frac{4}{3}\,N_l, & \gamma = 1 \\
c \sum\limits_{j=0}^{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j N_l \le c\,(\nu,2)\,2\,N_l, & \gamma = 2 \\
c \sum\limits_{j=0}^{l-1} \left(\frac{3}{4}\right)^j N_l \le c\,(\nu,3)\,4\,N_l, & \gamma = 3 \\
\hline
c \sum\limits_{j=0}^{l-1} 1 \cdot N_l = c\,l\,N \approx \bar{c} \ln N \cdot N, & \gamma = 4
\end{cases}
$$

2. Btr. 2D–Problem mit $h_{q-1} = \sqrt{2}\,h_q :\Longrightarrow \underline{\underline{\tau = 2}}$:



$$
Q\,(M_l) \le \begin{cases}
c \sum\limits_{j=0}^{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j N_l \le 2cN_l, & \gamma = 1 \\
\hline
c \sum\limits_{j=0}^{l-1} 1 \cdot N_l = \bar{c} \ln N_l \cdot N_l, & \gamma = 2
\end{cases}
$$

■ **Ü 4.2** Man schätze $Q\,(M_l)$ für die Standardgittervergröberung $h_{q-1} = 2\,h_q$ im 3D–Falle ($d=3$) ab !

■ Effektivitätsabschätzungen für den verallgemeinerten V–Zyklus:

- Btr. den Fall des verallgem. V–Zyklus, d.h.
  1. $\gamma_q = \gamma = 1 \quad \forall\, q$
  2. $\nu_l = \nu := \nu_V + \nu_N$
     $\nu_{l-j} = s^j \nu, \quad j = \overline{1, l-2}$ mit $s > 1$ (z.B. $s = 2$).

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
Q(M_l) &= \overset{\substack{\gamma=1\\ \downarrow}}{(\nu c_1 + c_2)}\, N_l + (s\nu c_1 + c_2)\, N_{l-1} + \ldots + (s^{l-2}\nu c_1 + c_2)\, N_2 + c_3\, N_1 \\
&= (\nu c_1 + c_2)\, N + (s\nu c_1 + c_2)\frac{N}{\tau} + \ldots + (s^{l-2}\nu c_1 + c_2)\frac{N}{\tau^{l-2}} + c_3\,\frac{N}{\tau^{l-1}} \\
&= (\nu c_1 + c_2)\, N + \left(\nu c_1 + \frac{c_2}{s}\right)\left(\frac{s}{\tau}\right) N + \ldots + \\
&\qquad + \left(\nu c_1 + \frac{c_2}{s^{l-2}}\right)\left(\frac{s}{\tau}\right)^{l-2} N + \frac{c_3}{s^{l-1}}\,\left(\frac{s}{\tau}\right)^{l-1} N \leq \\
&\leq (\nu c_1 + c_2) \sum_{j=0}^{l-2} \left(\frac{s}{\tau}\right)^{j} \cdot N + \frac{c_3}{s^{l-2}}\left(\frac{s}{\tau}\right)^{l-2} N \leq \\
&\leq \underbrace{\max\left\{(\nu c_1 + c_2), \frac{c_3}{s^{l-2}}\right\}}_{=:\, \bar{c}\,(\nu,s)} \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{s}{\tau}\right)^{j} N
\end{aligned}$$

- <u>Resultat:</u> $$\boxed{\begin{array}{l} Q(M_l) \leq \hat{c}(\nu,s) \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{s}{\tau}\right)^{j} \cdot N_l \\ \text{mit } \hat{c}(\nu,s) < \bar{c}(\nu,s) \leq c\,(\nu,\gamma) \text{ für } \gamma \leq s^{l-1} \end{array}}$$

- <u>Damit gilt für $s = 2$:</u> $$\boxed{Q_{\text{Verallg. } V\text{–Zyklus}}(M_l) \quad < \quad Q_{W\text{–Zyklus}}(M_l)}$$

■ **Ü 4.3** Man schätze $Q\,(M_l)$ für die folgenden Fälle ab:

a) Verallgem. W–Zyklus: $\gamma_q = \gamma \equiv 2\ \ \forall\, q;\ \ \nu_l = \nu := \nu_V + \nu_N,$
$\nu_{l-j} = s^j \nu,\ \ j = \overline{1, l-2}\ \text{ mit }\ s > 1.$
<u>Bsp.:</u> $\gamma = 2,\ \ s = 2,\ \ \tau = 4$!

b) Verallgem. 3er–Zyklus: $\gamma_q = \gamma \equiv 3\ \ \forall\, q$, sonst wie a) !

c) Alternierender Zyklus !

4.4 Konvergenz– und Effektivitätsabschätzungen für die Full–Multigrid–Methode (FMGM)

4.4.1 Vorbemerkungen

- **Sei**

(1) $$\begin{cases} K_q \underline{u}_q = \underline{f}_q \quad \text{in } \mathbb{R}^{N_q} \quad (\text{bzw. } \mathbb{C}(\omega_q)), \\ q = 1, 2, \ldots, l \quad (l = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

eine Folge von (FEM– oder FDM–) Diskretisierungen einer elliptischen RWA in

	Variationsformulierung	oder	klassischer Formulierung
(2)	Ges. $u \in V_g$:		$Lu = f$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
	$a(u, v) = < F, v > \quad \forall\, v \in V_0$		$lu = g$ auf $\Gamma = \partial\,\Omega$

bzw. allgemein eine Folge von diskreten Ersatzaufgaben, die eine Operatorgleichung der Art

(2) Ges. $u \in X \;:\; A\,u \;=\; b \;$ in $\; Y$

auf immer „feineren" Diskretisierungen $(N_1 < N_2 < \ldots < N_{q-1} < N_q < \ldots < N_l)$ approximieren (siehe Kap. 3 und Vorlesung Numerik I).

- **Wiederholung:** FMGM aus Pkt. 3.3:

Den FMG–Algorithmus

```
main    FMGM
  ⋮
v_1 := u_1 ≡ K_1^{-1} f_1;
for     q := 2 step 1 until l do
begin   v_q := I^q_{q-1} v_{q-1}
        for k := 1 step 1 until K_q do
          | MGM (q, v_q, f_q, K_q)                  |
          | v_q := M_q v_q + (I_q − M_q) K_q^{-1} f_q |
end
```

kann man auch kompakt in der Form

(3)
$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{v}_1 &= K_1^{-1}\,\underline{f}_1;\\
q &= \overline{2,l} \qquad (q = 2,3,\ldots,l)\\
\underline{v}_q^0 &= \vec{I}_{q-1}^{\,q}\,\underline{v}_{q-1}\\
\underline{v}_q^k &= M_q\,\underline{v}_q^{k-1} + (I_q - M_q)\,K_q^{-1}\,\underline{f}_q, \quad k = 1,2,\ldots,k_q\\
\underline{v}_q &= \underline{v}_q^{k_q}
\end{aligned}}$$

aufschreiben, wobei

$\vec{I}_{q-1}^{\,q}$: $\mathbb{R}^{N_{q-1}} \mapsto \mathbb{R}^{N_q}$ – Interpolationsoperator für die <u>volle</u> Approximation,
M_q = MG–Iterationsoperator = q–Gitter–Iterationsop. (siehe Pkt. 4.3.1),
k_q = Anzahl der „nested" Iterationen.

■ Wie genau braucht man die Lösung von (1) $\boldsymbol{K_q\,\underline{u}_q = \underline{f}_q}$?

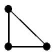
$\boxed{\text{Fehler}}$

1. Diskretisierungsfehler:
   = fixiert mit der Wahl der Diskretisierung !

   exakte Lösung von (1) = Skelettlsg.
   $\downarrow$
   $$\| (\underline{u})_q - \underline{u}_q \| \le c_D(u)\, h_q^p$$
   $\uparrow$
   auf ω_q projizierte exakte Lösung
   der Ausgangsaufgabe (2)
   (u – hinreichend glatt !)

   $\widehat{=}$ Konvergenz der Skelettlösung (= diskrete Konvergenz)

   <u>Analog:</u> Konvergenz der Näherungslösung, insbesondere bei FEM, z.B. für PDgl. 2. Ordnung (MBsp. 1 – 3):

   $$\| u - u_q \|_1 \le \underline{c_{1,p+1}}\; h_q^p\; \underline{|\, u\,|_{p+1}} \qquad = c_D(u)$$
   (z.B. $p = 1$: )

   (siehe Vorlesung „Numerik II")

2. FMGM–Verfahrensfehler:
   $\longrightarrow$ hängt sicherlich von k_q, $\vec{I}_{q-1}^{\,q}$, $\|M_q\|$ ab !
   $$\| \underline{u}_q - \underline{v}_q^{k_q} \| \le \varepsilon_q$$

$\boxed{\text{sinnvoll}}$ ↷ $\varepsilon_q \approx c_D(u)\, h_q^p$, d.h.
Verfahrensfehler $\approx$ Diskretisierungsfehler zumindestens für $q = l$!

$\boxed{\text{Ziel}}$ = FMGM so zu organisieren ($\vec{I}^q_{q-1}$, k_q, $\|M_q\|$), daß

$$\| \underline{u}_l - \underline{v}_l^{k_q} \| \le c_V\, h_l^p \qquad \text{(praktisch: } c_V = c_D/10)$$

mit <u>minimalem</u> Aufwand an arithmetischen Operationen
(z.B. FMGM: $Q^{\text{FMGM}} \approx N_l$! vgl. MGM: $Q^{\text{MGM}} \approx N_l \ln N_l$).

Dann gilt:

$$\| (\underline{u})_l - \underline{v}_l^{K_l} \| \le \underbrace{(c_D\,(u) + c_V)}_{\substack{\approx 1.1 \cdot c_D(u),\\ \text{falls } c_V = C_D/10\ (\uparrow).}} h_l^p .$$

4.4.2 Voraussetzungen

(V 1) $\| M_q \| \le \eta^* < 1$ (siehe Pkt. 4.3);

exakte Lsg. von (1) für $q-1$ und q

(V 2) $\| \vec{I}^q_{q-1}\, \underline{u}_{q-1} - \underline{u}_q \| \le c_1\,(u)\, h_q^p;$

$\boxed{-(\underline{u})_q + (\underline{u})_q}$ Bem. 1) — auf ω_q proj. exakte Lsg. von (2)

<u>Bemerkungen:</u> 1) exakte Lsg. u von (2) sei hinreichend glatt !
2) Diskretisierungsfehler: $\| (\underline{u})_q - \underline{u}_q \| \le c_D\,(u)\, h_q^p$.

(V 3) $$\| \vec{I}^q_{q-1} \| := \sup_{\underline{v}_{q-1}} \frac{\|\vec{I}^q_{q-1}\, \underline{v}_{q-1}\|}{\|\underline{v}_{q-1}\|} \le c_I = \text{const.};$$

(V 4) $h_{q-1}/h_q \le \alpha = \text{const.};$

$q = 2, 3, \ldots, l;\ \forall\, l \ge 2 \qquad (\forall\, q = 2, 3, \ldots).$

Es ist implizit vorausgesetzt, daß die Konstanten

η^*, $c_1\,(u)$, c_I und α

positiv sind und nicht vom Diskretisierungsparameter h_q ($\forall\ q = 2, 3, \ldots$), d.h. Gitterlevel abhängen !

4.4.3 Fehlerabschätzung

■ **Satz 4.4:**

Vor.: 1) (V 1) – (V 4),

2) $k_q = i \;\forall\, q = \overline{2,l}$, mit $i : c_2\, \eta^i < 1$,
wobei $\eta = \eta^*$ und $c_2 = c_I\, \alpha^p$, d.h. $i > \ln c_2 / \ln \eta^{-1}$.

Bh.: Falls auf jedem „nested“ Level der FMGM (3) i MG–Iterationen durchgeführt werden (d.h. $k_q = i \;\forall\, q$), dann gilt für $\underline{v}_q^i$ die Abschätzung

(4) $$\|\, \underline{u}_q - \underline{v}_q^i \,\| \le c_3\,(\eta)\; c_1\,(u)\; h_q^p,$$

mit $c_3\,(\eta) = \eta^i / (1 - c_2\, \eta^i)$, wobei $\underline{u}_q$ die exakte Lösung von (1) und $\underline{v}_q^i$ die FMGM–Näherung (siehe (3)) ist, und $q = \overline{1,l}$.

Beweis: (induktiv)

1. $q = 1$: $\underline{v}_1^i = \underline{v}_1 := \underline{u}_1 \curvearrowright$ (4) ist trivial erfüllt: $\|\, \underline{u}_1 - \underline{v}_1^i \,\| = 0$.

   Bemerkung: Hinreichend ist, $K_1\, \underline{u}_1 = \underline{f}_1$ näherungsweise zu lösen, und zwar so, daß die Näherungslösung $\underline{v}_1^i$ der Abschätzung (4) für $q = 1$ genügt !

2. Sei (4) für $q - 1$ richtig.
   Zeigen dann, daß (4) auch für q gilt !
   Tatsächlich, unter Benutzung der Voraussetzungen (V 1) – (V 4) und der Induktionsvoraussetzung (IV), d.h., daß (4) für $q - 1$ richtig ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\|\, \underline{u}_q - \underline{v}_q^i \,\| \;&\overset{\substack{(V\,1)\\ \downarrow}}{\le}\; \eta^i\, \|\, \underline{u}_q - \underline{v}_q^0 \,\| = \eta^i\, \|\, \underline{u}_q - \vec{I}_{q-1}^{\,q}\, \underline{v}_{q-1}^i \,\| = \\
&= \eta^i\, \|\, \underline{u}_q - \vec{I}_{q-1}^{\,q}\, \underline{u}_{q-1} + \vec{I}_{q-1}^{\,q}\, \underline{u}_{q-1} - \vec{I}_{q-1}^{\,q}\, \underline{v}_{q-1}^i \,\| \le \\
&\le \eta^i \left\{ \underset{(V\,2)}{\|\, \underline{u}_q - \vec{I}_{q-1}^{\,q}\, \underline{u}_{q-1} \,\|} + \underset{(V\,3)}{\|\, \vec{I}_{q-1}^{\,q} \,\|}\; \underset{(IV)(4) \text{ für } q-1}{\|\, \underline{u}_{q-1} - \underline{v}_{q-1}^i \,\|} \right\} \le \\
&\le \eta^i \left\{ c_1\,(u)\, h_q^p + c_I\, c_3\,(\eta)\, c_1\,(u)\, h_{q-1}^p \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \eta^i \left(1 + c_I\, c_3(\eta) \underset{\text{(V 4)}}{\left(\frac{h_{q-1}}{h_q}\right)^p}\right) c_1(u)\, h_q^p \leq$$

$$\leq \underbrace{\eta^i \left(1 + c_I\, c_3(\eta)\, \alpha^p\right)}_{=\, c_3(\eta)} c_1(u)\, h_q^p$$

$$\nearrow$$

<u>NR:</u> $$\eta^i \,(1 + c_3(\eta) \underbrace{c_I\, \alpha^p}_{=\, c_2}) = \eta^i \left(1 + \frac{\eta^i}{1 - c_2\, \eta^i}\, c_2\right) =$$

$$= \eta^i\, \frac{1 - c_2\, \eta^i + c_2\, \eta^i}{1 - c_2\, \eta^i} = \frac{\eta^i}{1 - c_2\, \eta^i} = c_3(\eta)$$

q.e.d.

- **<u>Bemerkung:</u>**

  Das Resultat von Satz 4.4 ist <u>nicht</u> an die FMGM gebunden, sondern es gilt für <u>jede</u> „nested" Iteration, vorausgesetzt, die Bedingungen (V 1) – (V 4) sind erfüllt.

4.4.4 Anzahl der notwendigen arithmetischen Operationen: Verfahrensfehler ≈ Diskretisierungsfehler

- **<u>Rechenaufwand FMGM (3):</u>** $k_q = i \;\forall\, q = \overline{2,l} : c_2\, \eta^i < 1$ (Satz 4.4)

  1) Grobgittersystem $K_1\, \underline{u}_1 = \underline{f}_1$ lösen : $W_1 = \alpha_1\, N_1$,
  2) Interpolation $\vec{I}^{\,q}_{q-1}$: $W_q^{\text{Int}} = \alpha_2\, N_q$,
  3) MG–Zyklus MGM $(q,\, \underline{v}_q,\, \underline{f}_q,\, K_q)$: $W_q^{\text{MG}} = \alpha_3\, N_q$ (Pkt. 4.3.3),

  wobei $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 = \text{const.} \neq c(q)$ – universelle, positive Konstanten.

- **Gesamtaufwand für FMGM (3):** $\| \underline{u}_l - \underline{v}_l^{k_l=i} \| \leq c_3(\eta)\, c_1(u)\, h_l^p$

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathrm{FMGM}} &= \alpha_1 N_1 + \sum_{q=2}^{l} (W_q^{\mathrm{Int}} + i\, W_q^{\mathrm{MG}}) = \\
&= \alpha_1 N_1 + \sum_{q=2}^{l} (\alpha_2 + i\,\alpha_3)\, N_q \leq \\
&\qquad\qquad \overset{N_{q-1} \leq \frac{1}{\tau} N_q \ (\text{Pkt. } 4.3.3)}{\downarrow} \\
&\leq \max\{\alpha_1, \alpha_2 + i\,\alpha_3\} \sum_{q=1}^{l} N_q \leq \\
&\qquad\qquad \overset{\tau=\alpha^m,\ \frac{1}{\tau}<1}{\downarrow} \\
&\leq \max\{\alpha_1, \alpha_2 + i\,\alpha_3\} \sum_{q=1}^{l} \left(\frac{1}{\tau}\right)^{l-q} N_l \leq \\
&\leq \max\{\alpha_1, \alpha_2 + i\,\alpha_3\} \frac{\tau}{\tau - 1} N_l = \alpha_4\, N_l = O(N_l).
\end{aligned}
$$

mit $\alpha_4 = \max\{\alpha_1, \alpha_2 + i\,\alpha_3\} \dfrac{\tau}{\tau-1}$ und $i = \ln c_2 / \ln \eta^{-1}$.

- **Resultat:** Der Aufwand an arithmetischen Operationen zur Berechnung einer FMGM–Näherung $\underline{v}_l^i$, die sich von der exakten Lösung in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers unterscheidet (das ist die einzig sinnvolle Forderung !), ist für die FMGM direkt proportional zur Anzahl der Unbekannten auf dem feinsten Gitter:

  $\Longrightarrow$ FMGM = asymptotisch optimales Lösungsverfahren !

4.4.5 Diskussion der Resultate an einem Beispiel

- **Btr. allgemeines, symmetrisches, elliptisches Variationsproblem für PDgl. 2. Ordnung mit homogenisierten Dirichletschen Randbedingungen:**

$\boxed{\text{MBsp. 7}}$ (siehe auch [32] NUMERIK I, Pkt. 4.3):

(5) Ges. $u \in V_0 : a(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in V_0,$

wobei $V_0 \subset V = W_2^1(\Omega)$; $\Omega \subset I\!R^2$ – beschränktes und polygonal berandetes Gebiet.

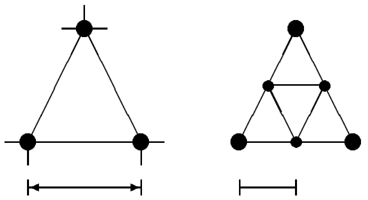
Wir setzen nun voraus:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\text{(i)} & a\,(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \longrightarrow I\!R^1 - \text{Bilinearform:} \\
& \text{a) } V_0 - \text{elliptisch: } a\,(v,v) \geq \mu_1\,\|v\|_1^2 \quad \forall\, v \in V_0, \\
& \text{b) } V_0 - \text{beschränkt: } |a\,(u,v)| \leq \mu_2\,\|u\|_1\,\|v\|_1 \quad \forall\, u,v \in V_0, \\
& \text{c) } V_0 - \text{symmetrisch: } a\,(u,v) = a\,(v,u) \quad \forall\, u,v \in V_0. \\[1ex]
\text{(ii)} & F \in V_0^* \cap L_2\,(\Omega) \\
& (\Lsh \text{ wegen (iii) folgt daraus: } u \in V_0 \cap W_2^2\,(\Omega)\ !). \\[1ex]
\text{(iii)} & H^2 \equiv W_2^2 - \text{Regularität:} \\
& \left.\begin{array}{l} w \in V_0 : a\,(w,v) = <\Phi, v> \quad \forall\, v \in V \\ \Phi \in V_0^* \cap L_2\,(\Omega) \equiv L_2\,(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} w \in V_0 \cap W_2^2\,(\Omega), \\ \|w\|_2 \leq c_k\,\|\Phi\|_0. \end{array}
\end{cases}
$$

Die Voraussetzungen (i) – (ii) garantieren $\exists\,!\ u \in V_0$: (5) gemäß Lax–Milgram–Lemma (siehe [32], NUMERIK I, Kap. 4) und wegen (iii) gilt sogar $u \in V_0 \cap W_2^2\,(\Omega)$.

- **Diskretisieren (5) mit FEM–Galerkin–Verfahren auf einer Folge von gleichmäßig verfeinerten Dreiecksgittern mit linearen Elementen** (siehe [32] NUMERIK I, Pkt. 4.3):

gröbstes Gitter												feinstes Gitter
1		2		...	$q-1$		q ...		...	$l-1$		l



$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
h_1 & > & h_2 & > \ldots > & h_{q-1} & > & h_q = \frac{h_{q-1}}{2} & > \ldots > & h_{l-1} & > & h_l \\[1ex]
V_1 & \subset & V_2 & \subset \ldots \subset & V_{q-1} & \subset & V_q & \subset \ldots \subset & V_{l-1} & \subset & V_l \\
\simeq & & \simeq & & \simeq & & \simeq & & \simeq & & \simeq \\
I\!R^{N_1} & & I\!R^{N_2} & & I\!R^{N_{q-1}} & & I\!R^{N_q} & & I\!R^{N_{l-1}} & & I\!R^{N_l} \\[1ex]
K_1 & & K_2 & & K_{q-1} & & K_q & & K_{l-1} & & K_l
\end{array}
$$

- **Für die FMGM und die darin benutzte Multigrid–Procedure MGM (...) werden folgende Grundkomponenten verwendet**

$$(7) \quad \begin{cases} \nu_V = \nu_V\,(q) = \nu, \;\; \nu_N = \nu_N\,(q) = 0 \;\; \text{bzw.} \; = \nu; \\ S_q = (I_q - \omega_q\, K_q) - \text{Glättungsiterationsoperator (einf. Iteration);} \\ \vec{I}^{\,q}_{q-1} = I^q_{q-1} - \text{lineare Interpolation über Dreiecke;} \\ I^{q-1}_q = \left(I^q_{q-1}\right)^T; \\ \tau_q = 1, \;\; \gamma_q \equiv \gamma\,(q) = \gamma = 1 \;\; \text{bzw.} \; = 2; \\ q = 2, 3, \ldots, l. \end{cases}$$

- **Überprüfen nun die Vor. (V 1) – (V 4) aus Pkt. 4.4.3 (→ Vor. von Satz 4.4) bezüglich der Energienorm:**

$$(8) \qquad \|\, \underline{v}_q \,\| := (K_q\, \underline{v}_q, \underline{v}_q)^{0.5} \equiv (a\,(v_q, v_q))^{0.5} \equiv |||\, v_q \,|||$$

für $\underline{v}_q \in I\!\!R^{N_q}$, $\underline{v}_q \leftrightarrow v_q \in V_q$. Für die Energienorm gilt nun:

$$\text{(V 1)} \qquad \boxed{\|\, M_q \,\| := \sup_{\substack{\underline{v}_q \in I\!\!R^{N_q} \\ \underline{v}_q \neq \boldsymbol{O}}} \frac{\|M_q\, \underline{v}_q\|}{\|\underline{v}_q\|} \leq \eta^* < 1.}$$

$\Longleftarrow$ wird im Teil II der Vorlesung (SS 96) gezeigt (einschließlich: V–Zyklus mit 1 Glättungsschritt, d.h. $\gamma = 1$, $\nu_V = 1$, $\nu_N = 0$!) #

$$\text{(V 2)} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \|\, \vec{I}^{\,q}_{q-1}\, \underline{u}_{q-1} - \underline{u}_q \,\| \leq c_1\,(u)\, h_q^p, \text{ mit } p = 1, \\ \text{wobei} \quad u_q \in V_q : a\,(u_q, v_q) = < F, v_q > \quad \forall\, v_q \in V_q \\ \qquad\qquad \updownarrow \\ \qquad\qquad \underline{u}_q \in I\!\!R^{N_q} : K_q\, \underline{u}_q = \underline{f}_q \end{array}}$$

Dazu benötigen wir die FE–Diskretisierungsfehlerabschätzung in der W_2^1–Norm (siehe [33] NUMERIK II, SS 96):

$$(9) \qquad \|\, u - u_q \,\|_1 \leq \frac{\mu_2}{\mu_1}\, a_{12}\, |u|_2\, h_q,$$

mit der positiven Konstante a_{12} aus dem Approximationssatz [33] und der exakten Lösung u von (5), die wegen $(6)_{\text{(iii)}}$ aus $V_0 \cap qW_2^2\,(\Omega)$ ist.

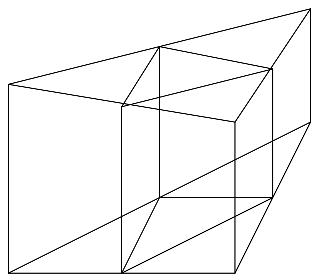
Tatsächlich, unter Benutzung der Dreiecksungleichung und der Fehlerabschätzung (6) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\| \underbrace{\vec{I}^{\,q}_{q-1}\, \underline{u}_{q-1}}_{\updownarrow \atop u_{q-1}} - \underbrace{\underline{u}_q}_{\updownarrow \atop u_q} \| &= \overbrace{(a\,(u_{q-1}-u_q,\; u_{q-1}-u_q))^{1/2}}^{|||\, u_{q-1}-u_q \,|||} \le \\
&\le \sqrt{\mu_2}\; \|\, u_{q-1}-u_q \,\|_1 \le \\
&\le \sqrt{\mu_2}\; (\|\, u_{q-1}-u \,\|_1 + \|\, u-u_q \,\|_1) \le \\
&\overset{(9)}{\le} \sqrt{\mu_2}\; \frac{\mu_2}{\mu_1}\, a_{12}\,(h_{q-1}+h_q)\,|u|_2 = \\
&= \underbrace{3\,\sqrt{\mu_2}\; \frac{\mu_2}{\mu_1}\, a_{12}\,|u|_2}_{=:\,c_1\,(u)}\, h_q. \ \#
\end{aligned}$$

(V 3)

$$\boxed{\|\, \vec{I}^{\,q}_{q-1} \,\| := \sup_{\underline{v}_{q-1}} \frac{\|\, \vec{I}^{\,q}_{q-1}\, \underline{v}_{q-1} \,\|}{\|\, \underline{v}_{q-1} \,\|} = \sup_{\underline{v}_{q-1} \leftrightarrow v_{q-1}} \frac{|||\, v_{q-1} \,|||}{|||\, v_{q-1} \,|||} = 1 = c_I,}$$

da $u_{q-1} \longleftrightarrow \vec{I}^{\,q}_{q-1}\, \underline{u}_{q-1}$



#

(V 4)

$$\boxed{h_{q-1}/h_q \;\le\; \alpha \;=\; 2}$$

Bei gleichmäßigem Netz ist (V 4) offensichtlich. Im Falle eines regulären Netzes [33] kann (V 4) aber auch mit $\alpha = 2$ angenommen werden, wenn die h_q als entsprechende Diskretisierungsparameter definiert werden bei gleichmäßiger Verfeinerung. #

■ **Aus Satz 4.4 erhalten wir nun:**

> Falls auf jedem „nested“ Level der FMGM (3)
>
> $$i \;:\; c_2\,\eta^i < 1, \;\; c_2 = c_I\,\alpha^p = 1 \cdot 2^1 = 2, \;\; \eta = \eta^*,$$
>
> MG–Iterationen durchgeführt werden (d.h. $k_q = i \;\; \forall\, q$), dann gelten für $\underline{v}_q^i \longleftrightarrow v_q^i$ die Abschätzungen:
>
> 1) $\|\,\underline{u}_q - \underline{v}_q^i\,\| \leq \dfrac{\eta^i}{1 - 2\,\eta^i}\, c_1\,(u)\, h_q,$
>
> 2) $\|\,u - v_q^i\,\|_1 \leq \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\, a_{12}\,|u|_2 \left(1 + 3\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}\;\dfrac{\eta^i}{1 - 2\,\eta^i}\right) h_q,$
>
> mit $c_1\,(u) = 3\,\sqrt{\mu_2}\;\;(\mu_2/\mu_1)\, a_{12}\,|u|_2.$

Abschätzung 1) folgt direkt aus Satz 4.4.
Unter Benutzung der Dreiecksungleichung und (9) folgt 2):

$$\begin{aligned}
\|\,u - v_q^i\,\|_1 &\leq \|\,u - u_q\,\|_1 + \|\,u_q - v_q\,\|_1 \overset{(9),\,1)}{\leq} \\
&\leq \frac{\mu_2}{\mu_1}\, a_{12}\,|u|_2\, h_q + \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\;\frac{\eta^i}{1 - 2\,\eta^i}\; 3\,\sqrt{\mu_2}\;\frac{\mu_2}{\mu_1}\, a_{12}\,|u|_2\, h_q.
\end{aligned}$$

■ **Beispiel:** $\mu_2/\mu_1 = 1 \quad (-\Delta u + u = f)$
$\eta^i \leq \frac{1}{29} \quad (i = 1 : \eta \leq 0.034; \;\; i = 2 : \eta \leq 0.186)$

$$\Longrightarrow \left(1 + 3\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\;\frac{\eta^i}{1 - 2\,\eta^i}\right) = 1 + \frac{3/29}{1 - 2/29} = 1 + \frac{3}{27} \approx 1.1.$$

$$\Longrightarrow \|\,u - v_q^i\,\|_1 \leq 1.1\; \underbrace{\frac{\mu_2}{\mu_1}\, a_{12}\,|u|_2\, h_q}_{\text{Diskretisierungsfehler}} \;,$$

d.h. für $\eta \leq 0.034$ bzw. $\eta \leq 0.186$ langen 1 bzw. 2 „Nested“ MG–Iterationen !!

Kapitel 5

Spezielle Konvergenztheorien für symmetrische Variationsprobleme

5.1 Symmetrische Variationsprobleme für elliptische PDgl. zweiter Ordnung

■ **Btr. wieder das allgemeine, symmetrische, elliptische Variationsproblem für PDgl. zweiter Ordnung** mit homogenisierten Dirichletschen Randbedingungen aus Pkt. 4.4.5 $\boxed{\text{MBsp. 7}}$ (siehe auch [32], [33]):

(5.1) Ges. $u \in V_0 : a\,(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in V_0,$

wobei $V_0 \subset V = W_2^1\,(\Omega)$ (bzw. $V = [W_2^1\,(\Omega)]^p$ für Systeme PDgl. zweiter Ordnung), $\Omega \subset I\!R^2$ – beschränktes und polygonal berandetes Gebiet.

Wir setzen nun wieder voraus:

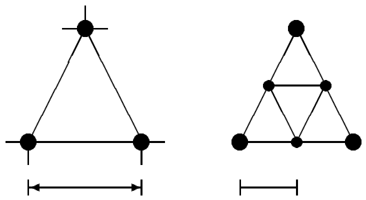
$$
(5.2)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & a\,(\cdot,\cdot) : V_0 \times V_0 \longmapsto I\!R^1 - \text{Bilinearform:} \\
& \text{a)}\ \ V_0 - \text{elliptisch: } a\,(v,v) \geq \mu_1\,\|v\|_1^2 \quad \forall\, v \in V_0, \\
& \text{b)}\ \ V_0 - \text{beschränkt: } |a\,(u,v)| \leq \mu_2\,\|u\|_1\,\|v\|_1 \quad \forall\, u,v \in V_0, \\
& \text{c)}\ \ V_0 - \text{symmetrisch: } a\,(u,v) = a\,(v,u) \quad \forall\, u,v \in V_0. \\
\text{(ii)} & F \in V_0^* \cap L_2\,(\Omega) \equiv L_2\,(\Omega) \\
& (\curvearrowright \text{ wegen (iii) folgt daraus: } u \in V_0 \cap W_2^2\,(\Omega)\ !). \\
\text{(iii)} & H^2 \equiv W_2^2 - \text{Koerzitivität (– Regularität):} \\
& \left.\begin{array}{l} w \in V_0 : a\,(w,v) = < \Phi, v > \quad \forall\, v \in V_0 \\ \Phi \in V_0^* \cap L_2\,(\Omega) \equiv L_2\,(\Omega) \end{array}\right\} \begin{array}{l} w \in V_0 \cap W_2^2\,(\Omega) : \\ \|w\|_2 \leq c_k\,\|\Phi\|_0. \end{array}
\end{array}
\right.
$$

Die Vor. (i) – (ii) garantieren $\exists\,!\ u \in V_0$: (5.1) gemäß Lax–Milgram–Satz I.2.9 [32], und wegen (iii) gilt sogar $u \in V_0 \cap W_2^2\,(\Omega)$.

- Diskretisieren (5.1) mit **FEM–Galerkin–Verfahren** auf einer Folge von gleichmäßig verfeinerten (regulären) Dreiecksgittern mit linearen Elementen (siehe [33] Kap. 4):

Hilfsgitter

gröbstes Gitter							feinstes Gitter
1	2	...	$q-1$	q ...	...	$l-1$	l



$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
h_1 & > & h_2 & > \ldots > & h_{q-1} & > & h_q = \frac{h_{q-1}}{2} & > \ldots > & h_{l-1} & > & h_l & & \\
V_1 & \subset & V_2 & \subset \ldots \subset & V_{q-1} & \subset & V_q \equiv V_{hq} & \subset \ldots \subset & V_{l-1} & \subset & V_l & \subset & V_0 \\
\simeq & & \simeq & & \simeq & & \simeq & & \simeq & & \simeq & & \\
I\!R^{N_1} & & I\!R^{N_2} & & I\!R^{N_{q-1}} & & I\!R^{N_q} & & I\!R^{N_{l-1}} & & I\!R^{N_l} & & \\
K_1 & & K_2 & & K_{q-1} & & K_q \equiv K_{hq} & & K_{l-1} & & K_l & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(5.1)_q & u_q \in V_q & : \; a\,(u_q, v_q) = < F, v_q > \quad \forall\, v_q \in V_q, \\
 & \updownarrow & \\
(\underline{5.1})_q & \underline{u}_q \in I\!R^{N_q} & : \; K_q\, \underline{u}_q = \underline{f}_q \text{ in } I\!R^{N_q}.
\end{array}
$$

- Im Kapitel II.4 der Vorlesung Numerik II [33] wurden folgende **Eigenschaften** bewiesen ($q \in \{1, 2, \ldots, l\}$):

  1. K_q spd, d.h. $K_q = K_q^T > 0$ (siehe [33] Pkt. II.4.3).

  2. EWP: $\underset{q=\overline{1,l}}{K_q \underbrace{\underline{\varphi}_q^{(i)}}_{\text{EV}} = \underbrace{\lambda_q^{(i)}}_{\text{EW}} \underbrace{\underline{\varphi}_q^{(i)}}_{\text{EV}}}$:
  $$\begin{array}{l} \underline{c}_E\, h_q^d \le \lambda_q^{(i)} \le \bar{c}_E\, h_q^{d-2}, \quad i = \overline{1, N_q}, \\ (d = 2 : \Omega \subset I\!R^2 \;!) \\ (\underline{\varphi}_q^{(i)}, \underline{\varphi}_q^{(j)}) = \delta_{ij}, \quad \forall\, i, j = \overline{1, N_q}, \\ \{\underline{\varphi}_q^{(i)}\}_{i=\overline{1,N_q}} \text{ ist vONS.} \end{array}$$
  (siehe [33], Pkt. II.4.3, Satz II.4.4).

  3. Approximationssatz II.4.5 [33]:
  $$\inf_{v_q \in V_q} \|v - v_q\|_s \le \bar{a}_{s,2}\, h_q^{2-s}\, |v|_2 \text{ für } v \in W_2^2(\Omega),\; s = 0, 1.$$

4. W_2^1–Konvergenzsatz II.4.7 [33]:

$$\underset{(5.1)\ (5.1)_q}{\|u-u_q\|_1 \le} \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf_{v_q\in V_q} \|u-v_q\|_1 \le \underbrace{\frac{\mu_2}{\mu_1}\,\bar a_{1,2}}_{=:\,c_{1,2}} h_q\,|u|_2.$$

5. L_2–Konvergenzsatz II.4.9 [33] (Nitsche–Trick):

$$\|u-u_q\|_0 \le \underbrace{\frac{\mu_2^2}{\mu_1}\,\bar a_{1,2}\,c_k}_{=:\,c_{0,2}} h_q^2\,|u|_2.$$

■ **Führen folgende „diskrete“ Sobolev–Normskala ein:**

(5.3) $$|||\underline{v}_q|||_s := (K_q^s\,\underline{v}_q,\underline{v}_q)^{0.5} \quad \forall\,\underline{v}_q \in I\!R^{N_q},\ \ s\in I\!R^1,\ \ q\in\{1,2,\dots,l\}.$$

<u>Dann gilt:</u>

1. $|||\underline{v}_q|||_0 = \|\underline{v}_q\| := (\underline{v}_q^T\,\underline{v}_q)^{0.5}$ – Euklidische Norm:

$$\underline{c}_0\,h_q^d\,\underset{\substack{\|\\ \|\underline{v}_q\|^2}}{|||\underline{v}_q|||_0^2} \le \|v_q\|^2_{\substack{0\\ L_2(\Omega)}} \le \bar c_0\,\underbrace{h_q^d}_{dx}\,|||\underline{v}_q|||_0^2 \quad \forall\,\underline{v}_q \longleftrightarrow v_q\in V_q.$$

<u>Beweis:</u> mms (siehe auch Ü II.4.7 aus [33]). #

2. $|||\underline{v}_q|||_1 = \|\underline{v}_q\|_{K_q} := (K_q\,\underline{v}_q,\underline{v}_q)^{0.5}$ – energetische Norm:

$$\mu_1\,\|v_q\|_1^2 \le |||\underline{v}_q|||_1^2 = (K_q\,\underline{v}_q,\underline{v}_q) = a\,(v_q,v_q) \le \mu_2\,\|v_q\|_1^2 \quad \forall\,\underline{v}_q \longleftrightarrow v_q\in V_q,\ \ \underline{v}_q\in I\!R^{N_q}.$$

3. $$|||\underline{v}_q|||_s := \left(\sum_{i=1}^{N_q}\left(\lambda_q^{(i)}\right)^s\left|\alpha_q^{(i)}\right|^2\right)^{1/2} = \|K_q^{s/2}\,\underline{v}_q\|$$

mit $\alpha_q^{(i)} = (\underline{v}_q,\underline{\varphi}_q^{(i)})$ – Fourierkoeffizienten,

$$K_q\,\underline{\varphi}_q^{(i)} = \lambda_q^{(i)}\,\underline{\varphi}_q^{(i)},\quad (\underline{\varphi}_q^{(i)},\underline{\varphi}_q^{(j)}) = \delta_{ij} \quad (\uparrow).$$

<u>Beweis:</u> $\underline{v}_q = \sum_{i=1}^{N_q}\alpha_q^{(i)}\,\underline{\varphi}_q^{(i)}$ in $(K^s\,\underline{v}_q,\underline{v}_q)^{1/2}$ einsetzen. #

4. Logarithmische Konvexität (Abb. $s\mapsto \log|||\underline{u}_q|||_s$ ist für fix. $\underline{u}_q \ne \boldsymbol{O}$ konvex):
$\forall\,r,t\in I\!R^1$ und $s=\frac{1}{2}(r+t)$ gilt:
(a) $|||\underline{v}_q|||_s \le |||\underline{v}_q|||_r^{1/2}\,|||\underline{v}_q|||_t^{1/2} \quad \forall\,\underline{v}_q\in I\!R^{N_q}$,
(b) $|(K_q^s\,\underline{u}_q,\underline{v}_q)| \le |||\underline{u}_q|||_r\,|||\underline{v}_q|||_t \quad \forall\,\underline{u}_q,\underline{v}_q\in I\!R^{N_q}$.

<u>Beweis:</u>
$$\begin{aligned}|(K_q^s\,\underline{u}_q,\underline{v}_q)| &= |(K_q^{r/2}\,\underline{u}_q,K_q^{t/2}\,\underline{v}_q)| \le \|K_q^{r/2}\,\underline{u}_q\|\,\|K_q^{t/2}\,\underline{v}_q\| \le \\ &\le |||\underline{u}_q|||_r\,|||\underline{v}_q|||_t.\quad \#\end{aligned}$$

5. Monotonie:

   $\alpha^{-s/2}\, |||\underline{u}_q|||_s \le \alpha^{-t/2}\, |||\underline{u}_q|||_t \quad \forall\, \underline{u}_q \in I\!R^{N_q},\ \ s \le t,$

   wobei $0 < \alpha \le \lambda_1 := \lambda_q^{(1)} = \lambda_{\min}\,(K_q)$ fixierte positive Konstante.

   Beweis: 1) Sei $\alpha = 1$. Dann folgt Ungleichung 5. aus Eigenschaft 3., wegen $\lambda_i := \lambda_q^{(i)} \ge \alpha = 1$.

   2) Im Falle $\alpha \ne 1$ betr. Hilfsoperator $\bar{K}_q := \alpha^{-1}\, K_q$:
   $\curvearrowright\ \bar{K}_q\, \underline{\varphi}_q^{(i)} = \underbrace{(\lambda_i/\alpha)}_{=:\,\mu_i}\, \underline{\varphi}_q^{(i)} \equiv \mu_i\, \underline{\varphi}_q^{(i)} \ \ \curvearrowright\ \ \mu_i \ge 1$

   $\curvearrowright$ 1) mit $\bar{\alpha} = 1$ und $\bar{K}_q$ #

6. Shift–Theorem:

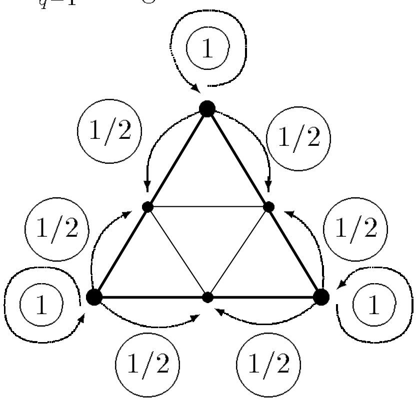
   $K_q\, \underline{u}_q = \underline{f}_q \Longrightarrow |||\underline{u}_q|||_{s+2} = |||\underline{f}|||_s.$

   Beweis: $(K_q^{s+2}\, \underline{u}_q, \underline{u}_q) = (K_q^s\, K_q\, \underline{u}_q, K_q\, \underline{u}_q) = (K_q^s\, \underline{f}_q, \underline{f}_q) = |||\underline{f}_q|||_s^2.$ #

■ In den folgenden Punkten werden **Konvergenzfaktorabschätzungen für standarde Zweigittermethoden** (Pkt. 5.2) und für die entsprechenden Multigrid–Methoden (Pkt. 5.3) hergeleitet. Die Verfahren werden dabei durch die folgenden **Grundkomponenten** eindeutig bestimmt:

(5.4)

- $\nu_V = \nu_V\,(q) = \nu,\ \ \nu_N = \nu_N\,(q) = 0$ bzw. $= \nu$;
- $S_q = (I_q - \omega_q\, K_q)$ – Glättungsiterationsoperator (einfache Iteration);
- I_{q-1}^q – zugeordneter linearer FE–Interpolationsoperator:



zugeordnete FE–Fkt.

$$\boxed{(I_{q-1}^q \widetilde{\underline{v}_{q-1}})\,(x) = v_{q-1}\,(x)}$$

- $I_q^{q-1} = (I_{q-1}^q)^T$;
- $\tau_q = 1,\ \gamma_q = \gamma(q) = \gamma = 1$ bzw. $2\ \ldots$;
- $q = 2, 3, \ldots, l$.

5.2 Konvergenzanalysis des Zweigitterverfahrens (Produktaufspaltungstechnik)

- **Das Zweigitterverfahren mit den Grundkomponenten (5.4) zur Lösung von Gleichungssystemen der Art**

(5.5) $$K_q \underline{u}_q = \underline{f}_q$$

wird eindeutig durch den Iterationsoperator

(5.6) $$M_h^H \equiv M_q^{q-1} \equiv (I_h - I_H^h K_H^{-1} I_h^H K_h) S_h^\nu = C_h^H S_h^\nu$$

definiert (siehe Kap. 4, Pkt. 4.2.1), wobei $h = h_q$ und $H = h_{q-1}$. Schätzen nun die **Spektralnorm** $\|M_h^H\|$ von M_h^H mit Hilfe der Produktaufspaltungstechnik von W. Hackbusch ab (siehe Pkt. 4.2.2.2: Methode II), d.h. die Konvergenz des Zweigitterverfahrens wird in der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$ (bzw. in der diskreten L_2–Norm $\|\cdot\|_h := h^{+d/2}\,\|\cdot\|$) analysiert:

(5.7) $$\|M_h^H\| \le \underbrace{\|C_h^H K_h^{-1}\|}_{\textbf{a)}} \cdot \underbrace{\|K_h S_h^\nu\|}_{\textbf{b)}} \overset{!}{\le} \sigma^* < 1\ !$$

a) Approximationseigenschaft (Lemma 5.1):

(5.8) $$\|C_h^H K_h^{-1}\| \equiv \|K_h^{-1} - I_H^h K_H^{-1} I_h^H\| \overset{!}{\le} c_A \|K_h\|^{-1} \le \bar{c}_A\, h^{2-d}\ !$$

b) Glättungseigenschaft (Lemma 5.2):

(5.9) $$\|K_h S_h^\nu\| \le \bar{\eta}(\nu)\, \|K_h\| \overset{!}{\le} \bar{\eta}(\nu)\, \bar{c}_E\, h^{d-2} =: \eta(\nu)\, h^{d-2},$$

mit h–unabhängiger Fkt. $\bar{\eta}(\nu) \to 0$ für $\nu \to \infty$!

- **Lemma 5.1:** (Approximation Property)

Vor.: Es seien die Voraussetzungen aus Pkt. 5.1 erfüllt, d.h. (5.2), reguläre Triangulation, ($\mathcal{F}(\Delta) \overset{\supseteq}{=} \mathcal{P}_1$) und (5.4).

Bh.: Dann gilt die Approximationseigenschaft:

(8) $$\underbrace{\|C_h^H K_h^{-1}\|}_{\text{Spektralnorm}} := \sup_{\substack{\underline{g}_h \in \mathbb{R}^{N_h} \\ \underline{g}_h \ne O}} \frac{\|C_h^H K_h^{-1} \underline{g}_h\|}{\|\underline{g}_h\|} \le 4\, \underbrace{\frac{\mu_2^2}{\mu_1}\, \frac{\bar{a}_{1,2}^2\, c_k^2}{\underline{c}_0}}_{=:\, \bar{c}_A}\, h^{2-d}\,.$$

Beweis:

- Btr. den Zähler $\|C_h^H\, K_h^{-1}\, \underline{g}_h\|$ und schätzen ihn ab:

(5.10) $$\|C_h^H\, K_h^{-1}\, \underline{g}_h\| = \| \underbrace{K_h^{-1}\, \underline{g}_h}_{=:\,\underline{u}_h \leftrightarrow u_h} - I_H^h \underbrace{K_H^{-1}\, I_h^H\, \underline{g}_h}_{=:\,\underline{u}_H \leftrightarrow u_H = (\widetilde{I_H^h \underline{u}_H}) \subset V_H \subset V_h} \| = \|\underline{u}_h - I_H^h\, \underline{u}_H\|$$

$$\begin{array}{ccc}
K_h\, \underline{u}_h = \underline{g}_h & & K_H\, \underline{u}_H = I_h^H\, \underline{g}_h \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
(K_h\, \underline{u}_h, \underline{v}_h) = (\underline{g}_h, \underline{v}_h) \ \ \forall\, \underline{v}_h \in I\!R^{N_h} & & (K_H\, \underline{u}_H, \underline{v}_H) = (I_h^H\, \underline{g}_h, \underline{v}_H) \ \ \forall\, \underline{v}_H \in I\!R^{N_H} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \leftarrow I_H^h = (I_H^h)^T \quad (5.4) \\
a\,(u_h, v_h) = (\underline{g}_h, \underline{v}_h) \ \ \forall\, \underline{v}_h \leftrightarrow v_h \in V_h & & a\,(u_H, v_H) = (\underline{g}_h, I_H^h\, \underline{v}_H) \ \ \forall\, \underline{v}_H \leftrightarrow v_H \in V_H \\
\Downarrow & & \\
\end{array}$$

$$a\,(u_h, v_H) = (g_h, I_H^h\, \underline{v}_H) \quad \forall\, \underline{v}_H \leftrightarrow v_H = (\widetilde{I_H^h \underline{v}_H}) \in V_H \subset V_h$$

(5.11) $$a\,(u_h - u_H, v_H) = 0 \quad \forall\, v_H \in V_H.$$

- <u>Motiv:</u> $\|\cdot\|_0^2 \simeq h^d\, \|\cdot\|^2$, d.h.

(5.12) $$\|\underline{u}_h - I_H^h\, \underline{u}_H\| \le \underline{c}_0^{-0.5}\, h^{-d/2}\, \|u_h - \underbrace{\widetilde{I_H^h \underline{u}_H}}_{= u_H}\|_0$$

$\curvearrowright$ L_2–Abschätzung mit Nitsche-Trick:

$$\begin{array}{l}
a\,(w, v) = (\underbrace{u_h - u_H}_{\in V_h \subset L_2(\Omega)}, v)_0 \quad \forall\, v \in V_0 \\
\quad \| \\
a\,(v, w)
\end{array}$$

Vor. $(2)_{(\text{iii})} \Longrightarrow$ 1) $w \in V_0 \cap W_2^2\,(\Omega)$,
2) $\|w\|_2 \le c_k\, \|u_h - u_H\|_0$.

$v = u_h - u_H$ $\curvearrowright$

$$\begin{aligned}
\|u_h - u_H\|_0^2 &= a\,(w, u_h - u_H) \overset{(5.11)}{=} a\,(u_h - u_H, w - \mathrm{int}_{V_H}(w)) \\
& \qquad \text{(Nu II)} \downarrow \quad \text{Approximationssatz} \downarrow \\
&\le \mu_2\, \|u_h - u_H\|_1\, \|w - \mathrm{int}_{V_H}\,(w)\|_1 \le \\
&\le \mu_2\, \|u_h - u_H\|_1\, \bar{a}_{1,2}\, H\, |w|_2 \overset{H=2h,\ 2)\ (\uparrow)}{\le} \\
&\le 2\, \mu_2\, \bar{a}_{1,2}\, h\, \|u_h - u_H\|_1\, c_k\, \|u_h - u_H\|_0.
\end{aligned}$$

$$(5.13) \qquad \boxed{\|u_h - u_H\|_0 \le 2\,\mu_2\,\bar a_{1,2}\,c_k\,h\,\|u_h - u_H\|_1.}$$

- Wegen $(5.2)_{(\mathrm{i})}$, (5.11) und $K_h\,\underline{u}_h = \underline{g}_h$ gilt:

$$(5.14) \qquad \begin{aligned} \mu_1\,\|u_h - u_H\|_1^2 &\overset{(5.2)_{(\mathrm{i})}}{\le} a\,(u_h - u_H, u_h - u_H) \overset{(5.11)}{=} \\ &\overset{(5.11)}{=} a\,(u_h - u_H, u_h) = (K_h\,(\underline{u}_h - I_H^h\,\underline{u}_H), \underline{u}_h) = \\ &= (\underline{u}_h - I_H^h\,\underline{u}_H, K_h\,\underline{u}_h) = (\underline{u}_h - I_H^h\,\underline{u}_H, \underline{g}_h) \le \\ &\le \|\underline{u}_h - I_H^h\,\underline{u}_H\|\,\|\underline{g}_h\|. \end{aligned}$$

- Aus (5.12) – (5.14) folgt

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_h - I_H^h\,\underline{u}_H\|^2 &\overset{(5.12)}{\le} \underline{c}_0^{-1}\,h^{-d}\,\|u_h - u_H\|_0^2 \le \\ &\overset{(5.13)}{\le} \underline{c}_0^{-1}\,h^{-d}\,4\,\mu_2^2\,\bar a_{1,2}^2\,c_k^2\,h^2\,\|u_h - u_H\|_1^2 \le \\ &\overset{(5.14)}{\le} \underline{c}_0^{-1}\,h^{-d}\,4\,\mu_2^2\,\bar a_{1,2}^2\,c_k^2\,h^2\,\mu_1^{-1}\,\|\underline{u}_h - I_H^h\,\underline{u}_H\|\,\|\underline{g}_h\|. \end{aligned}$$

$$(5.15) \qquad \boxed{\|\underline{u}_h - I_H^h\,\underline{u}_H\| \le 4\,\frac{\mu_2^2}{\mu_1}\,\frac{\bar a_{1,2}\,c_k^2}{\underline{c}_0}\,h^{2-d}\,\|\underline{g}_h\|}$$

- Aus (5.10) und (5.15) folgt

$$(5.8) \qquad \begin{aligned} \|C_h^H\,K_h^{-1}\| &:= \sup_{\underline{g}_h} \frac{\|C_h^H\,K_h^{-1}\,\underline{g}_h\|}{\|\underline{g}_h\|} \overset{(5.10)}{=} \\ &= \sup_{\underline{g}_h} \frac{\|\underline{u}_h - I_H^h\,\underline{u}_H\|}{\|\underline{g}_h\|} \le \\ &\overset{(5.15)}{\le} \underbrace{4\,\frac{\mu_2^2}{\mu_1}\,\frac{\bar a_{1,2}^2\,c_k^2}{\underline{c}_0}}_{=:\,\bar c_A}\,h^{2-d}. \end{aligned}$$

q.e.d.

■ **Lemma 5.2:** (Smoothing Property)

Vor.: Es seien die Voraussetzungen aus Pkt. 5.1 erfüllt, d.h. $(5.2)_{(i)}$, reguläre Triangulation und (5.4).
Desweiteren sei

(5.16) $\omega = \theta / (\bar{c}_E\, h^{d-2}) \quad \text{bzw.} \quad \omega = \theta / \lambda_{\max}(K_h)$

mit fixiertem $\theta \in (0,1]$; $\lambda_{\max}(K_h) \leq \bar{c}_E\, h^{d-2}$.

Bh.: Dann gilt die Glättungseigenschaft:

(5.9) $$\|K_h\, S_h^\nu\| := \sup_{\substack{\underline{v}_h \in \mathbb{R}^{N_h} \\ \underline{v}_h \neq \underline{O}}} \frac{\|K_h\, S_h^\nu\, \underline{v}_h\|}{\|\underline{v}_h\|} \leq \underbrace{\frac{\bar{c}_E}{\theta \cdot e}\, \frac{1}{\nu}}_{=:\, \eta(\nu)}\, h^{d-2}.$$

Beweis: (Index h wird der Einfachheit halber weggelassen !)

- Btr. EWP: $K \underbrace{\underline{\varphi}_i}_{\text{EV}} = \underbrace{\lambda_i}_{\text{EW}} \underbrace{\underline{\varphi}_i}_{\text{EV}} \quad : \quad (\underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j) = \delta_{ij} \quad \forall\, i,j = \overline{1,N}.$

  Entwickeln $\underline{v} \equiv \underline{v}_h$ in Fourierreihe nach EV, d.h.

  $$\underline{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i\, \underline{\varphi}_i, \quad \|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \quad \text{mit} \quad \alpha_i = (\underline{v}, \underline{\varphi}_i).$$

  $$\Longrightarrow K\, S^\nu\, \underline{v} = K\,(I - \omega\, K)^\nu\, \underline{v} = \sum_{i=1}^N \lambda_i\, (1 - \omega\, \lambda_i)^\nu\, \alpha_i\, \underline{\varphi}_i.$$

  $$\Longrightarrow \|K\, S^\nu\, \underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\, (1 - \omega\, \lambda_i)^{2\nu}\, \alpha_i^2$$

  $$= \frac{1}{\omega^2} \sum_{i=1}^N (\omega\, \lambda_i)^2\, (1 - (\omega\, \lambda_i))^{2\nu}\, \alpha_i^2$$

  $$\omega = \theta / (\bar{c}_E\, h^{d-2}) \curvearrowright 0 < \rho_i := \omega\, \lambda_i \leq \theta\, \frac{\lambda_N}{\bar{c}_E\, h^{d-2}} \leq 1 \qquad \theta \in (0,1]$$

  $$\leq \frac{1}{\omega^2} \max_{0 \leq \rho \leq 1} \left\{ \rho^2\, (1-\rho)^{2\nu} \right\} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2.$$

  Wegen $\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = \|\underline{v}\|^2$ erhalten wir folglich

  (5.17) $$\boxed{\|K_h\, S_h^\nu\, \underline{v}_h\|^2 \leq \frac{1}{\omega^2} \max_{0 \leq \rho \leq 1} \left\{ \rho^2\, (1-\rho)^{2\nu} \right\} \|\underline{v}_h\|^2.}$$

- <u>NR:</u> Berechnen Maximum der Fkt. $\rho^2\,(1-\rho)^{2\nu}$ in $[0,1]$:

  Btr. dazu die Fkt. $\varphi\,(\rho) = \rho\,(1-\rho)^{\nu}$ mit $\nu > 0$.

  $$\curvearrowright\quad \varphi'\,(\rho) = (1-\rho)^{\nu} - \rho\cdot\nu\,(1-\rho)^{\nu-1} = 0 \overset{\rho\neq 1}{\Longrightarrow} \rho = 1/(1+\nu),$$

  $$\varphi''\,(\rho) = -2\,\nu\,(1-\rho)^{\nu-1} + \nu\,(\nu-1)\,\rho\,(1-\rho)^{\nu-2},$$

  $$\Rightarrow \varphi''\left(\frac{1}{1+\nu}\right) = -(\nu+1)\,\nu\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu-2} < 0,$$

  $$\curvearrowright\quad \max_{0\,\leq\,\rho\,\leq\,1} \varphi\,(\rho) = \varphi\left(\frac{1}{\nu+1}\right) = \frac{1}{\nu+1}\,\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu} = \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{e},$$

  $$\boxed{\left(1+\tfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \overset{\searrow}{\geq}\; e \;\overset{\nwarrow}{>} \left(1+\tfrac{1}{\nu}\right)^{\nu}}$$

  <u>Resultat:</u> $\displaystyle\max_{0\,\leq\,\rho\,\leq\,1} \{\rho^2\,(1-\rho)^{2\nu}\} \leq \left(\frac{1}{\nu}\,\frac{1}{e}\right)^2.$

- Damit erhalten wir die Abschätzung

  $$\|K_h\,S_h^{\nu}\,\underline{v}_h\|^2 \leq \left(\frac{1}{\omega\cdot e}\,\frac{1}{\nu}\right)^2 \|\underline{v}_h\|^2,$$

  aus der mit $\omega = \theta/(\bar{c}_E\,h^{d-2})$ folgt

  $$\boxed{\|K_h\,S_h^{\nu}\,\underline{v}_h\| \leq \frac{\bar{c}_E}{\theta\,e}\,\frac{1}{\nu}\,h^{d-2}\,\|\underline{v}_h\|.}$$

  Damit ist (5.9) bewiesen. **q.e.d.**

- **Lemma 5.1 und Lemma 5.2 liefern die gewünschte Abschätzung der Zweigitterrate bzgl. der Euklidischen Norm** ($\widehat{=} \|M_h^H\|_{\text{Spektralnorm}}$):

Satz 5.3: (Abschätzung der Zweigitterrate)

Vor.: Es seien die Voraussetzungen aus Pkt. 5.1 erfüllt, d.h. (5.2), reguläre Triangulation, $\mathcal{F}(\Delta) \supseteq \mathcal{P}_1$ und (5.4).
Desweiteren gelte (5.16), d.h. $\omega = \theta/(\bar{c}_E\, h^{d-2})$ mit fixiertem $\theta \in (0,1]$.

Bh.: Dann gilt die folgende Abschätzung des Zweigitteriterationsoperators in der Spektralnorm:

$$\|M_h^H\| \leq \underbrace{4\,\frac{\mu_2^2}{\mu_1}\,\frac{\bar{a}_{1,2}^2\,c_k^2}{\underline{c}_0}\,\frac{\bar{c}_E}{\theta\cdot e}}_{=:\, c \neq c(h)}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}} =: \sigma^* < 1 \tag{5.18}$$

für hinreichend große ν : $\nu > c$, wobei

μ_1	–	Elliptizitätskonstante	:	$a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|_1^2 \;\; \forall\, v \in V_0$,
μ_2	–	Beschränktheitskonstante	:	$\lvert a(u,v)\rvert \leq \mu_2 \|u\|_1 \|v\|_1 \;\; \forall\, u,v \in V_0$,
c_k	–	Koerzitivitätskonstante	:	$\|w\|_2 \leq c_k \|\Phi\|_0 \quad (5.2)_{\text{(iii)}}$
$\bar{a}_{1,2}$	–	Approximationskonstante	:	$\inf\limits_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_1 \leq \bar{a}_{1,2} h \|v\|_2$,
$\bar{c}_E$	–	Spektralkonstante	:	$\lambda_{\max}(K_h) \leq \bar{c}_E h^{d-2}$,
$\underline{c}_0$	–	L_2–Äquivalenzkonstante	:	$\underline{c}_0 h^d \|\underline{v}_h\|^2 \leq \|v_h\|_0^2 \;\; \forall\, \underline{v}_h \leftrightarrow v_h \in V_h$,

$\theta \in (0,1]$ – fixiert, $e = 2.71828\ldots$.

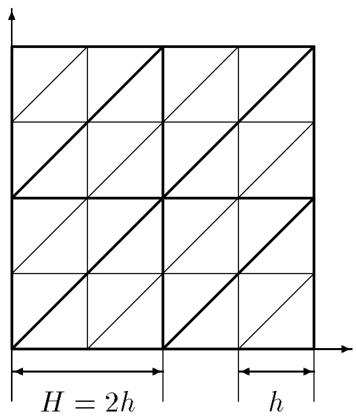
Beweis: folgt sofort aus (5.7), Lemma 5.1 und Lemma 5.2. **q.e.d.**

- **Bemerkung 5.4:**

1. Die Abschätzung (5.18) erlaubt es uns, nur für hinreichend viele Glättungsschritte $\nu > c$ eine h–unabhängige Rate zu beweisen.
   Diese kann jedoch unabhängig von h beliebig klein gemacht werden ($\sigma^* = O(\nu^{-1}) \to 0$ für $\nu \to \infty$) !

2. <u>Beispiel:</u> = MBsp. 2: $-\Delta\, u = f$ in $\Omega = (0,1)^2$ und $u = 0$ auf $\partial\,\Omega$:

   – FE–Diskretisierung: $\curvearrowright$ Courant–Element.



   – Ersetzen: $\|\cdot\|_1 \mapsto |\cdot|_1$ $\curvearrowright$ ist Norm in $V_0 = \overset{\circ}{W}{}^1_2\,(\Omega)$,
   $\|\cdot\|_2 \mapsto |\cdot|_2$.

   – Dann gilt: $d = 2;\ \theta = 1;$
   $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1;$
   $\bar{c}_E = 8$ ($\curvearrowright$ Satz II.4.4 [33]);
   $\underline{c}_0 = 1/24$ ($\curvearrowright$ Ü II.4.7 [33]);
   $\bar{a}_{1,2} = 0.5086 : \inf\limits_{v_h \in V_h} |v - v_h|_1 \le \bar{a}_{1,2}\, h\, |v|_2;$
   $c_k = 1 : |u|_2 \le \|f\|_0$ ($\curvearrowright$ Bem. II.4.8.5).

   – <u>Satz 5.3:</u> $\|M_h^H\| \le 4\,\frac{1^2}{1}\,\frac{(0.5086)^2\cdot 1^2}{1/24}\,\frac{8}{1\cdot 2.718}\cdot\frac{1}{\nu} = 73.08\cdot\frac{1}{\nu} < 1,$

   falls $\nu \ge 74$?!?

3. Aus Pkt. 4.3.2 erhalten wir auch MG–Raten–Abschätzungen für hinreichend viele Glättungsschritte mit der dort entwickelten Störungstheorie. Mit der Störungstheorie aus Pkt. 4.3.2 können aber keine h–unabhängigen MG–Raten für $\nu = 1$ (bzw. ν = „klein“) und für den V–Zyklus erzielt werden !!!

5.3 Zur Konvergenz des V–Zykluses

- **Betrachten nun zur Auflösung des FE–Gleichungssystems**

$$K_l \, \underline{u}_l = \underline{f}_l \tag{5.19}$$

auf dem feinsten Gitter den folgenden, zum Zweigitterverfahren aus Pkt. 5.2 gehörenden **<u>Multigrid–Algorithmus</u>**:

$k = 0 : \underline{u}_l^0$ – gegebene Startnäherung.

$$k = 0, 1, 2, \dots \qquad \longmapsto \qquad \boxed{\text{Fehler}}$$

$$\underline{u}_l^{k,0} = \underline{u}_l^k \qquad \longmapsto \qquad \underline{z}_l^{k,0} \equiv \underline{z}_l^k := \underline{u}_l - \underline{u}_l^k$$

<u>1. Schritt:</u> ν–Vorglättungsschritte:

$$\underline{u}_l^{k,1} = G_l^\nu \, (\underline{u}_l^{k,0}, \underline{f}_l) \qquad \longmapsto \qquad \underline{z}_l^{k,1} := \underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1} = S_l^\nu \, \underline{z}_l^{k,0}$$

$$\underline{d}_l^{k,1} = \underline{f}_l - K_l \, \underline{u}_l^{k,1} = K_l \, \underline{z}_l^{k,1} \qquad\qquad S_l^\nu = (I_l - \omega_l \, K_l)^\nu$$

<u>2. Schritt:</u> Grobgitterkorrektur:

$$\underline{u}_l^{k+1} \equiv \underline{u}_l^{k,2} := \underline{u}_l^{k,1} + \underline{w}_l^k \qquad \longmapsto \qquad \underline{z}_l^{k,2} := \underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,2} = C_l^{l-1} \, \underline{z}_l^{k,1}$$

Grobgitterkorrektur

$$C_l^{l-1} = I_l - I_{l-1}^l (I_{l-1} - M_{l-1}^{\gamma_{l-1}}) K_{l-1}^{-1} I_l^{l-1} K_l$$

$$\begin{aligned} \underline{w}_l^k = I_{l-1}^l \, \underline{w}_{l-1}^k \quad &= \quad I_{l-1}^l \, (I_{l-1} - M_{l-1}^{\gamma_{l-1}}) \, K_{l-1}^{-1} \, I_l^{l-1} \, \underline{d}_l^{k,1} \\ &= \quad I_{l-1}^l \, (I_{l-1} - M_{l-1}^{\gamma_{l-1}}) \, K_{l-1}^{-1} \, I_l^{l-1} \, K_l \, \underline{z}_l^{k,1} \end{aligned}$$

- **<u>Ziel:</u>** Abschätzung der Multigrid–Rate η_* in der Energienorm $|||\cdot|||_1 \equiv \|\cdot\|_{K_l}$:

$$|||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k+1}|||_1 \overset{!}{\leq} \eta_* \, |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^k|||_1$$

mit h_l–unabhängiger Rate $\eta_* \in [0, 1)$!

- **Btr. zunächst die exakte Grobgitterkorrektur (↷ Zweigitterverfahren)**

$$\underline{\hat{u}}_l^{k,2} = \underline{u}_l^{k,1} + \underline{\hat{w}}_l^{k} \quad \longmapsto \quad \underline{\hat{z}}_l^{k,2} = \hat{C}_l^{l-1}\, \underline{z}_l^{k,1}$$

$$\hat{C}_l^{l-1} = I_l - I_{l-1}^l\, K_{l-1}^{-1}\, I_l^{l-1}\, K_l$$

$$\underline{\hat{w}}_l^{k} = I_{l-1}^l\, \underline{\hat{w}}_{l-1}^{k} = I_{l-1}^l\, \underbrace{K_{l-1}^{-1}\, I_l^{l-1}\, \underline{d}_l^{k,1}}_{= \underline{\hat{w}}_{l-1}^{k}}$$

$$\boxed{K_{l-1}\, \underline{\hat{w}}_{l-1}^{k} = I_l^{l-1}\, \underline{d}_l^{k,1} \equiv I_l^{l-1}\, K_l\, \underline{z}_l^{k,1}} \quad \longleftarrow \quad \underline{v}_{l-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\hat{w}}_{l-1}^{k} \quad \longleftrightarrow \quad \hat{w}_{l-1}^{k} \equiv \hat{w}_l^{k} \equiv I_{l-1}^l\, \widetilde{\underline{\hat{w}}_{l-1}^{k}} \in V_{l-1} \subset V_l :$$

$$a\,(\hat{w}_{l-1}^{k}, v_{l-1}) = (I_l^{l-1}\, K_l\, \underline{z}_l^{k,1}, \underline{v}_{l-1}) \quad \forall\, \underline{v}_{l-1} \longleftrightarrow v_{l-1} \in V_{l-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$a\,(\hat{w}_l^{k}, v_{l-1}) = (K_l\, \underline{z}_l^{k,1}, I_{l-1}^l\, \underline{v}_{l-1}) \equiv a\,(z_l^{k,1}, v_{l-1})$$

$$a\,(u_l - \underbrace{(u_l^{k,1} + \hat{w}_l^{k})}_{=:\, \hat{u}_l^{k,2}}, v_{l-1}) = 0 \quad \forall\, v_{l-1} \in V_{l-1}$$

$$\boxed{a\,(u_l - \hat{u}_l^{k,2}, v_{l-1}) = 0 \quad \forall\, v_{l-1} \in V_{l-1}} \tag{5.20}$$

Die Beziehung (5.20) bedeutet:

$$\boxed{u_l - \hat{u}_l^{k,2} \perp V_{l-1} \text{ bezüglich energetischem Skalarprodukt } a(\cdot,\cdot),}$$

d.h.
$$\begin{array}{cccccc} \hat{C}_l^{l-1} & = & I_l - \underbrace{I_{l-1}^l\, K_{l-1}^{-1}\, I_l^{l-1}\, K_l}\, : I\!R^{N_l} & \longmapsto & (I_{l-1}^l\, I\!R^{N_{l-1}})^{\perp(K_l\,\cdot,\cdot)} \\ \| & & & & \||| \\ P_l & = & I_l \quad - \quad Q_l & & (\text{im } I_{l-1}^l)^{\perp(K_l\,\cdot,\cdot)} \end{array}$$

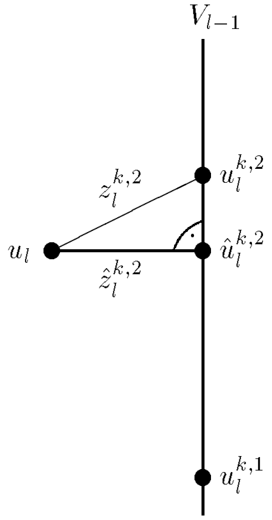
ist ein Orthoprojektor bzgl. des energetischen Skalarproduktes $(K_l\,\cdot,\cdot)$, siehe auch Kap. 6:

$$\begin{aligned} O &= a\,(u_l - \hat{u}_l^{k,2}, v_{l-1}) = (K_l(\underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k,2}), I_{l-1}^l\, \underline{v}_{l-1}) = \\ &= (\hat{C}_l^{l-1}\, \underline{z}_l^{k,1}, I_{l-1}^l\, \underline{v}_{l-1})_{K_l} \quad \forall\, \underline{v}_{l-1} \longleftrightarrow v_{l-1} \in V_{l-1}. \end{aligned}$$

Desweiteren gilt:

1. $u_l^{k,1} - \hat{u}_l^{k,2} = u_l^{k,1} - (u_l^{k,1} + \hat{w}_l^k) = -\hat{w}_l^k = -\hat{w}_{l-1}^k \in V_{l-1}$,
   $$\updownarrow$$
   $\underline{u}_l^{k,1} - \underline{\hat{u}}_l^{k,2} = -I_{l-1}^l\, \underline{\hat{w}}_{l-1}^k \in \text{ im } I_{l-1}^l = I_{l-1}^l\, \mathbb{R}^{N_{l-1}}$.

2. $u_l^{k,2} - \hat{u}_l^{k,2} = w_l^k - \hat{w}_l^k = w_{l-1}^k - \hat{w}_{l-1}^k \in V_{l-1}$.



Folglich gilt:

(5.21) $$\boxed{\underbrace{u_l - \hat{u}_l^{k,2}}_{=\hat{z}_l^{k,2}} \underset{a(\cdot,\cdot)}{\perp} u_l^{k,1} - \hat{u}_l^{k,2}, \quad u_l^{k,2} - \hat{u}_l^{k,2} \in V_{l-1}}$$

■ Dann können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}
|||\underline{u}_l - \underbrace{\underline{u}_l^{k+1}}_{=\,\underline{u}_l^{k,2}}|||_1^2 &= |||(\underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k,2}) \overset{\perp}{\oplus} (\underline{\hat{u}}_l^{k,2} - \underline{u}_l^{k,2})|||_1^2 = \\
&\overset{(5.21)\ \text{Pythagoras}}{=} |||\underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k,2}|||_1^2 + |||\underbrace{\underline{\hat{u}}_l^{k,2} - \underline{u}_l^{k,2}}_{\underline{\hat{w}}_l^k - \underline{w}_l}|||_1^2 \\
&= |||\underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k,2}|||_1^2 + |||I_{l-1}^l\,(\underline{\hat{w}}_{l-1}^k - \underline{w}_{l-1}^k|||_1^2
\end{aligned}$$

> NR: a) $|||I_{l-1}^l|||_1 := \sup\limits_{\underline{v}_{l-1}} \frac{|||I_{l-1}^l \underline{v}_{l-1}|||_1}{|||\underline{v}_{l-1}|||_1} = 1$
> bzw. $|||I_{l-1}^l \underline{v}_{l-1}|||_1 = |||\underline{v}_{l-1}|||_1$
> $\forall\, \underline{v}_{l-1} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}}$ (mms),
>
> b) $|||\underline{\hat{w}}_{l-1}^k - \underline{w}_{l-1}^k|||_1 \le \eta_{l-1}^{\gamma_{l-1}} |||\underline{\hat{w}}_{l-1}^k|||_1$.

$$\begin{aligned}
&\le |||\underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k,2}|||_1^2 + \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} |||\underline{\hat{w}}_{l-1}|||_1^2 \\
&= |||\underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k,2}|||_1^2 + \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} |||\overbrace{\underline{u}_l^{k,1} - \underline{\hat{u}}_l^{k,2}}^{=\,-}|||_1^2
\end{aligned}$$

$$\underline{\text{NR:}}\ |||\underline{u}_l^{k,1} - \underline{u}_l|||_1^2 = |||(\underline{u}_l^{k,1} - \hat{\underline{u}}_l^{k,2}) \overset{\perp}{\oplus} (\hat{\underline{u}}_l^{k,2} - \underline{u}_l)|||_1^2 \overset{(5.21)}{=} |||\underline{u}_l^{k,1} - \hat{\underline{u}}_l^{k,2}|||_1^2 + |||\hat{\underline{u}}_l^{k,2} - \underline{u}_l|||_1^2$$

$$= \left(1 - \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right) |||\underline{u}_l - \hat{\underline{u}}_l^{k,2}|||_1^2 + \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1}|||_1^2.$$

- **Damit haben wir das folgende Lemma bewiesen:**

Lemma 5.5:

Vor.: Es seien die Voraussetzungen aus Pkt. 5.1 erfüllt, d.h. (5.2), reguläre Triangulation, $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{F}(\Delta)$ und (5.4).

Bh.: Dann gilt die folgende Ungleichung:

$$|||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k+1}|||_1^2 \leq \left(1 - \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right) |||\overset{\textbf{a)}}{\underbrace{\underline{u}_l - \hat{\underline{u}}_l^{k,2}}_{=:\hat{\underline{z}}_l^{k,2} = \hat{C}_l^{l-1}\underline{z}_l^{k,1}}}|||_1^2 + \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} |||\overset{\textbf{b)}}{\underbrace{\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1}}_{=:\underline{z}_l^{k,1} = S_l^{\nu}\underline{z}_l^k}}|||_1^2, \tag{5.22}$$

wobei $\underline{u}_l$ – exakte Lsg. des GS $K_l\,\underline{u}_l = \underline{f}_l$,

$$\underline{u}_l^{k,0} := \underline{u}_l^k\ \boxed{\text{alte Näherung}} \longmapsto \underline{z}_l^k = \underline{u}_l - \underline{u}_l^k;$$

$$\underline{u}_l^{k,1} = G_l^{\nu}\,(\underline{u}_l^{k,0}, \underline{f}_l) \longmapsto \underline{z}_l^{k,1} = \underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1};$$

$$\hat{\underline{u}}_l^{k,2} = \underline{u}_l^{k,1} + \hat{\underline{w}}_l^k \text{ mit } \hat{\underline{w}}_l^k = I_{l-1}^l\,K_{l-1}^{-1}\,I_l^{l-1}\,K_l\,\underline{z}_l^{k,1};$$

$$\underline{u}_l^{k+1} = \underline{u}_l^{k,2} = \underline{u}_l^{k,1} + \underline{w}_l^k \text{ mit } \underline{w}_l^k = I_{l-1}^l\,(I_{l-1} - M_{l-1}^{\gamma_{l-1}})\,K_{l-1}^{-1}\,I_l^{l-1}\,K_l\,\underline{z}_l^{k,1}.$$

$\boxed{\text{neue Näherung}}$

Folgerung 5.6:

Vor.: 1) Voraussetzungen aus Lemma 5.5 seien erfüllt.

2) $\omega_l = \theta/(\bar{c}_E\, h_l^{d-2})$ bzw. $\omega_l = \theta/\lambda_{\max}(K_l)$ mit $\theta \in (0,1]$ fix.

3) $0 \le \sigma_* =$ Zweigitterrate < 1 in der $|||\cdot|||_1$–Norm, d.h.

(5.23) $$|||\underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k,2}|||_1 \le \sigma^*\, |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^k|||_1 .$$

Bh.: Dann gilt die Abschätzung:

(5.24) $$|||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k+1}|||_1^2 \le \underbrace{\left[\left(1-\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right)\sigma_*^2 + \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right]}_{=:\,\eta_l^2} |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^k|||_1^2 .$$

Beweis: folgt sofort aus (5.22), (5.23) und

(5.25) $$\begin{aligned} |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1}|||_1 &= |||S_l^\nu(\underline{u}_l - \underline{u}_l^k)|||_1 \le \\ &\le |||S_l|||_1^\nu\, |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^k|||_1 \le |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^k|||_1 , \end{aligned}$$

da $|||S_l|||_1 \equiv |||S_l|||_{K_l} \le 1$ für $\omega_l \le 2/\lambda_{\max}(K_l)$ (mms).

q.e.d.

Wegen $\eta_l^2 = \left(1-\eta_{l-1}^{2\gamma}\right)\sigma_*^2 + \eta_{l-1}^{2\gamma} = \sigma_*^2 + (1-\sigma_*^2)\,\eta_{l-1}^{2\gamma}$ und der Gültigkeit von (5.24) für alle $q = 3, 4, \ldots$, gilt für $\gamma_q = \gamma\ \forall\, q$ die Rekursionsformel

(5.26) $$\begin{aligned} \eta_2 &= \sigma \equiv \sigma_* < 1, \\ \eta_q^2 &= \sigma^2 + (1-\sigma^2)\,\eta_{q-1}^{2\gamma} < 1 \quad \forall\, q = 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Ü 5.1

Man zeige, daß für $q \to \infty$ $(l \to \infty)$ gilt:

1) $\gamma = 1$ (V–Zyklus): $\eta_q \nearrow 1$ **(leider !)**,

2) $\gamma = 2$ (W–Zyklus): $$\eta_q \nearrow \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma \ge 1/\sqrt{2}, \\ \sqrt{\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}} & \text{für } \sigma < 1/\sqrt{2} \approx 0.707. \end{cases}$$

Für $\sigma = 0.2$ erhält man aus der Rekursionsformel (5.26) folgende Tabelle für die Konvergenzraten η_l:

γ \ l	2	3	4	5	6	$\sup\limits_l \eta_l$
1 (V–Zyklus)	0.2	0.280	0.340	0.389	0.430	1
2 (W–Zyklus)	0.2	0.2038	0.2041	0.2042	0.2042	$\sqrt{\frac{1}{24}} \leq 0.2042$

- Um **gleichmäßige Abschätzungen für den V–Zyklus** zu erhalten, muß die Abschätzungstechnik jedoch weiter verfeinert werden, d.h. individualisiert werden:

$$\underset{\text{L. 5.5}}{\overset{(5.22)}{\Longrightarrow}} \quad |||\underline{z}_l^{k+1}|||_1^2 \leq \left(1 - \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right) \underset{\textbf{a)}}{|||\underline{\hat{z}}_q^{k,2}|||_1^2} + \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} \underset{\textbf{b)}}{|||\underline{z}_q^{k,1}|||_1^2} \quad !$$

„Glattheit“ von $\underline{z}_q^{k,1}$

<u>Definition 5.7:</u> (Glattheitsmaß)

Definieren (individuelles) Maß für die Glattheit einer FEM–Fkt. $v_q \in V_q$, $v_q \leftrightarrow \underline{v}_q \in \mathbb{R}^{N_q}$:

$$(5.27) \qquad \mu\left(\underline{v}_q\right) := \begin{cases} 1 - \omega_q \dfrac{|||\underline{v}_q|||_2^2}{|||\underline{v}_q|||_1^2}, & \text{falls } \underline{v}_q \neq \boldsymbol{O}, \\ 0 & , \text{falls } \underline{v}_q = \boldsymbol{O}, \end{cases}$$

wobei $\omega_q = \theta / (\bar{c}_E\, h_q^{d-2}) \overset{(=)}{\leq} \theta / \lambda_{\max}(K_q) \leq 1/\lambda_{\max}(K_h)$ für fixiertes $\theta \in (0,1]$.

Wegen

$$|||\underline{v}_q|||_2^2 = (K_q^2\, \underline{v}_q, \underline{v}_q) = (K_q\, K_q^{1/2}\, \underline{v}_q, K_q^{1/2}\, \underline{v}_q) \leq \lambda_{\max}(K_q)\, |||\underline{v}_q|||_1^2$$

gilt:

$$0 \quad \leq \quad \mu\left(\underline{v}_q\right) \quad < \quad 1 \qquad \forall\, \underline{v}_q \in \mathbb{R}^{N_q}.$$

oszillierend (hochfrequent) | glatt (niedrigfrequent)

Tatsächlich,

$$0 \underset{\substack{\uparrow\\ \omega_q := 1/\lambda_{\max}(K_q)}}{\le} \frac{1}{\lambda_{\max}(K_q)} \frac{|||\underline{v}_q|||_2^2}{|||\underline{v}_q|||_1^2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Fourier–Entwicklung}\\ \text{nach EV von } K_q}}{=} \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\lambda_N} \lambda_i\, |\alpha_i|^2}{\sum\limits_{i=1}^{N} 1 \cdot \lambda_i\, |\alpha_i|^2} \approx \begin{cases} = 1 & , \ \alpha_N \neq 0,\ \alpha_i = 0 \ \ \forall\, i \neq N, \\ 1 & , \ \text{hochfrequent}, \\ \lambda_1/\lambda_N & , \ \text{niedrigfrequent}, \\ = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_N} = O\left(h_q^2\right), & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_i = 0 \ \ \forall\, i \neq 1. \end{cases}$$

- **Der Faktor $\boldsymbol{\mu}$ (= Glättungsfaktor = GF) ist maßgebend für den Gewinn pro Glättungsschritt:**

<u>**Lemma 5.8:**</u>

> <u>Vor.:</u> Sei $S_q = I_q - \omega_q\, K_q$ der Iterationsoperator des Glättungsverfahrens mit $\omega_q = \theta/(\bar{c}_E\, h_q^{d-2})$ bzw. $\omega_q = \theta/\lambda_{\max}\,(K_q)$ und $\theta \in (0,1]$ fixiert.
>
> <u>Bh.:</u> Dann gilt für $q = \overline{2,l}$ die Abschätzung:
>
> (5.28) $\quad |||S_q^\nu\, \underline{v}_q|||_1 \le \left[\mu\left(S_q^\nu\, \underline{v}_q\right)\right]^\nu |||\underline{v}_q|||_1 \quad \forall\, \underline{v}_q \in \mathbb{R}^{N_q}.$

<u>**Beweis:**</u> (↷ Fouriermethode).

- Entwickeln $\underline{v} \equiv \underline{v}_q$ (lassen Index „q“ im weiteren weg !) in die Fourier–Reihe

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, \underline{\varphi}_i, \quad \alpha_i = (\underline{v}, \underline{\varphi}_i),$$

nach den orthonormierten (bzgl. des Euklidischen Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)$) EV $\{\underline{\varphi}_i\}_{i=\overline{1,N}}$ von K. Dann folgt sofort die Darstellung

$$S^\nu\, \underline{v} \underset{\substack{\uparrow\\ \omega = \theta/(\bar{c}_E\, h^{d-2}) \le \theta/\lambda_N \le 1/\lambda_N}}{=} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, \underbrace{\left(1 - \theta\, \frac{\lambda_i}{\bar{c}_E\, h^{d-2}}\right)}_{=:\, \mu_i \,\ge\, 0}\, \underline{\varphi}_i.$$

- Damit erhalten wir für $|||S^\nu \underline{v}|||_1^2$:

$$\begin{aligned}
|||S^\nu \underline{v}|||_1^2 &= (K\,S^\nu \underline{v}, S^\nu \underline{v}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i\,\mu_i^{2\nu}\,\alpha_i^2 = \\
&= \sum_{i=1}^N \underbrace{(\lambda_i\,\alpha_i^2\,\mu_i^{2\nu+1})^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}}_{x_i} \underbrace{(\lambda_i\,\alpha_i^2)^{\frac{1}{2\nu+1}}}_{y_i} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i\,\alpha_i^2\,\mu_i^{2\nu+1}\right)^{\frac{2\nu}{2\nu+1}} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i\,\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2\nu+1}} .
\end{aligned}$$

<u>Hölder–Ungleichung:</u>
$|\sum x_i\,y_i| \le (\sum |x_i|^p)^{1/p}\,(\sum |y_i|^q)^{1/q}$,
mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ↷ <u>hier:</u> $\frac{1}{p}=\frac{2\nu}{2\nu+1}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{2\nu+1}$.

- Diese Ungleichung ist offenbar äquivalent ($\sqrt{\quad}$) zu

$|||S^\nu \underline{v}|||_1 \le |||S^{\nu+1/2}\,\underline{v}|||_1^{\frac{2\nu}{2\nu+1}}\;|||\underline{v}|||_1^{\frac{1}{2\nu+1}}$ bzw.

$|||S^\nu \underline{v}|||_1^{2\nu+1} \le |||S^{\nu+1/2}\,\underline{v}|||_1^{2\nu}\;|||\underline{v}|||_1 \quad \forall\, \underline{v} \in I\!R^N$.

- Setzen $\underline{w} = S^\nu\,\underline{v}$ und dividieren durch $|||w|||_1^{2\nu}$:

$$(5.29) \qquad |||S^\nu \underline{v}|||_1 \le \left(\frac{|||S^{1/2}\,\underline{w}|||_1}{|||\underline{w}|||_1}\right)^{2\nu} |||\underline{v}|||_1.$$

- Wegen $S = S^T \ge 0$ (für $0 < \theta \le 1$) gilt die Identität:

$$\begin{aligned}
|||S^{1/2}\,\underline{w}|||_1^2 &= (K\,S^{1/2}\,\underline{w}, S^{1/2}\,\underline{w}) = (S^{1/2}\,K\,S^{1/2}\,\underline{w}, \underline{w}) = \\
&= (K\,S\,\underline{w}, \underline{w}) = (K\,\underline{w}, \underline{w}) - \omega\,(K^2\,\underline{w}, \underline{w}) = \\
&= \left(1 - \omega\,\frac{|||\underline{w}|||_2^2}{|||\underline{w}|||_1^2}\right) |||\underline{w}|||_1^2 = \mu\,(\underline{w})\;|||\underline{w}|||_1^2.
\end{aligned}$$

- Zusammen mit (5.29) erhalten wir die gewünschte Abschätzung (5.28).

q.e.d.

<u>Bemerkung:</u> vgl. Lemma 5.5 ($q = l$):

$$|||\underbrace{S_q^\nu\,\underline{z}_q^{k,0}}_{=\underline{z}_q^{k,1}=\underline{u}_q-\underline{u}_q^{k,1}}|||_1 \le \left[\mu\left(\underline{z}_q^{k,1}\right)\right]^\nu |||\underbrace{\underline{z}_q^{k,0}}_{=\underline{u}_q-\underline{u}_q^{k,0}=\underline{u}_q-\underline{u}_q^{k}}|||_1.$$

■ **Lemma 5.9:**

Vor.: Es seien die Voraussetzungen aus Pkt. 5.1 erfüllt, d.h. (5.2), reguläre Triangulation, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}(\Delta)$ und (5.4) mit $\omega_l = \theta / \bar{c}_E\, h_l^{d-2}$, $\theta \in (0,1]$.

Bh.: Dann gilt für die Zweigitteriterierte $\underline{\hat{u}}_l^{k+1} \equiv \underline{\hat{u}}_l^{k,2} := \underline{u}_l^{k,1} + \underline{\hat{w}}_l^k$ (mit der exakten Grobgitterkorrektur $\underline{\hat{w}}_l^k$) die Fehlerabschätzung

$$|||\underline{\hat{z}}_l^{k,2}|||_1 \leq \min\left\{1,\, c \cdot \sqrt{1 - \mu\left(\underline{z}_l^{k,1}\right)}\right\} |||\underline{z}_l^{k,1}|||_1 \tag{5.30}$$

wobei $c = 2\,\mu_2^{0.5}\,\bar{a}_{1,2}\,c_K\,\bar{c}_E^{0.5}\,\underline{c}_0^{-0.5}\,\theta^{-0.5}$ (vgl. Satz 5.3),

$\underline{z}_l^{k,1} \equiv \underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1} = S_l^\nu\, \underline{z}_l^{k,0} \equiv S_l^\nu\, \underline{z}_l^k$,

$\underline{\hat{z}}_l^{k,2} \equiv \underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k,2} \equiv \underline{u}_l - \underline{\hat{u}}_l^{k+1}$.

Beweis:

- $$\underline{\hat{z}}_l^{k,2} \leftrightarrow \hat{z}_l^{k,2} = u_l - \hat{u}_l^{k,2} = u_l - \left(u_l^{k,1} + \hat{w}_l^k\right) = z_l^{k,1} - \hat{w}_l^k = $$
  $$= z_l^{k,1} - \hat{w}_{l-1}^k \perp V_{l-1} \text{ bzgl. } a(\cdot,\cdot)$$
  (vgl. (5.20)).
- Unter Benutzung dieser Orthogonalität erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} |||\underline{\hat{z}}_l^{k,2}|||_1^2 &= a\left(\hat{z}_l^{k,2}, \hat{z}_l^{k,2}\right) = \\ &= a\,(\underbrace{z_l^{k,1} - \hat{w}_l^k}_{=:\hat{z}_l^{k,2} \perp \hat{w}_{l-1}^k},\, z_l^{k,1} - \hat{w}_{l-1}^k) = \\ &= a\left(z_l^{k,1} - \hat{w}_l^k, z_l^{k,1}\right) = \\ &= \left(K_l\, \underline{z}_l^{k,1}, \underline{z}_l^{k,1} - \underline{\hat{w}}_l^k\right) \end{aligned} \tag{5.31}$$

- Aus (5.31) und unter Benutzung von Resultaten aus den Punkten 5.1 und 5.2 ergeben sich die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |||\underline{\hat{z}}_l^{k,2}|||_1^2 &\overset{(5.31)}{=} \left(K_l\, \underline{z}_l^{k,1}, \underline{z}_l^{k,1} - \underline{\hat{w}}_l^k\right) \overset{\text{Pkt. 5.1}}{\leq} \\ &\leq |||\underline{z}_l^{k,1} - \underline{\hat{w}}_l^k|||_0\, |||\underline{z}_l^{k,1}|||_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{|||\underline{v}_l|||_0^2 \le \underline{c}_0^{-1}\, h_l^{-d}\, \|v_l\|^2_{\overset{0}{L_2(\Omega)}} \qquad \forall\, \underline{v}_l \leftrightarrow v_l \in V_l \text{ (vgl. Pkt. 5.1)}}$$

$$\le \quad \underline{c}_0^{-0.5}\, h_l^{-d/2}\, \| \underbrace{z_l^{k,1} - \hat{w}_l^k}_{=\hat{z}_l^{k,2} \equiv u_l - \hat{u}_l^{k,2}} \|_0\, |||\underline{z}_l^{k,1}|||_2$$

$$\boxed{\|\hat{z}_l^{k,2}\|_0 \le 2\,\mu_2^{0.5}\,\bar{a}_{1,2}\, c_K\, h_l\, |||\hat{\underline{z}}_l^{k,2}|||_1}$$

Beweis ist analog zum Beweis der Approximationsabschätzung (5.13) aus Pkt. 5.2 mittels Nitsche–Trick (mms).

$$\le \quad \underline{c}_0^{-0.5}\, h_l^{-d/2}\, 2\,\mu_2^{0.5}\,\bar{a}_{1,2}\, c_K\, h_l\, |||\hat{\underline{z}}_l^{k,2}|||_1\, |||\underline{z}_l^{k,1}|||_2$$

<u>Resultat:</u>

$$\boxed{|||\hat{\underline{z}}_l^{k,2}|||_1 \le 2\,\mu_2^{0.5}\,\bar{a}_{1,2}\, c_K\, \underline{c}_0^{-0.5}\, h_l^{1-d/2}\, |||\underline{z}_l^{k,1}|||_2}$$

Da

$$\omega_l = \frac{\theta}{\bar{c}_E\, h_l^{d-2}} \quad \text{und somit} \quad h_l^{1-d/2} = \sqrt{\frac{\bar{c}_E}{\theta}}\,\sqrt{\omega_l},$$

kann die obige Abschätzung offenbar in die folgende Form gebracht werden:

$$\text{(5.32)} \qquad \boxed{|||\hat{\underline{z}}_l^{k,2}|||_1 \le \underbrace{2\,\mu_2^{0.5}\,\bar{a}_{1,2}\, c_K\, c_0^{-0.5}\, \bar{c}_E^{0.5}\, \theta^{-0.5}}_{=:\,c}\, \sqrt{\omega_l}\, |||\underline{z}^{k,1}|||_2}$$

- Weiter folgt aus (5.31) die triviale Abschätzung

$$|||\hat{\underline{z}}_l^{k,2}|||_1^2 = a\left(z_l^{k,2}, z_l^{k,1}\right) \le |||\underline{z}_l^{k,2}|||_1\, |||\underline{z}_l^{k,1}|||_1, \text{ d.h.}$$

$$\text{(5.33)} \qquad \boxed{|||\hat{\underline{z}}_l^{k,2}|||_1 \;\le\; |||\underline{z}_l^{k,1}|||_1.}$$

- Aus (5.32) und (5.33) erhalten wir sofort

$$
\begin{aligned}
|||\hat{\underline{z}}_l^{k,2}|||_1 \quad &\leq \quad \min\left\{1, c\,\underbrace{\sqrt{\omega_l \frac{|||\underline{z}_l^{k,1}|||_2^2}{|||\underline{z}_l^{k,1}|||_1^2}}}_{\underset{\text{Def. 5.7}}{\overset{\uparrow}{=:}}\, 1-\mu\,(\underline{z}_l^{k,1})}\right\} |||\underline{z}_l^{k,1}|||_1 = \\
&= \quad \min\left\{1, c\sqrt{1-\mu\,(\underline{z}_l^{k,1})}\right\} |||\underline{z}_l^{k,1}|||_1.
\end{aligned}
$$

q.e.d.

- **Aus Lemmas 5.5, 5.8 und 5.9 ergeben sich sofort die folgenden Abschätzungen:**

$$
\begin{aligned}
|||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k+1}|||_1^2 \quad &\leq \quad \left(1-\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right) \underbrace{|||\underline{u}_l - \hat{\underline{u}}_l^{k,2}|||_1^2}_{\text{Lemma 5.9}} + \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} \underbrace{|||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1}|||_1^2}_{\text{Lemma 5.8}} \\
&\leq \quad \left(1-\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right) \min\left\{1, c^2\left(1-\mu\left(\underline{z}_l^{k,1}\right)\right)\right\} |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1}|||_1^2 + \\
&\qquad + \eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k,1}|||_1^2 \leq \\
\overset{\text{Lemma 5.8}}{\leq} \quad &\left[\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} + \left(1-\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right) \min\left\{1, c^2(1-\underbrace{\mu\,(\underline{z}_l^{k,1})}_{0\,\leq\,\mu}\,)\right\}\right] \left(\underbrace{\mu\,(\underline{z}_l^{k,1})}_{\mu\,<\,1}\right)^{2\nu} |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k}|||_1^2 \leq \\
\leq \max_{0\,\leq\,\mu\,\leq\,1} &\left\{\mu^{2\nu}\left[\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}} + \left(1-\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}\right) \min\left\{1, c^2\,(1-\mu)\right\}\right]\right\} |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k}|||_1^2.
\end{aligned}
$$

- **Damit haben wir das folgende Lemma bewiesen ($\boldsymbol{l \mapsto q}$):**

Lemma 5.10:

Vor.: Es seien die Voraussetzungen der Lemmata 5.5, 5.8 und 5.9 erfüllt.

Bh.: Dann gilt für die Multigrid–Rate die Rekursion

$$
(5.34) \quad \left\{
\begin{aligned}
\eta_1 \quad &= \quad 0 \quad \text{(bei exakter Lsg. des GS auf gröbstem Gitter)}, \\
\eta_q^2 \quad &= \quad \max_{0\,\leq\,\mu\,\leq\,1}\left\{\mu^{2\nu}\left[\eta_{q-1}^{2\gamma_{q-1}} + \left(1-\eta_{q-1}^{2\gamma_{q-1}}\right)\min\left\{1, c^2\,(1-\mu)\right\}\right]\right\}, \\
q \quad &= \quad 2, 3, \ldots, l,
\end{aligned}
\right.
$$

mit der positiven Konstante c aus Lemma 5.9.

■ **Bemerkung 5.11:**

1. Für MBsp. 2 aus Kapitel 1 (vgl. auch Bemerkung 5.4) ergibt sich die Konstante c zu:
$$\begin{aligned} c^2 &= 4 \cdot 1 \cdot (0.5086)^2\, 1^2 \cdot 8 / \left(\tfrac{1}{24} \cdot 1\right) = 198.662, \text{ d.h.} \\ c &\approx 14. \end{aligned}$$

2. Aus der Rekursionsformel (5.34) erhalten wir für $\nu = 2$ folgende MG–Raten η_l:

c \ l	$\gamma_q = \gamma = 1\ \forall\, q:$ V – Zyklus									W – Zyklus
	2	3	4	5	6	7	8	9	∞	∞
$c = 0.5$	.1432	.174	.189	.199	.205	.210	.214	0.217	0.243	0.1437
$c = 1$	.2868	.340	.366	.382	.392	.400	.406	.410	0.448	
$c = 14$									0.9901	

■ **Mit Hilfe von Lemma 5.10 können wir nun sofort den folgenden Satz beweisen:**

Satz 5.12:

Vor.: Es seien die Voraussetzungen aus Pkt. 5.1 erfüllt, d.h. (5.2), reguläre Triangulation, $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{F}(\Delta)$ und (5.4) mit $\omega_q = \theta / \bar{c}_E\, h_q^{d-2}$ bzw. $\omega_q = \theta / \lambda_{\max}(K_q)$, $\theta \in (0, 1]$ fixiert.

Bh.: Dann gilt die Fehlerabschätzung

(5.35) $|||\underline{u}_l - \underline{u}_l^{k+1}|||_1 \leq \eta_l\, |||\underline{u}_l - \underline{u}_l^k|||_1$

und

(5.36) $$\|M_l\|_{K_l} := \sup_{\underline{v}_l \in \mathbb{R}^{N_l} \setminus \mathbf{O}} \frac{|||M_l\, \underline{v}_l|||_1}{|||\underline{v}_l|||_1} \leq \eta_l \leq \eta_* := \left(\frac{c^2}{c^2 + 2\nu}\right)^{1/2} < 1$$

für beliebige Anzahl $\nu \geq 1$ an Vorglättungsschritten und beliebiges Zyklenregime $\{\gamma_q\}_{q=\overline{2,l-1}}$ mit $\gamma_q \geq 1 \quad \forall\, q = \overline{2, l-1}$ (einschließlich dem reinen V–Zyklus: $\gamma_q = 1\ \ \forall\, q = \overline{2, l-1}$), wobei $c = 2\, \mu_2^{0.5}\, \bar{a}_{1,2}\, c_K\, \bar{c}_E^{0.5}\, \underline{c}_0^{-0.5}\, \theta^{-0.5}$ (vgl. Satz 5.3).

<u>**Beweis:**</u> ($\curvearrowright$ induktiv unter Benutzung von Lemma 5.10)

- $l = 1$: $\curvearrowright$ $\eta_1 = 0 \leq \left(\dfrac{c^2}{c^2 + 2\nu}\right)^{1/2}$

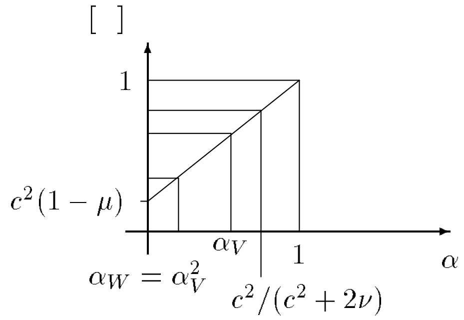
  exakte Lösung des Problems auf dem gröbsten Gitter bzw. wenigstens näherungsweise Lösung mit der relativen Genauigkeit $\left(\frac{c^2}{c^2+2\nu}\right)^{1/2}$!

- Für den Schluß von $l-1$ (bzw. $q-1$) auf l (bzw. q) nehmen wir an, daß gilt:

$$\eta_{l-1}^2 \leq c^2/(c^2 + 2\nu). \tag{5.37}$$

- Dann folgt aus Lemma 5.10:

$$\eta_l^2 \;=\; \max_{0 \leq \mu \leq 1} \left\{\mu^{2\nu}\Big[\underbrace{\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}}_{=\alpha} + \Big(1 - \underbrace{\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}}_{=\alpha}\Big) \min\left\{1, c^2\,(1-\mu)\right\}\Big]\right\} \leq$$



$$\leq \max_{0 \leq \mu \leq 1} \left\{\mu^{2\nu}\left[\eta_{l-1}^2 + \left(1 - \eta_{l-1}^2\right) \min\left\{1, c^2\,(1-\mu)\right\}\right]\right\} \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq \mu \leq 1} \left\{\mu^{2\nu}\left[\frac{c^2}{c^2+2\nu} + \left(1 - \frac{c^2}{c^2+2\nu}\right) c^2\,(1-\mu)\right]\right\} =$$

$$= \frac{c^2}{c^2+2\nu}\underbrace{\max_{0 \leq \mu \leq 1}\left\{\mu^{2\nu}\left[1 + 2\nu\,(1-\mu)\right]\right\}} = \frac{c^2}{c^2+2\nu}\,.$$

$= 1$ und wird bei $\mu = 1$ angenommen (mms), da
$\{\ldots\}' = 2\,\nu\,\mu^{2\nu-1}\,[1 + 2\,\nu\,(1-\mu)] - \mu^{2\nu}\,2\,\nu = 0$
bei $\mu = 0$ und $\mu = 1$.

q.e.d.

■ **Bemerkung 5.12:**

1. Für das Zweigitterverfahren ($\eta_{l-1}=0$) und für ein Multigrid–Verfahren mit einem beliebigen Zyklenregime $\{\gamma_q\}_{q=\overline{2,l-1}}$ ($\gamma_q \geq 1 \;\; \forall q$) gilt gemäß Satz 5.11 die V–Zyklus–Abschätzung

$$\|M_l\|_{K_l} := \sup_{\underline{v}_l \in \mathbb{R}^{N_l}\setminus \boldsymbol{O}} \frac{|||M_l \,\underline{v}_l|||_1}{|||\underline{v}_l|||_1} \leq \eta_l \leq \left(\frac{c^2}{c^2+2\,\nu}\right)^{1/2} < 1.$$

Allerdings kann diese Abschätzung unter Benutzung der Rekursionsformel (5.34) aus Lemma 5.10 für $\gamma_q > 1$ verbessert werden, z.B. erhält man für das Zweigitterverfahren ($\eta_{l-1}^{2\gamma_{l-1}}=0$, d.h. formal $\gamma_{l-1}=\infty$!) sofort die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|M_l^{l-1}\|_{K_l}^2 &\leq \sigma_* := \max_{0\leq\mu\leq 1} \{\mu^{2\nu}\,\min\{1, c^2\,(1-\mu)\}\} \overset{c\geq 1}{=} \\
&= \max\left\{\max_{0\leq\mu\leq\frac{c^2-1}{c^2}} \mu^{2\nu},\; \max_{\frac{c^2-1}{c^2}\leq\mu\leq 1} \{\mu^{2\nu}\,(1-\mu)\,c\}\right\} = \\
&= \begin{cases} \max\left\{\left(\frac{c^2-1}{c^2}\right)^{2\nu}, \underline{\left(\frac{2\,\nu}{1+2\,\nu}\right)^{2\nu}\frac{c^2}{1+2\,\nu}}\right\} & \text{, falls } 1+2\,\nu \geq c^2, \\ \left(\frac{c^2-1}{c^2}\right)^{2\nu} & \text{, falls } 1+2\,\nu \leq c^2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Zweigitterraten (mms):

c \ ν	1	2	3	5	10	20	80
0.5							
1	0.3849	0.0716					
14	0.9899	0.9800		0.9508	0.9040	0.8172	0.4500

2. Berücksichtigt man Vor– und Nachglättung:

$$S_q^{(\text{pre})} = (I_q - \omega_q\,K)^\nu \quad \text{und} \quad S_q^{(\text{post})} = (I_q - \omega_q\,K)^\nu,$$

d.h. die Anzahl der Vor– und Nachglättungsschritte ist gleich, dann gilt:

$$\|M_q^{q-1}\|_{K_q} = \|\bar{M}_q^{q-1}\|_{K_q}^2 \leq \frac{c^2}{c^2+2\,\nu}.$$

mit $\bar{M}_q^{q-1} = \hat{C}_q^{q-1}\,S_q^\nu$, da

$$M_q^{q-1} = \left(\bar{M}_q^{q-1}\right)^*\,\bar{M}_q^{q-1} = S_q^\nu\,\left(\hat{C}_q^{q-1}\right)^*\,\hat{C}_q^{q-1}\,S_q^\nu = S_q^\nu\,\hat{C}_q^{q-1}\,S_q^\nu,$$

weil $\hat{C}_q^{q-1}$ ein Orthoprojektor bzgl. des energetischen Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)_{K_q} := (K_q\,\cdot,\cdot)$ ist.

3. Ein Überblick über die entwickelten Theorien zur Abschätzung der Multigrid-Konvergenzrate wird in [49] gegeben.

Kapitel 6

Multigrid–Präkonditionierer

6.1 Zur Vorkonditionierungsproblematik

- **Btr. im $I\!R^N$ lineares Gleichungssystem der Form**

(1) Ges. $\underline{u} \in I\!R^N : K\underline{u} = \underline{f}$ in $I\!R^N$,

das bei der Diskretisierung einer symmetrischen, elliptischen RWA zweiter Ordnung mittels **<u>FEM</u>** oder FDM entstanden sei. Dann kann die Systemmatrix K als symmetrisch und positiv definit (spd: $K = K^T > 0$) vorausgesetzt werden. Weitere Eigenschaften von (1) sind (vgl. Kap. 1 dieser Vorlesung und NUMERIK II [33]):

1. $N = O(h^{-d})$, h – Diskretisierungsparameter,
   d – Ortsdimension ($\Omega \subset I\!R^d$):
   $\curvearrowright$ großdimensioniert (in praxi: $10^4, \ldots, 10^7$) !
2. NNE $= O(h^{-d})$ $\curvearrowright$ schwach besetzt !
3. BW $= O(h^{-(d-1)})$!
4. $\kappa(K) := \lambda_{\max}(K)/\lambda_{\min}(K) = O(h^{-2})$ $\curvearrowright$ schlecht konditioniert !

- **Lösen (1) durch das Verfahren der <u>einfachen Iteration</u> (Richardson–Verfahren):**

(2)

<u>Anfangsnäherung:</u> $\underline{u}^0 \in I\!R^N$ geg.;
<u>Iteration:</u> $j = 0, 1, \ldots$

$$\frac{\underline{u}^{j+1} - \underline{u}^j}{\tau} + K\underline{u}^j = \underline{f}$$

1. $\underline{d}^j = \underline{f} - K\underline{u}^j$,
   <u>if</u> $\|\underline{d}^j\| \le \varepsilon \|\underline{d}^0\|$ <u>then</u> STOP;
2. $\underline{w}^j = \underline{d}^j$;
3. $\underline{u}^{j+1} = \underline{u}^j + \tau \underline{w}^j$;

- **Die <u>Konvergenzgeschwindigkeit</u> des Iterationsverfahrens (2) ist abhängig von den <u>Spektraleigenschaften</u> der Matrix $\boldsymbol{K}$.**

Dazu betrachten wir die Spektraläquivalenzungleichungen

$$(3) \qquad \underline{\gamma}_I\,(\underline{v},\underline{v}) \le (K\underline{v},\underline{v}) \le \bar{\gamma}_I\,(\underline{v},\underline{v}) \quad \forall\, \underline{v} \in I\!R^N,$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\gamma}_I\, I \le K \le \bar{\gamma}_I I,$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\gamma}_I \le \lambda_{\min}(K) = \min_{\underline{v}\,\in\, I\!R^N \setminus \{\boldsymbol{O}\}} \frac{(K\underline{v},\underline{v})}{(\underline{v},\underline{v})}\,,$$

$$\bar{\gamma}_I \ge \lambda_{\max}(K) = \max_{\underline{v}\,\in\, I\!R^N \setminus \{\boldsymbol{O}\}} \frac{(K\underline{v},\underline{v})}{(\underline{v},\underline{v})}\,,$$

wobei I – die Einheitsmatrix und $(\cdot,\cdot)$ – das gewöhnliche Euklidische Skalarprodukt bezeichnen. Aus (3) folgt sofort:

$$\kappa(K) := \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)} \le \bar{\gamma}_I/\underline{\gamma}_I.$$

Betrachten nun den Fehler

$$\underline{z}^j = \underline{u} - \underline{u}^j$$

der j–ten Iterierenden, wobei $\underline{u}$ die Lösung von (1) ist.

Aus dem Fehlerschema (mms)

$$\underline{z}^j = (I-\tau K)\,\underline{z}^{j-1},$$
$$K^{\frac{s}{2}}\underline{z}^j = K^{\frac{s}{2}}\,(I-\tau K)\,\underline{z}^{j-1} \ge (I-\tau K)\,K^{\frac{s}{2}}\underline{z}^{j-1}$$

erhalten wir dann sofort die Fehlerabschätzungen

$$(4) \qquad |||\underline{z}^j|||_s \le \rho^j\, |||\underline{z}^0|||_s \text{ für } s = 0,1,2,\ldots \quad (\forall\, s \in I\!R\,!),$$

mit $|||\underline{v}|||_s := \|\underline{v}\|_{K^s} \equiv (K^s\,\underline{v},\underline{v})^{0.5}$, $\|\underline{v}\| \equiv |||\underline{v}|||_0 \equiv \|\underline{v}\|_I \equiv (\underline{v},\underline{v})^{0.5}$,

$$\underbrace{\|I-\tau K\|}_{} \;=\; |||I-\tau K|||_s \;=\; \max\{|1-\tau\lambda_{\min}(K)|, |1-\tau\lambda_{\max}(K)|\}$$

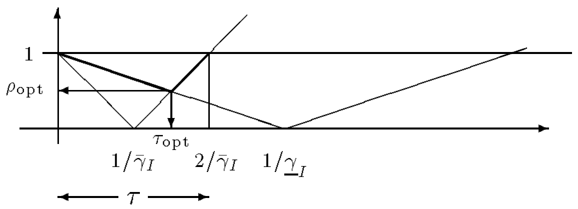
= Spektralnorm $\boxed{\text{Ü 6.1}}$

= Spektralradius von $I-\tau K$ $\qquad \le \quad \rho := \underline{\max}\,\{|1-\tau\,\underline{\gamma}_I|, |1-\tau\bar{\gamma}_I|\} < 1.$

↑

K spd

für $0 < \tau < 2/\bar{\gamma}_I$.



Btr. Fehlerabschätzung (4) für

$s=0$:	$\|\underline{u}-\underline{u}^j\| \le \rho^j \|\underline{u}-\underline{u}^0\|$	$\curvearrowright$ praktisch nicht überprüfbar !
$s=1$:	$\|\underline{u}-\underline{u}^j\|_K \le \rho^j \|\underline{u}-\underline{u}^0\|_K$	$\curvearrowright$ praktisch nicht überprüfbar !
$s=2$:	$\|\underline{u}-\underline{u}^j\|_{K^2} \le \rho^j \|\underline{u}-\underline{u}^0\|_{K^2}$	$\curvearrowright$ praktisch auswertbar !
	$\|\underline{f}-K\underline{u}^j\| \le \rho^j \|\underline{f}-K\underline{u}^0\|$	$\longmapsto$ Defektnorm !

Für die optimale Parameterwahl

$$\tau_{\mathrm{opt}} = 2/(\underline{\gamma}_I + \bar{\gamma}_I)$$

erhalten wir die bestmögliche Konvergenzrate

$$\rho_{\mathrm{opt}} = \frac{\bar{\gamma}_I - \underline{\gamma}_I}{\bar{\gamma}_I + \underline{\gamma}_I} = \frac{1-\xi_1}{1+\xi_1}, \text{ mit } \xi_1 = \frac{\underline{\gamma}_I}{\bar{\gamma}_I} \underset{\uparrow}{\overset{\le}{=}} \frac{1}{\kappa(K)} = O(h^2).$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\gamma}_I &\overset{\le}{=} \lambda_{\min}(K) \\ \bar{\gamma}_I &\overset{\ge}{=} \lambda_{\max}(K) \end{aligned}}$$

- $\boxed{\textbf{Ü 6.1}}$ Man zeige die Identität

$$|||I-\tau K|||_s := \sup_{\underline{v} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\boldsymbol{O}\}} \frac{|||(I-\tau K)\,\underline{v}|||_s}{|||\underline{v}|||_s} =$$

$$\overset{!!}{=} \|I-\tau K\| \overset{!}{=} \max\{|1-\tau\lambda_{\max}(K)|, |1-\tau\lambda_{\min}(K)|\}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$!

- **<u>Resultate:</u>**

1. $I(\varepsilon)$:= Anzahl der Iterationen $(\rho^{I(\varepsilon)} \le \varepsilon) =$

   $= [|\ln\varepsilon^{-1}/\ln\rho^{-1}|] \overset{\text{(mms)}}{=} O(\underline{\kappa(K)}\ln\varepsilon^{-1}) = O(h^{-2}\ln\varepsilon^{-1}),\ \ominus$

   mit $[|x|] :=$ kleinste ganze Zahl $\ge x$,

   $\varepsilon \in (0,1)$ – relative Genauigkeit (z.B. $\varepsilon = 10^{-t}$);

2. Q_I = Aufwand pro Iterationsschritt =

   $= Q(K \times \underline{u}^j, \underline{d}^j = \underline{f} - K\underline{u}^j, \underline{u}^{j+1} = \underline{u}^j + \tau\underline{w}^j) =$

   $= O(h^{-d}) \approx N;\ \oplus$

3. $Q(\varepsilon)$ = Gesamtaufwand = $\underline{\underline{I(\varepsilon)}} \times Q_I = O(h^{-d-2}\ln\varepsilon^{-1})$!

- **Idee: Reduktion der Iterationszahlen durch Präkonditionierung C:**

Btr. anstelle von (2) die präkonditionierte (vorkonditionierte) Methode der einfachen Iteration

(5) $$C\,\frac{\underline{u}^{j+1}-\underline{u}^{j}}{\tau}+K\underline{u}^{j}=\underline{f} \qquad \begin{array}{l} 1.\ \underline{d}^{j}=\underline{f}-K\underline{u}^{j} \\ 2.\ C\underline{w}^{j}=\underline{d}^{j}\ \text{(Präkonditionierung)} \\ 3.\ \underline{u}^{j+1}=\underline{u}^{j}+\tau\underline{w}^{j} \end{array}$$

mit $j=0,1,\ldots;\ \underline{u}^0\in I\!R^N$ – geg. Startnäherung und geg. spd Präkonditionierer $C=C^T>0$.

- **Mit der Substitution**

(6) $$\underline{u}^{j}=C^{-0.5}\underline{v}^{j}$$

wird (5) äquivalent zum Iterationsverfahren

(7) $$\frac{\underline{v}^{j+1}-\underline{v}^{j}}{\tau}+C^{-0.5}KC^{-0.5}\underline{v}^{j}=C^{-0.5}\underline{f}.$$

Damit entspricht (7) dem Verfahren der einfachen Iteration (2) mit der Matrix $C^{-0.5}KC^{-0.5}$ anstelle von K und der rechten Seite $C^{-0.5}\underline{f}$ anstelle von $\underline{f}$.

Folglich gelten auch alle oben genannten Resultate in entsprechend modifizierter Form:

1. $I(\varepsilon)=O(\kappa(\mathbf{C^{-0.5}KC^{-0.5}})\ln\varepsilon^{-1})=[|\ln\varepsilon^{-1}/\ln\rho^{-1}|]$ mit $\rho=\max\{|1-\tau\underline{\gamma}_C|,|1-\tau\bar{\gamma}_C|\}$ und den positiven Spektraläquivalenzkonstanten $\underline{\gamma}_C$ und $\bar{\gamma}_C$ aus den Spektraläquivalenzungleichungen ($\hat{=}$ EWP: $K\underline{v}=\lambda C\underline{v}$)

   (8) $$\underline{\gamma}_C(C\underline{v},\underline{v})\le(K\underline{v},\underline{v})\le\bar{\gamma}_C(C\underline{v},\underline{v})\quad\forall\,\underline{v}\in I\!R^N;$$

2. $Q_I=Q(K\times\underline{u}^j,\underline{d}^j=\underline{f}-K\underline{u}^j,\mathbf{C\underline{w}^j}=\mathbf{\underline{d}^j},\underline{u}^{j+1}=\underline{u}^j+\tau\underline{w}^j)=$
   $=O(h^{-d})+\mathbf{Q}(\mathbf{C^{-1}}*\mathbf{\underline{d}^j});$

3. $Q(\varepsilon)=O(\kappa(\mathbf{C^{-0.5}KC^{-0.5}})\,Q(\ldots\mathbf{C^{-1}}*\mathbf{\underline{d}^j}\ldots)\ln\varepsilon^{-1}).$

Darüberhinaus gelten für (7) die Fehlerabschätzungen (4) mit $C^{-0.5}KC^{-0.5}$ anstelle von K. Mit der Substitution (6) erhalten wir für das Iterationsverfahren (5) die Fehlerabschätzungen

(9) $$\|\underline{u}-\underline{u}^j\|_{(s)}\le\rho^j\|\underline{u}-\underline{u}^0\|_{(s)}$$

mit

$$\|\underline{v}\|_{(s)}:=\|\underline{v}\|_{C^{0.5}(C^{-0.5}KC^{-0.5})^sC^{0.5}}\ .$$

Damit ergibt sich aus (9) für

$s = 0$:	$\|\underline{u} - \underline{u}^j\|_C \leq \rho^j \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_C$	$\hookrightarrow$ praktisch nicht überprüfbar !
$s = 1$:	$\|\underline{u} - \underline{u}^j\|_K \leq \rho^j \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_K$	$\hookrightarrow$ praktisch nicht überprüfbar !
$s = 2$:	$\|\underline{u} - \underline{u}^j\|_{KC^{-1}K} \leq \rho^j \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_{KC^{-1}K}$	$\hookrightarrow$ praktisch auswertbar !

$$\Updownarrow$$

$$(10) \qquad \boxed{(\underline{w}^j, \underline{d}^j) \leq \underbrace{\rho^{2j}}_{\leq \varepsilon^2} (\underline{w}^0, \underline{d}^0)} \qquad \underline{w}^j := C^{-1} * \underline{d}^j$$

- **Aus den oben dargelegten Resultaten ergeben sich folgende Forderungen an die Wahl des spd Präkonditionierers $C = C^T > 0$:**

(11)

1. Forderung: Das Präkonditionierungssystem

$$C\underline{w}^j = \underline{d}^j$$

sollte schnell auflösbar sein, da es in jedem Iterationsschritt gelöst werden muß:
$\hookrightarrow$ möglichst: $Q(C^{-1} * \underline{d}^j) = O(h^{-d})$!

2. Forderung: $\kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5}) \equiv \kappa(C^{-1}K) \ll \kappa(K)$:
$\hookrightarrow$ möglichst: $\kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5}) = O(1)$ für $h \to 0$!

- **Extremfälle:**

  - $C = I$: 1. Forderung ist optimal erfüllt, aber 2. Forderung nicht !
  - $C = K$: 2. Forderung ist optimal erfüllt ($\kappa(C^{-0.5}KC^{-0.5}) = 1$ $\hookrightarrow$ 1 Iteration für $\tau = 1$), aber 1. Forderung nicht !

- **Ges.: Kompromiß zwischen 1. und 2. Forderung:**

$$I \longleftarrow C \longrightarrow K$$

1970 ff 1972 ff 1979 1983 ff 1985 ff 1986, 1990

$\underbrace{\text{. . . SSOR . . . IC . . . MIC}}_{\text{[JL [29], Nu II [33]]}}$ . . . MGM . . . DD $\underbrace{\text{Multilevel (HB, BPX) . . . ASM/MSM}}$

MGM $\downarrow$ Pkt. 6.2 $\Downarrow$ MG-Präkonditionierer

DD $\downarrow$ WS 96/97

Multilevel (HB, BPX) . . . ASM/MSM $\downarrow$ Kap. 7 $\Downarrow$ Multilevel-Präkonditionierer

- **Bemerkungen:**

1. Zusätzliche Forderungen an Präkonditionierer sind:
   - Unabhängigkeit der Konditionszahl $\kappa(C^{-1}K)$ von „schlechten“ Parametern, wie: Koeffizientensprünge, Netzgraduierungen etc.
   - Parallelisierbarkeit der Operation $C^{-1} * \underline{d}^j$.

2. In der Praxis wird zur Auflösung von (1) in erster Linie das präkonditionierte konjugierte Gradientenverfahren zur Konvergenzbeschleunigung benutzt (siehe Pkt. 6.3)
   Englisch: Preconditioned Conjugate Gradient method = PCG.

3. Auch in vielen anderen iterativen Verfahren werden spd Präkonditionierer C, die den Forderungen (11) genügen, benötigt (siehe Pkt. 6.4).

6.2 Konstruktion von Präkonditionierern mittels Multigrid–Techniken

- Wir setzen nun voraus, daß die **spd Matrix** $\boldsymbol{K \equiv K_l}$ durch **FEM– oder FDM–Diskretisierung** eines elliptischen Differentialoperators bei entsprechenden Randbedingungen auf dem feinsten Gitter einer Folge von Gittern entstanden sei oder daß eine Technik zur Erzeugung „gröberer“ Gitter zur Verfügung steht (z.B. AMG = Algebraic Multi-Grid).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hspace{10cm}}^{\text{Hilfsgitter}}} \\
 & & \text{feinstes Gitter} & & \multicolumn{4}{c}{\xrightarrow{\hspace{3cm}\text{AMG}\hspace{2cm}}} & \text{gröbstes Gitter} \\
 & & h_l & < & h_{l-1} & < \ldots < & h_q & < \ldots < & h_1 \\
\text{z.B.} & \text{FEM} & & & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & & & \\
\boxed{\text{RWA}} & \longrightarrow & K_l & \leftarrow & \left[\; K_{l-1} \right. & \xleftarrow{\text{FMGM}} \ldots \longleftarrow & K_q & \xleftarrow{\text{FMGM}} \ldots \longleftarrow & \left. K_1 \;\right] \\
 & \uparrow & & & & & & & \\
 & \text{FDM} & \parallel \text{z.B.} & & \parallel \text{z.B.} & & & & \\
 & \text{MGM} \rightarrow & B_l & \stackrel{\text{z.B.}}{\longrightarrow} & B_{l-1} \stackrel{\text{z.B.}}{:=} I_l^{l-1} B_l I_{l-1}^l & \rightarrow \ldots \rightarrow & B_q & \xrightarrow{\text{Galerkin}} \ldots \longrightarrow & B_1 \\
 & & \uparrow & \multicolumn{6}{l}{\text{A-priori–Präkonditionierer (Regularisator)}}
\end{array}
$$

Der spd A-priori–Präkonditionierer $B_l = B_l^T > 0$ sei spektraläquivalent zu K_l mit h_l–unabhängigen, positiven Spektraläquivalenzkonstanten $\underline{\gamma}_B$ und $\bar{\gamma}_B$:

(12) $\qquad \underline{\gamma}_B \, B_l \;\leq\; K_l \;\leq\; \bar{\gamma}_B \, B_l,$

wobei standardmäßig $B_l = K_l$ angenommen wird und somit $\underline{\gamma}_B = \bar{\gamma}_B = 1$ ist !!

- **Konstruieren auf den Hilfsgittern $\{h_{l-1}, \overrightarrow{\cdots}, h_1\}$ spd A-priori–Präkonditionierer B_q, $q = \overline{1, l-1}$:**

Dies kann nach verschiedenen Methoden geschehen, z.B.:

1. Durch Galerkinsche Projektionstechnik (= Standard):

(13) $\quad B_{q-1} = I_q^{q-1}\, B_q\, I_{q-1}^q$ $\underline{\text{for}}$ $q = l$ $\underline{\text{step}}$ (-1) $\underline{\text{until}}$ 2.

Hierbei sind:

$$\begin{array}{llll} I_{q-1}^q : \mathbb{R}^{N_{q-1}} & \longmapsto & \mathbb{R}^{N_q} & - \text{ Prolongationsoperatoren,} \\ I_q^{q-1} : \mathbb{R}^{N_q} & \longmapsto & \mathbb{R}^{N_{q-1}} & - \text{ Restriktionsoperatoren.} \end{array}$$

2. Durch Übernahme der ursprünglichen, z.B. durch primären FMGM–Zugang berechneten Steifigkeitsmatrizen
$$B_q \;=\; K_q, \quad q = \overline{1, l}.$$

3. Es gibt viele weitere Möglichkeiten, z.B. Konstruktion von zu K_q spektraläquivalenten Matrizen B_q auf allen Hilfsgittern durch Einfrieren der Koeffizienten, durch topologische Äquivalenzen etc.

Wir bemerken, daß für die 2. Konstruktionsmöglichkeit ($B_q = K_q \;\; \forall\; q = \overline{1, l}$) nichtnotwendig (13) gilt, z.B. wenn die Matrizen K_q mit Hilfe der numerischen Integration berechnet werden. Oft können aber die Integrationsformeln so gewählt werden, daß zumindestens die Energieungleichungen

(14) $\quad I_q^{q-1}\, K_q\, I_{q-1}^q \;\le\; K_{q-1}$

für $q = \overline{2, l}$ gelten.

- **Lösen nun „A-priori–Präkonditionierungssystem"**

(15) $\quad B_l\, \underline{w}_l \;=\; \underline{d}_l$

auf dem feinsten Gitter näherungsweise durch k ($k = 1, 2$) Multigrid–Zyklen mit dem Startvektor $\underline{w}_{l,0} = \boldsymbol{O}$ und erhalten

(16) $\quad \underline{w}_{l,k} \;=\; B_{l,k}^{-1} * \underline{d}_l$

anstelle der exakten Lösung $\underline{w}_l = B_l^{-1}\, \underline{d}_l$ von (15). Dann gilt offenbar (vgl. Pkt. 4.3.1 bzw. ($\downarrow$))

(17) $\quad B_{l,k}^{-1} \;=\; (I_l - (M_l)^k)\, B_l^{-1},$

wobei $I_l \;\; : \mathbb{R}^{N_l} \longmapsto \mathbb{R}^{N_l}$ – Einheitsoperator und
$\qquad M_l : \mathbb{R}^{N_l} \longmapsto \mathbb{R}^{N_l}$ – Multigrid–Iterationsoperator

sind. Der Multigrid–Iterationsoperator wird entsprechend den Überlegungen aus Pkt. 4.3.1

durch die folgenden Beziehungen rekursiv definiert ($\tau_q = 1,\ \ \gamma_{q-1} = \gamma$):

$$(18)\qquad \begin{cases} M_2 = M_2^1 = S_2^{(\text{post})}(I_2 - I_1^2\, B_1^{-1}\, I_2^1\, B_2)\, S_2^{(\text{pre})}, \\ M_q = S_q^{(\text{post})}(I_q - I_{q-1}^q\, (I_{q-1} - (M_{q-1})^{\gamma})\, B_{q-1}^{-1}\, I_q^{q-1}\, B_q)\, S_q^{(\text{pre})}, \\ q \ \ = \overline{3, l}, \end{cases}$$

wobei $S_q^{(\text{pre})} = \left(S_q^{(V)}\right)^{\nu_V} : I\!R^{N_q} \longmapsto I\!R^{N_q}$ – (linearer) Fehlerübergangsoperator des Vorglättungsiterationsprozesses,

$S_q^{(\text{post})} = \left(S_q^{(N)}\right)^{\nu_N} : I\!R^{N_q} \longmapsto I\!R^{N_q}$ – (linearer) Fehlerübergangsoperator des Nachglättungsiterationsprozesses,

γ – Anzahl der Multigrid–Zyklen auf den Hilfsgittern:
$\gamma = 1$ (V–Zyklus), $\gamma = 2$ (W–Zyklus).

Die Darstellung (17) folgt sofort aus den Beziehungen

$$\underline{w}_l - \underline{w}_{l,k} = (M_l)^k\, (\underline{w}_l - \underbrace{\underline{w}_{l,0}}_{= \boldsymbol{O}})$$

$$\underline{w}_{l,k} = (I_l - (M_l)^k)\, \underline{w}_l = \underbrace{(I_l - (M_l)^k)\, B_l^{-1}}_{=:\, B_{l,k}^{-1}}\, \underline{d}_l$$

$$\underline{w}_l = B_l^{-1}\, \underline{d}_l$$

Hinreichend und notwendig für die Konvergenz des Multigrid–Verfahrens ist die Bedingung $\rho\,(M_l) :=$ Spektralradius $(M_l) < 1$. Dann folgt aus dem Satz von Banach (siehe [32], Numerik I, Satz 2.5), daß $\exists\ (I_l - (M_l)^k)^{-1}$. Also erhalten wir aus (17) für den <u>eigentlichen</u> (a-posteriori) <u>Präkonditionierer</u> $C = B_{l,k}$ die Darstellung

$$(19)\qquad C_l \ \equiv\ B_{l,k} \ =\ B_l\, (I_l \ -\ (M_l)^k)^{-1}.$$

■ **<u>Frage:</u>** Unter welchen Bedingungen erfüllt $C_l \equiv B_{l,k}$ die <u>Forderungen</u> an einen Präkonditionierer ?

? 0. C_l spd, d.h. $C_l = C_l^T > 0$,

o.k. 1. Präkonditionierungssystem
$C_l\, \underline{w}_l = \underline{d}_l \quad \widehat{=} \quad B_{l,k}\, \underline{w}_{l,k} = \underline{d}_l$
muß schnell (d.h. $Q\, (C_l^{-1} * \underline{d}_l) = O\, (N_l)$) auflösbar sein !

? 2. $\exists\ \underline{\gamma}_C, \bar{\gamma}_C = \text{const.} > 0 : \underline{\gamma}_C\, C_l \le K_l \le \bar{\gamma}_C\, C_l$ (8)
mit $\bar{\gamma}_C / \underline{\gamma}_C$ so klein wie nur möglich !

Bedeutet die Anwendung von k MG–Zyklen auf das „A-priori“–Präkonditionierungssystem (15) $B_l\, \underline{w}_l = \underline{d}_l$ mit Startnäherung $\underline{w}_{l,0} = \boldsymbol{O}$!

<u>Aufwand:</u> $Q\, (\underline{w}_{l,k}) = B_{l,k}^{-1}\, \underline{d}_l = O\, (N_l) = O\, (h_l^{-d})$! $\quad (k = 1, 2)$
(siehe Pkt. 4.3.3)

■ Standardvoraussetzung an das Multigrid–Verfahren zur Lösung des „A-priori–Präkonditionierungssystems“ $B_l\, \underline{w}_l = \underline{d}_l$:

(i) Der A-priori–Präkonditionierer B_l sei **spd**, und es gelten die A-priori–Spektraläquivalenz–Ungleichungen

$$(12) \qquad \underline{\gamma}_B\, B_l \;\le\; K_l \;\le\; \bar{\gamma}_B\, B_l.$$

(ii) Die entsprechenden Hilfsoperatoren B_q, $q = \overline{1, l-1}$, seien ebenfalls **spd**.

(iii) Der Nachglättungsfehlerübergangsoperator $S_q^{(\text{post})}$ ist adjungiert zum Vorglättungsfehlerübergangsoperator $S_q^{(\text{pre})}$ im B_q–energetischen Skalarprodukt $(\underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} := (B_q\, \underline{u}_q, \underline{v}_q)_q$, d.h. für $q = \overline{2, l}$ gilt:

$$(20) \qquad \left(S_q^{(\text{post})}\underline{u}_q, \underline{v}_q\right)_{B_q} = \left(\underline{u}_q, S_q^{(\text{pre})}\underline{v}_q\right)_{B_q} \quad \forall\, \underline{u}_q, \underline{v}_q \in \mathbb{R}^{N_q},$$

vgl. auch Satz 6.7. Im Zeichen: $S_q^{(\text{post})} = \left(S_q^{(\text{pre})}\right)^{*B_q}$.

(iv) Der Restriktionsoperator I_q^{q-1} ist transponiert (= adjungiert im Euklidischen Skalarprodukt) zum Prolongationsoperator I_{q-1}^q; d.h. $I_{q-1}^q = (I_q^{q-1})^T \equiv (I_q^{q-1})^{*I_q}$, d.h.

$$(21) \qquad (I_q^{q-1}\, \underline{v}_q, \underline{v}_{q-1})_{q-1} = (\underline{v}_q, I_{q-1}^q\, \underline{v}_{q-1})_q \quad \forall\, \underline{v}_q \in \mathbb{R}^{N_q} \quad \forall\, \underline{v}_{q-1} \in \mathbb{R}^{N_{q-1}}$$

für $q = \overline{2, l}$, wobei $(\cdot,\cdot)_q := (\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^{N_q}}$ das Euklidische Skalarprodukt bezeichnet. Im weiteren werden die Indizes q bzw. $\mathbb{R}^{N_q}$ auch weggelassen.

■ Lemma 6.1:

Vor.: M_l sei selbstadjungiert im B_l–energetischen Skalarprodukt, d.h. $M_l = M_l^{*B_l}$, d.h.

$$(22) \qquad (M_l\, \underline{u}_l, \underline{v}_l)_{B_l} = (\underline{u}_l, M_l\, \underline{v}_l)_{B_l} \quad \forall\, \underline{u}_l, \underline{v}_l \in \mathbb{R}^{N_l},$$

mms (da $M_l = M_l^{*B_l}$)
$\downarrow$
und $\rho\,(M_l) = \|M_l\|_{B_l} < 1$.

Bh.: Dann ist der „A-posteriori“–Präkonditionierer

$$C_l \equiv B_{l,k} := B_l\,(I_l - (M_l)^k)^{-1}$$

symmetrisch.

Beweis:

Die folgenden Beziehungen sind offenbar zu (22) äquivalent:

$$\begin{aligned}
(22) \quad &\Longleftrightarrow \quad (B_l\, M_l\, \underline{u}_l, \underline{v}_l) = (B_l\, \underline{u}_l, M_l\, \underline{v}_l) \quad \forall\, \underline{u}_l, \underline{v}_l \in I\!R^{N_l} \\
&\Longleftrightarrow \quad (B_l\, M_l\, \underline{u}_l, \underline{v}_l) = (M_l^T\, B_l\, \underline{u}_l, \underline{v}_l) \quad \forall\, \underline{u}_l, \underline{v}_l \in I\!R^{N_l} \\
&\Longleftrightarrow \quad B_l\, M_l = M_l^T\, B_l \quad \Longleftrightarrow \quad M_l\, B_l^{-1} = B_l^{-1}\, M_l^T \quad (*).
\end{aligned}$$

Zeigen nun, daß $B_{l,k}^{-1}$ symmetrisch ist. Tatsächlich:

$$\begin{aligned}
(B_{l,k}^{-1})^T &= B_l^{-1}\,(I_l - (M_l^k)^T) = B_l^{-1}\,(I_l - (M_l^T)^k) = \\
&= B_l^{-1} - B_l^{-1}\, \underbrace{M_l^T \cdot \ldots \cdot M_l^T}_{k \text{ mal}} \underset{(*)}{=} B_l^{-1} - M_l\, B_l^{-1}\, \underbrace{M_l^T \cdot \ldots \cdot M_l^T}_{(k-1) \text{ mal}} = \\
&\overset{(*)}{=} B_l^{-1} - (M_l)^k\, B_l^{-1} = (I_l - (M_l)^k)\, B_l^{-1} = B_{l,k}^{-1}.
\end{aligned}$$

Nun gilt (mms):

$$B_{l,k}^{-1} \text{ symmetrisch} \quad \Longleftrightarrow \quad B_{l,k} \text{ symmetrisch.}$$

q.e.d.

■ **Lemma 6.2:**

Vor.: 1) $B_q = B_q^T$ p.d. $\quad \forall\, q = \overline{1, l}$;

2) (iii) $S_q^{(\text{post})} = \left(S_q^{(\text{pre})}\right)^{*B_q} \quad \forall\, q = \overline{2, l}$;

3) (iv) $I_q^{q-1} = (I_{q-1}^q)^T \quad \forall\, q = \overline{2, l}$.

Bh.: Dann ist der Multigrid–Iterationsoperator M_q selbsadjungiert im B_q–energetischen Skalarprodukt, d.h. $M_q = (M_q)^{*B_q}$, für alle $q = \overline{2, l}$.

Beweis:

- Zeigen zunächst, daß der Zweigitteriterationsoperator

$$M_q^{q-1} = S_q^{(\text{post})}\,(I_q - I_{q-1}^q\, B_{q-1}^{-1}\, I_q^{q-1}\, B_q)\, S_q^{(\text{pre})}$$

für alle $q = \overline{2, l}$ selbstadjungiert im B_q–energetischen Skalarprodukt ist. Tatsächlich,

$$\begin{aligned}
(M_q^{q-1}\, \underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} &= \left(S_q^{(\text{post})}\,(I_q - I_{q-1}^q\, B_{q-1}^{-1}\, I_q^{q-1}\, B_q)\, S_q^{(\text{pre})}\, \underline{u}_q, \underline{v}_q\right)_{B_q} = \\
&= \left(S_q^{(\text{post})}\, I_q\, S_q^{(\text{pre})}\, \underline{u}_q, \underline{v}_q\right)_{B_q} - \left(S_q^{(\text{post})}\, I_{q-1}^q\, B_{q-1}^{-1}\, I_q^{q-1}\, B_q\, S_q^{(\text{pre})}\, \underline{u}_q, \underline{v}_q\right)_{B_q} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(iii)}}{=} \left(\underline{u}_q, S_q^{(\text{post})} S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} - \left(I_{q-1}^q B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} = \\
&= \left(\underline{u}_q, S_q^{(\text{post})} S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} - \left(\overbrace{B_q I_{q-1}^q B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1}} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_q = \\
&= \left(\underline{u}_q, S_q^{(\text{post})} S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} - \left(S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, I_{q-1}^q B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} = \\
&= \left(\underline{u}_q, S_q^{(\text{post})} I_q S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} - \left(\underline{u}_q, S_q^{(\text{post})} I_{q-1}^q B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} = \\
&= \left(\underline{u}_q, S_q^{(\text{post})} (I_q - I_{q-1}^q B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q) S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} = (\underline{u}_q, M_q^{q-1} \underline{v}_q)_{B_q} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, \underline{u}_q, \underline{v}_q \in I\!R^{N_q}. \qquad \#
\end{aligned}
$$

- Zeigen nun <u>induktiv</u>, daß auch die Multigrid–Iterationsoperatoren M_q $(q = \overline{2,l})$ im B_q–energetischen Skalarprodukt selbstadjungiert sind. Für $q = 2$ gilt diese Aussage offensichtlich, da $M_2 = M_2^1$. Sei nun M_{q-1} selbstadjungiert im B_{q-1}–energetischen Skalarprodukt. Zeigen, daß dann diese Aussage auch für M_q im B_q–energetischen Skalarprodukt richtig ist:

$$
\begin{aligned}
&(M_q \underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} = \\
&= \left(S_q^{(\text{post})} (I_q - I_{q-1}^q B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q) S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, \underline{v}_q\right)_{B_q} + \\
&\qquad\qquad + \left(S_q^{(\text{post})} I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, \underline{v}_q\right)_{B_q} = \\
&= (M_q^{q-1} \underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} + \left(I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} = \\
&= (M_q^{q-1} \underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} + \left(B_q I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_q =
\end{aligned}
$$

$$
M_q^{q-1} = (M_q^{q-1})^{*B_q}; \quad M_{q-1} = (M_{q-1})^{*B_{q-1}} \Longleftrightarrow M_{q-1} B_{q-1}^{-1} = B_{q-1}^{-1} M_{q-1}^T \quad (\uparrow)
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\underline{u}_q, M_q^{q-1} \underline{v}_q)_{B_q} + \left(B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_q = \\
&= (\underline{u}_q, M_q^{q-1} \underline{v}_q)_{B_q} + \left(S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{v}_q\right)_{B_q} =
\end{aligned}
$$

$$= (\underline{u}_q, M_q^{q-1}\,\underline{v}_q)_{B_q} + \left(\underline{u}_q, S_q^{(\text{post})}\, I_{q-1}^q\, (M_{q-1})^\gamma\, B_{q-1}^{-1}\, I_q^{q-1}\, B_q\, S_q^{(\text{pre})}\,\underline{v}_q\right)_{B_q} =$$

$$= (\underline{u}_q, M_q\,\underline{v}_q)_{B_q} \qquad \forall\ \underline{u}_q, \underline{v}_q \in I\!R^{N_q}.$$

q.e.d.

■ Satz 6.3:

Vor.: 1) Es gelten die Standardvoraussetzungen (i) – (iv):

(i) $B_l = B_l^T$ p.d.: (12) $\underline{\gamma}_B\, B_l \le K_l \le \bar{\gamma}_B\, B_l$;

(ii) $B_q = B_q^T$ p.d. $\forall\ q = \overline{1, l-1}$;

(iii) $S_q^{(\text{post})} = \left(S_q^{(\text{pre})}\right)^{*B_q} \quad \forall\ q = \overline{2, l}$;

(iv) $I_q^{q-1} = (I_{q-1}^q)^T \quad \forall\ q = \overline{2, l}$.

2) Für den Multigrid–Iterationsoperator M_l gelte die Abschätzung

(23) $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{mms}}}{\rho\,(M_l) \equiv} \|M_l\|_{B_l} := \sup_{\substack{\underline{v}_l \in I\!R^{N_l} \\ \underline{v}_l \ne \boldsymbol{O}}} \frac{\|M_l\,\underline{v}_l\|_{B_l}}{\|\underline{v}_l\|_{B_l}} \le \eta = \text{const.} < 1$$

(Lemma 6.2: $M_l = M_l^{*B_l}$)

mit einer von h_l unabhängigen Konstanten (= Multigrid–Rate) $\eta \in [0,1)$ (siehe Pkt. 4.3).

Bh.: Dann ist der MG–Präkonditionierer (13)

$$C_l = B_{l,k} \equiv B_l\,(I_l - (M_l)^k)^{-1}$$

symmetrisch und positiv definit.
Außerdem gelten die Spektraläquivalenzungleichungen

(8) $$\underline{\gamma}_C\, C_l \le K_l \le \bar{\gamma}_C\, C_l$$

mit den Spektraläquivalenzkonstanten

(24) $$\underline{\gamma}_C = \underline{\gamma}_B\,(1 - \eta^k) \text{ und } \bar{\gamma}_C = \begin{cases} \bar{\gamma}_B\,(1 + \eta^k)\ , & \text{falls } k - \text{ungerade}, \\ \bar{\gamma}_B & , \text{falls } k - \text{gerade}. \end{cases}$$

Beweis:

- Vor. 1) (i) – (iv) $\Longrightarrow M_l = M_l^{*B_l} \Longrightarrow B_{l,k} = B_{l,k}^T$ #

$$\underset{\text{Lemma 6.2}}{\uparrow} \qquad\qquad \underset{\text{Lemma 6.1}}{\uparrow}$$

- Aus $M_l = M_l^{*B_l}$ erhalten wir sofort die folgenden weiteren Aussagen:

1. M_l ist symmetrisierbar, d.h. M_l kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in eine symmetrische Matrix überführt werden. Tatsächlich: $B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5}$ ist symmetrisch !

   mms:

$$
\begin{aligned}
M_l = M_l^{*B_l} \iff\ & (B_l\, M_l\, \underline{u}_l, \underline{v}_l)_l = (B_l\, \underline{u}_l, M_l\, \underline{v}_l)_l \quad \forall\, \underline{u}_l, \underline{v}_l \in \mathbb{R}^{N_l},\\
\iff\ & (B_l\, M_l\, B_l^{-0.5}\, \underline{y}_l, B_l^{-0.5}\, \underline{z}_l)_l = (B_l\, B_l^{-0.5}\, \underline{y}_l, M_l\, B_l^{-0.5}\, \underline{z}_l)_l\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, \underline{y}_l, \underline{z}_l \in \mathbb{R}^{N_l},\\
\uparrow\ & \text{Substitution: } \underline{u}_l = B_l^{-0.5}\, \underline{y}_l, \ \ \underline{v}_l = B_l^{-0.5}\, \underline{z}_l\\
\iff\ & (B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5}\, \underline{y}_l, \underline{z}_l)_l = (\underline{y}_l, B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5}\, \underline{z}_l)_l \quad \forall\, \underline{y}_l, \underline{z}_l \in \mathbb{R}^{N_l},\\
\iff\ & B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5} = (B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5})^T \qquad \#
\end{aligned}
$$

2. Folglich hat M_l genau N_l (nichtnotwendig verschiedene) reelle EW, und die dazugehörigen EV bilden im B_l–energetischen Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{B_l}$ ein orthogonales EV–Basissystem im $\mathbb{R}^{N_l}$ ($\curvearrowright$ vollständiges ONS !!):

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{EW:} & \mu_i = \mu_i\,(M_l) & = & \mu_i\,(B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5}), & i = \overline{1, N_l};\\
\text{EV:} & \psi_l^{(i)} & = & B_l^{-0.5}\, \underline{\varphi}_l^{(i)}, & i = \overline{1, N_l}.
\end{array}
$$

3. $\rho\,(M_l) \equiv$ Spektralradius $(M_l) =$

$$
\begin{aligned}
\underset{M_l = M_l^{*B_l}}{\overset{\uparrow}{=}}\ & \|M_l\|_{B_l} := \sup_{\underline{v}_l} \frac{\|M_l\, \underline{v}_l\|_{B_l}}{\|\underline{v}_l\|_{B_l}} \underset{\underline{v}_l = B_l^{-0.5}\, \underline{w}_l}{\overset{\uparrow}{=}} \sup_{\underline{w}_l} \frac{\|B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5}\, \underline{w}_l\|}{\|\underline{w}_l\|} =\\
=\ & \|B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{0.5}\|_{I_l\ \text{(Spektralnorm)}} \overset{\substack{B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5}\ \text{sym.}\\ \downarrow}}{=}\\
=\ & \max\,\{|\mu| : \mu = \mu\,(B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5}) \overset{\substack{\text{Spektrum}\\ \downarrow}}{\in} \sigma\,(B_l^{0.5}\, M_l\, B_l^{-0.5})\} =\\
& \qquad\qquad\quad |||\\
=\ & \max\,\{|\mu| : \mu = \mu\,(M_l) \in \sigma\,(M_l)\} =: \rho\,(M_l).
\end{aligned}
$$

4. Aus (23) $\rho\,(M_l) = \|M_l\|_{B_l} \le \eta < 1$ folgt sofort:

   (25) $\qquad -\eta \ \le\ \underset{\text{EW}}{\mu\,(M_l)} \ \le\ \eta.$

- Wegen der Voraussetzung (i) $\underline{\gamma}_B\, B_l \le K_l \le \bar{\gamma}_B\, B_l$ (12) benötigen wir nur noch die Spektraläquivalenzungleichungen

  $$\underline{\gamma}_{\mathrm{MG}}\, B_{l,k} \le B_l \le \bar{\gamma}_{\mathrm{MG}}\, B_{l,k} \quad (\curvearrowright \underline{\gamma}_C = \underline{\gamma}_{\mathrm{MG}}\, \underline{\gamma}_B \text{ und } \bar{\gamma}_C = \bar{\gamma}_{\mathrm{MG}}\, \bar{\gamma}_B),$$

  die äquivalent zum folgenden verallgem. EWP (verallgem. Rayleigh–Quot.) sind:

  $$B_l\, \underline{\varphi}_l = \lambda\, B_{l,k}\, \underline{\varphi}_l \ \curvearrowright\ \underline{\gamma}_{\mathrm{MG}} \le \lambda_{\min} := \min_{\underline{v}_l} \frac{(B_l\, \underline{v}_l, \underline{v}_l)_l}{(B_{l,k}\, \underline{v}_l, \underline{v}_l)_l},$$

  $$\bar{\gamma}_{\mathrm{MG}} \ge \lambda_{\max} := \max_{\underline{v}_l} \frac{(B_l\, \underline{v}_l, \underline{v}_l)_l}{(B_{l,k}\, \underline{v}_l, \underline{v}_l)_l}.$$

  Nun gilt offenbar:

  $$\begin{aligned}
  B_l\, \underline{\varphi}_l = \lambda\, B_{l,k}\, \underline{\varphi}_l \quad &\Longleftrightarrow \quad B_l\, \underline{\varphi}_l = \lambda\, B_l\, (I_l - (M_l)^k)^{-1}\, \underline{\varphi}_l \\
  &\Longleftrightarrow \quad (I_l - (M_l)^k)\, \underline{\varphi}_l = \lambda\, \underline{\varphi}_l \\
  &\Longleftrightarrow \quad M_l^k\, \underline{\varphi}_l = (1-\lambda)\, \underline{\varphi}_l \\
  &\Longleftrightarrow \quad M_l\, \underline{\varphi}_l = \mu\, \underline{\varphi}_l \text{ mit } \lambda = 1 - \mu^k \\
  &\Longleftrightarrow \quad \lambda_{\min} = 1 - \max_{\mu \in \sigma(M_l)} \mu^k \ge \underline{\gamma}_{\mathrm{MG}} = 1 - \eta^k \\
  & \quad \lambda_{\max} = 1 - \min_{\mu \in \sigma(M_l)} \mu^k \le \bar{\gamma}_{\mathrm{MG}} = \begin{cases} 1 + \eta^k\ , & k - \text{ungerade}, \\ \quad 1 \quad\ , & k - \text{gerade}, \end{cases}
  \end{aligned}$$

  wobei $\sigma(M_l) = \{\mu : \mu \text{ ist EW von } M_l\} = \text{Spektrum } (M_l) \in [-\eta, +\eta]$.

  Folglich gilt:

  $$\begin{aligned}
  \underline{\gamma}_C &= \underline{\gamma}_B\, \underline{\gamma}_{\mathrm{MG}} = \underline{\gamma}_B\, (1 - \eta^k), \\
  \bar{\gamma}_C &= \bar{\gamma}_B\, \bar{\gamma}_{\mathrm{MG}} = \bar{\gamma}_B \begin{cases} 1 + \eta^k\ , & k - \text{ungerade}, \\ \quad 1 \quad\ , & k - \text{gerade}. \end{cases}
  \end{aligned}$$

q.e.d.

Bemerkung 6.4:

1. Aus dem Beweis von Satz 6.3 (vgl. EW–Abschätzung (25)) ergibt sich sofort eine allgemeinere Aussage:

   Vor.: 1) Es seien die Standardvoraussetzungen (i) – (iv) erfüllt.

   2) Es gelten die Ungleichungen (! $M_l = M_l^{*B_l}$)

   $$-\eta_1\,(\underline{u}_l,\underline{u}_l)_{B_l} \le (M_l\,\underline{u}_l,\underline{u}_l)_{B_l} \le \eta_2\,(\underline{u}_l,\underline{u}_l)_{B_l} \quad \forall\ \underline{u}_l \in \mathbb{R}^{N_l}.$$

   $$\left[\begin{array}{lccccc} \Leftrightarrow & -\eta_1\,(\underline{v}_l,\underline{v}_l)_l & \le & (B_l^{0.5} M_l\,B_l^{-0.5}\,\underline{v}_l,\underline{v}_l)_l & \le & \eta_2\,(\underline{v}_l,\underline{v}_l)_l \ \ \forall\ \underline{v}_l \in \mathbb{R}^{N_l} \\ \Leftrightarrow & -\eta_1 & \le & \mu\,(M_l) & \le & \eta_2 \\ & & & \| & & \\ & & & \mu\,(B_l^{0.5}\,M_l\,B_l^{-0.5}) & & \\ & & & \text{EW} & & \end{array}\right]$$

   mit nichtnegativen Konstanten $\eta_1,\ \eta_2 \in [0,1)$.

   Bh.: Dann gelten die Aussagen von Satz 6.3 mit

   $$\underline{\gamma}_C = \underline{\gamma}_B\,(1-\eta_2^k) \text{ und } \overline{\gamma}_C = \begin{cases} \overline{\gamma}_B\,(1+\eta_1^k), & \text{falls } k - \text{ungerade}, \\ \overline{\gamma}_B, & \text{falls } k - \text{gerade}. \end{cases}$$

2. Die Aussagen von Satz 6.3 und Bemerkung 6.4.1 gelten für ein beliebiges lineares, stationäres Iterationsverfahren zur Lösung des A-priori–Präkonditionierungssystems (15), wenn nur der entsprechende Iterationsoperator selbstadjungiert im B_l–energetischen Skalarprodukt ist.

3. In [10] (Braess/Peisker, 1986) wird das folgende Resultat gezeigt:

   Vor.: 1) B_q – regulär, $\forall\ q = \overline{1,l}$;

   2) Abschätzung in der Spektralnorm:

   $$\|M_l\|_{I_l} = \sup_{\underline{v}_l \in \mathbb{R}^{N_l} \setminus \{\boldsymbol{O}\}} \frac{\|M_l\,\underline{v}_l\|}{\|\underline{v}_l\|} \le \eta_I = \text{const.} < 1.$$

   Bh.: Dann gelten die Spektraläquivalenzungleichungen:

   $$(1-\eta_I^k)^2 B_{l,k}\,B_{l,k}^T \le B_l\,B_l^T \le (1+\eta_I^k)^2 B_{l,k}\,B_{l,k}^T.$$

<u>**Beweis:**</u>

$\|B_{l,k}^{-1}\,\underline{v}_l\| = \|B_l^{-1}\,\underline{v}_l - M_l^k\,B_l^{-1}\,\underline{v}_l\| \ \substack{\le \\ \ge}\ \|B_l^{-1}\,\underline{v}_l\| \pm \|M_l\|_{I_l}^k\,\|B_l^{-1}\,\underline{v}_l\| \quad \forall\,\underline{v}_l \in I\!R^{N_l},$

$(1-\eta_I^k)\,\|B_l^{-1}\,\underline{v}_l\| \le \|B_{l,k}^{-1}\,\underline{v}_l\| \le (1+\eta_I^k)\,\|B_l^{-1}\,\underline{v}_l\| \quad \forall\,\underline{v}_l \in I\!R^{N_l},$

$(1-\eta_I^k)^2\,B_l^{-T}\,B_l^{-1} \le B_{l,k}^{-T}\,B_{l,k}^{-1} \le (1+\eta_I^k)^2\,B_l^{-T}\,B_l^{-1}$

$$\boxed{B_l^{-T}\,B_l^{-1},\ B_{l,k}^{-T}\,B_{l,k}^{-1}\ \text{– spd}} \rightarrow \Big\Updownarrow \leftarrow \boxed{\begin{array}{ll} \underline{\text{Vor.:}} & A, B\ \text{– spd} \\ \underline{\text{Bh.:}} & \underline{\gamma}A^{-1} \le B^{-1} \le \overline{\gamma}A^{-1} \\ & \qquad\Updownarrow \\ & \underline{\gamma}B \quad \le A \ \le \overline{\gamma}B \end{array}} \qquad \begin{array}{l} \underline{\text{Bew.:}}\ \text{(mms)} \\ B^{-1}\underline{v} = \lambda\,A^{-1}\underline{v} \\ \qquad\Updownarrow \\ A\underline{u} \quad = \lambda B\underline{u} \end{array}$$

$(1-\eta_I^k)^2\,B_{l,k}\,B_{l,k}^T \le B_l\,B_l^T \le (1+\eta_I^k)^2\,B_{l,k}\,B_{l,k}^T$ #

<u>Anwendungen:</u>

(a) Gemischte FEM–Schemata für PDgl. 4. Ordnung (siehe [10], [31])

(b) Nichtsymmetrische Probleme: $K_l^T\,\underline{u}_l = \underline{f}_l \Leftrightarrow K_l\,K_l^T\,\underline{u}_l = K_l\,\underline{f}_l$:

- A-priori–Präkond.: $\underline{\gamma}_B\,B_l\,B_l^T \le K_l\,K_l^T \le \overline{\gamma}_B\,B_l\,B_l^T$ z.B. $B_l = K_l \curvearrowright \underline{\gamma}_B = \overline{\gamma}_B = 1$;
- MG–Präkond.: $\underline{\gamma}_B\,(1-\eta_I^k)^2\,B_{l,k}\,B_{l,k}^T \le K_l\,K_l^T \le \overline{\gamma}_B\,(1+\eta_I^k)^2\,B_{l,k}\,B_{l,k}^T$;
- MG–PCG auf $K_l\,K_l^T\,\underline{u}_l = K_l\,\underline{f}_l$ mit Präkonditionierer $C_l = B_{l,k}\,B_{l,k}^T$ anwenden (vgl. Pkt. 6.3).

(c) Unter der Voraussetzung 1) des Satzes 6.3 folgt die Bh. des Satzes mit $\eta = \eta_I$. Tatsächlich, für spd Matrizen A und B gilt:

Aus $\underline{\delta}^2\,B^2 \le A^2 \le \overline{\delta}^2\,B^2 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\delta}\,B \le A \le \overline{\delta}B \quad$ (mms).

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht ($\exists$ Gegenbeispiele) !

■ Die **Spektraläquivalenzkonstante** $\bar{\gamma}_C = \bar{\gamma}_B\,(1+\eta^k)$ in (8) aus Satz 6.3 kann offenbar auch für ungerade k (praktisch interessant ist vor allem $k = 1$!) <u>verbessert</u> werden, falls die Nichtnegativität des Multigrid–Iterationsoperators M_l im B_l–energetischen Skalarprodukt gezeigt werden kann (siehe Beweis von Satz 6.3 bzw. Bem. 6.4.1) ! Das ist z.B. der Fall, wenn die A-priori–Präkonditionierer B_q $(q = \overline{1, l-1})$ mittels Galerkin–Technik bestimmt werden.

Satz 6.5:

Vor.: 1) (i) $B_l = B_l^T$ p.d.: (12) $\underline{\gamma}_B \, B_l \le K_l \le \bar{\gamma}_B \, B_l$;

2) (ii) $B_q = B_q^T$ p.d. $\quad \forall \, q = \overline{1, l-1}$;

Galerkin–Technik 3) (iii) $S_q^{(\mathrm{post})} = \left(S_q^{(\mathrm{pre})}\right)^{*B_q} \quad \forall \, q = \overline{2, l}$;

4) (iv) $I_q^{q-1} = (I_{q-1}^q)^T \quad \forall \, q = \overline{2, l}$;

5) I_q^{q-1} = Vollrangmatrizen ($\curvearrowright I_q^{q-1} \, I_{q-1}^q$ p.d.) $\quad \forall \, q = \overline{2, l}$;

„=„6) $I_q^{q-1} \, B_q \, I_{q-1}^q \le B_{q-1} \quad \forall \, q = \overline{2, l}$;

7) Für den Multigrid–Iterationsoperator M_l gelte die Abschätzung (23)

$$\rho\,(M_l) \equiv \|M_l\|_{B_l} := \sup_{\substack{\underline{v}_l \in I\!R^{N_l} \\ \underline{v}_l \neq \boldsymbol{O}}} \frac{\|M_l \, \underline{v}_l\|_{B_l}}{\|\underline{v}_l\|_{B_l}} \le \eta = \mathrm{const.} < 1$$

mit einer von h_l unabhängigen MG–Rate $\eta \in [0,1)$.

Bh.: Dann ist der MG–Präkonditionierer $C_l = B_{l,k} \equiv B_l \, (I_l - (M_l)^k)^{-1}$ symmetrisch und positiv definit. Außerdem gelten die Spektraläquivalenzungleichungen (8)

$$\underline{\gamma}_C \, C_l \le K_l \le \bar{\gamma}_C \, C_l$$

mit den Spektraläquivalenzkonstanten $\underline{\gamma}_C = \underline{\gamma}_B \, (1 - \eta^k)$ und $\bar{\gamma}_C = \bar{\gamma}_B$, unabhängig davon, ob k gerade oder ungerade ist.

Beweis:

Wir zeigen, daß unter den Voraussetzungen von Satz 6.5 die (äquivalenten) Ungleichungen

$$\text{(26)} \quad (M_l \, \underline{u}_l, \underline{u}_l)_{B_l} \ge 0 \quad \forall \, \underline{u}_l \in I\!R^{N_l} \qquad [\Leftrightarrow \mu\,(M_l) \ge 0]$$

$$\Updownarrow \longleftarrow \underline{u}_l = B_l^{-0.5} \, \underline{v}_l \qquad \| \, \mathrm{EW}$$

$$(B_l^{0.5} \, M_l \, B_l^{-0.5} \, \underline{v}_l, \underline{v}_l)_l \ge 0 \quad \forall \, \underline{v}_l \in I\!R^{N_l} \qquad [\Leftrightarrow \mu\,(B_l^{0.5} \, M_l \, B_l^{-0.5}) \ge 0]$$

gelten. Dann folgen die Aussagen von Satz 6.5 unmittelbar aus dem Beweis von Satz 6.3 (vgl. auch Bem. 6.4.1). Wir haben folglich zu zeigen, daß der MG–Iterationsoperator M_l im B_l–energetischen Skalarprodukt nichtnegativ ist und folglich keine negativen Eigenwerte hat:

1. **Zeigen:** $(M_q^{q-1}\,\underline{u}_q,\underline{u}_q)_{B_q} \geq 0 \quad \forall\,\underline{u}_q \in I\!R^{N_q} \quad \forall\, q=\overline{2,l}.$

Führen zunächst die folgenden Operatoren ein:

$$Q_q := I_{q-1}^q\, B_{q-1}^{-1}\, I_q^{q-1}\, B_q, \qquad P_q = I_q - Q_q = B_q^{q-1},$$

$$\neq \text{ i. a.}$$

$$\widetilde{Q}_q := I_{q-1}^q\,(I_q^{q-1}\,B_q\,I_{q-1}^q)^{-1}\,I_q^{q-1}\,B_q, \quad \widetilde{P}_q = I_q - \widetilde{Q}_q = \widetilde{B}_q^{q-1}.$$

Dann gilt:

1) $M_q^{q-1} = S_q^{(\text{post})}\,(I_q - Q_q)\,S_q^{(\text{pre})} = S_q^{(\text{post})}\,P_q\,S_q^{(\text{pre})}.$

2) $(M_q^{q-1}\,\underline{u}_q,\underline{u}_q)_{B_q} \geq (\tilde{M}_q^{q-1}\,\underline{u}_q,\underline{u}_q)_{B_q} \quad \forall\,\underline{u}_q \in I\!R^{N_q},$
mit $\tilde{M}_q^{q-1} = S_q^{(\text{post})}\,(I_q - \widetilde{Q}_q)\,S_q^{(\text{pre})} = S_q^{(\text{post})}\,\widetilde{P}_q\,S_q^{(\text{pre})}.$

Tatsächlich, wegen Vor. 6) gilt:

$$(M_q^{q-1}\underline{u}_q,\underline{u}_q)_{B_q} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{(iii)}}}{=} \left(S_q^{(\text{post})}S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q,\underline{u}_q\right)_{B_q} - \left(I_{q-1}^q B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q, S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q\right)_{B_q} =$$

$$\overset{\substack{\text{(i), (ii), (iv)}\\ \downarrow}}{=} \left(S_q^{(\text{post})}S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q,\underline{u}_q\right)_{B_q} - \left(B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q, I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q\right)_q$$

Vor. 6): $I_q^{q-1}B_qI_{q-1}^q \leq B_{q-1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{(i), (ii), (iv), Vor. 5)}}}{\overset{\text{(mms)}}{\Longleftrightarrow}} B_{q-1}^{-1} \leq (I_q^{q-1}B_qI_{q-1}^q)^{-1}$ ($\curvearrowright$ spd)

$$\geq \left(S_q^{(\text{post})}S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q,\underline{u}_q\right)_{B_q} - \left((I_q^{q-1}B_q\,I_{q-1}^q)^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q, I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})}\underline{u}_q\right)_q =$$

$$= (\tilde{M}_q^{q-1}\,\underline{u}_q,\underline{u}_q)_{B_q} \quad \forall\,\underline{u}_q \in I\!R^{N_q}. \qquad \#$$

3) $\widetilde{Q}_q$ ist Orthoprojektor im B_q–energetischen Skalarprodukt und folglich auch der zugehörige Coprojektor $\widetilde{P}_q = I_q - \widetilde{Q}_q$ (= Grobgitterkorrekturoperator des Zweigitterverfahrens mit Galerkin-projizierter Grobgittermatrix), d.h., es gilt:
   a) $\widetilde{Q}_q^2 = \widetilde{Q}_q$ und $\widetilde{Q}_q = \widetilde{Q}_q^{*B_q}$,
   b) $\widetilde{P}_q^2 = \widetilde{P}_q$ und $\widetilde{P}_q = \widetilde{P}_q^{*B_q}$.

Tatsächlich,

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_q^2 &= I_{q-1}^q \underbrace{(I_q^{q-1} B_q I_q^{q-1})^{-1} \cdot I_q^{q-1} B_q \cdot I_{q-1}^q}_{=I_q} (I_q^{q-1} B_q I_q^{q-1})^{-1} I_q^{q-1} B_q = \\ &= I_{q-1}^q I_q (I_q^{q-1} B_q I_q^{q-1})^{-1} I_q^{q-1} B_q = \widetilde{Q}_q,\end{aligned}$$

$$(\widetilde{Q}_q \underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} = (I_{q-1}^q (I_q^{q-1} B_q I_q^{q-1})^{-1} I_q^{q-1} B_q \underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} =$$

$I_q^{q-1} B_q I_{q-1}^q$ ist spd, wegen Vor. (i), (ii), (iv), 5) !

$$= (B_q \underline{u}_q, I_{q-1}^q (I_q^{q-1} B_q I_q^{q-1})^{-1} I_q^{q-1} B_q \underline{v}_q)_q =$$

$$= (\underline{u}_q, \widetilde{Q}_q \underline{v}_q)_{B_q} \quad \forall\, \underline{u}_q, \underline{v}_q \in I\!R^{N_q}. \quad \#$$

Aus 3) folgt nun unmittelbar

$$\begin{aligned}(\tilde{M}_q^{q-1} \underline{u}_q, \underline{u}_q)_{B_q} &= \left(S_q^{(\mathrm{post})} \widetilde{P}_q S_q^{(\mathrm{pre})} \underline{u}_q, \underline{u}_q\right)_{B_q} = \\ &\overset{(\mathrm{iii})}{=} \left(\widetilde{P}_q \underbrace{S_q^{(\mathrm{pre})} \underline{u}_q}_{=\underline{w}_q}, \underbrace{S_q^{(\mathrm{pre})} \underline{u}_q}_{=\underline{w}_q}\right)_{B_q} = \\ &\overset{\widetilde{P}_q=\widetilde{P}_q^2}{=} \left(\widetilde{P}_q^2 \underline{w}_q, \underline{w}_q\right)_{B_q} = \left(\widetilde{P}_q \underline{w}_q, \widetilde{P}_q^{*B_q} \underline{w}_q\right)_{B_q} = \\ &\overset{\widetilde{P}_q^{*B_q}=\widetilde{P}_q}{=} \left(\widetilde{P}_q \underline{w}_q, \widetilde{P}_q \underline{w}_q\right)_{B_q} = \\ &= \left\|\widetilde{P}_q S_q^{(\mathrm{pre})} \underline{u}_q\right\|_{B_q}^2 \geq 0 \quad \forall\, \underline{u}_q \in I\!R^{N_q}.\end{aligned}$$

Wegen 2) gilt damit

$$(M_q^{q-1} \underline{u}_q, \underline{u}_q)_{B_q} \geq (\tilde{M}_q^{q-1} \underline{u}_q, \underline{u}_q)_{B_q} \geq 0 \quad \forall\, \underline{u}_q \in I\!R^{N_q} \quad \forall\, q = \overline{2,l}. \qquad \#$$

2. **<u>Zeigen nun induktiv:</u>** $(M_q \underline{u}_q, \underline{u}_q)_{B_q} \geq 0 \quad \forall\, \underline{u}_q \in I\!R^{N_q} \quad \forall\, q = \overline{2,l}.$

- $q = 2:\ M_2 = M_2^1 \curvearrowright (M_2 \underline{u}_2, \underline{u}_2)_{B_2} \geq 0 \quad \forall\, \underline{u}_2 \in I\!R^{N_2}$ (siehe 1.).
- Sei nun M_{q-1} nichtnegativ, d.h.

(27) $$(M_{q-1} \underline{u}_{q-1}, \underline{u}_{q-1})_{B_{q-1}} \geq 0 \quad \forall\, \underline{u}_{q-1} \in I\!R^{N_{q-1}}.$$

- Zeigen diese Eigenschaft nun auch für

$$\begin{aligned} M_q &= S_q^{(\text{post})} \left(I_q - I_{q-1}^q \left(I_{q-1} - (M_{q-1})^\gamma \right) B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q \right) S_q^{(\text{pre})} = \\ &= M_q^{q-1} + S_q^{(\text{post})} I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \\ &\ \text{o.k.} \end{aligned}$$

Verbleibt zu zeigen:

$$\left(S_q^{(\text{post})} I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, \underline{u}_q \right)_{B_q} \geq 0 \quad \forall\, \underline{u}_q \in I\!R^{N_q}.$$

Tatsächlich,

$$\left(S_q^{(\text{post})} I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, \underline{u}_q \right)_{B_q} =$$

$$\stackrel{\text{(i) - (iv)}}{=} \left(I_{q-1}^q (M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q \right)_{B_q} =$$

$$= \left((M_{q-1})^\gamma B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q, I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q \right)_q =$$

$$\stackrel{\text{(i), (ii)}}{=} \Big(B_{q-1} (M_{q-1})^\gamma \underbrace{B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q}_{=\underline{w}_{q-1}}, \underbrace{B_{q-1}^{-1} I_q^{q-1} B_q S_q^{(\text{pre})} \underline{u}_q}_{=\underline{w}_{q-1}} \Big)_q =$$

$$= \left((M_{q-1})^\gamma \underline{w}_{q-1}, \underline{w}_{q-1} \right)_{B_{q-1}} =$$

$$= \begin{cases} \|(M_{q-1})^j \underline{w}_{q-1}\|_{B_{q-1}}^2 & \geq 0 \quad \text{für } \gamma = 2j - \text{gerade}, \\ (M_{q-1} (M_{q-1})^j \underline{w}_{q-1}, (M_{q-1})^j \underline{w}_{q-1})_{B_{q-1}} & \geq 0 \quad \text{für } \gamma = 2j+1 - \text{ungerade}. \end{cases}$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{M_{q-1} = (M_{q-1})^{*B_q} \text{ und } (M_{q-1} \underline{w}_{q-1}, \underline{v}_{q-1})_{B_{q-1}} \geq 0 \quad \forall\, \underline{v}_{q-1} \in I\!R^{N_{q-1}}}$$

q.e.d.

- **Der folgende Satz gibt eine Klasse von Glättungsverfahren an, für die die Standardvoraussetzung (iii) $\boldsymbol{S_q^{(\text{post})} = \left(S_q^{(\text{pre})}\right)^{*B_q}}$ erfüllt ist.**

<u>**Satz 6.6:**</u>

<u>Vor.:</u> Die Vor- und Nachglättungsiterationsoperatoren $S_q^{(\text{pre})}$ und $S_q^{(\text{post})}$ seien von der Form

(28) $$S_q^{(\text{pre})} = (I_q - \omega_q\, A_q^{-1}\, B_q)^{\nu_V} \text{ und } S_q^{(\text{post})} = (I_q - \omega_q\, A_q^{-T}\, B_q)^{\nu_N}$$

mit $\nu_V = \nu_N = \nu_q$, wobei A_q ein invertierbarer, nichtnotwendig symmetrischer „Präkonditionierer“ für die Glättungsiterationsverfahren sei.

<u>Bh.:</u> Dann ist $S_q^{(\text{post})}$ adjungiert zu $S_q^{(\text{pre})}$ im B_q–energetischen Skalarprodukt.

<u>**Beweis:**</u>

1. $$((I_q - \omega\, A_q^{-1}\, B_q)\, \underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} = (\underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} - \omega_q\, (B_q\, A_q^{-1}\, B_q\, \underline{u}_q, \underline{v}_q)_q =$$
$$\overset{(\text{i}),\,(\text{ii})}{=} (\underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} - \omega_q\, (B_q\, \underline{u}_q, A_q^{-T}\, B_q\, \underline{v}_q)_q =$$
$$= (\underline{u}_q, (I_q - \omega_q\, A_q^{-T}\, B_q)\, \underline{v}_q)_{B_q} \quad \forall\, \underline{u}_q, \underline{v}_q \in I\!R^{N_q}.$$

2. $$\left(S_q^{(\text{pre})}\, \underline{u}_q, \underline{v}_q\right)_{B_q} = ((I_q - \omega_q\, A_q^{-1}\, B_q)^{\nu_q}\, \underline{u}_q, \underline{v}_q)_{B_q} =$$
$$= (\underline{u}_q, \underbrace{(I_q - \omega_q\, A_q^{-T}\, B_q)^{\nu_q}}_{=\left(S_q^{(\text{pre})}\right)^{*B_q} = S_q^{(\text{post})}}\, \underline{v}_q)_{B_q} \quad \forall\, \underline{u}_q, \underline{v}_q \in I\!R^{N_q}.$$

↗ ν_q-mal 1. anwenden

q.e.d.

- <u>**Bemerkung 6.7:**</u>

Im Rahmen von Satz 6.6 lassen sich alle üblichen „linearen“ Glättungsiterationsverfahren behandeln, z.B.:

1. $A_q = A_q^T > 0$:
   - Jacobi: $A_q = D_q := \operatorname{diag} B_q$,
   - SSOR: $A_q = (D_q + \omega_q\, B_q^{\triangleright})\, D_q^{-1}\, (D_q + \omega_q\, B_q^{\triangleleft})$,

     mit $B_q = B_q^{\triangleright} + D_q + B_q^{\triangleleft} = \left[\,◺\,\right] + \left[\,\diagdown\,\right] + \left[\,◹\,\right]$,
   - IC, MIC, MAF etc. (siehe Literatur, z.B.: [2], [24], [29].).

2. $A_q \neq A_q^T$:

   z.B. Gauß–Seidel : $A_q = D_q + B_q^{\triangleright}, \quad \omega_q = 1,$
   SOR : $A_q = D_q + \omega_q \, B,$

   d.h. Vorglättung : lexikographisch vorwärts / Red-Black,
   Nachglättung : lexikographisch rückwärts / Black-Red.

3. Blockvarianten der obigen Verfahren.

■ **Bemerkung 6.8:**

In der Praxis:

$$\begin{array}{ccc}
B_l = K_l & \Longrightarrow & C_l \equiv K_{l,k} \equiv K_l \, (I_l - (M_l)^k)^{-1} \\
\text{A-priori-Präk.} & & \text{A-posteriori-Präk.} = \text{MG-Präkonditionierer} \\
\Downarrow & & \text{Satz 6.3} \; \Big\Downarrow \; \text{Satz 6.5} \\
\underline{\gamma}_B = \bar{\gamma}_B = 1 & & 1.\ C_l = C_l^T > 0, \text{ d.h. spd} \\
 & & 2.\ \underline{\gamma}_C \, C_l \leq K_l \leq \bar{\gamma}_C \, C_l \\
 & & \text{mit}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\underline{\gamma}_C = 1 - \eta^k & \underline{\gamma}_C = 1 - \eta^k \\
\bar{\gamma}_C = \begin{cases} 1 + \eta^k \, , & k - \text{unger.} \\ 1 \, , & k - \text{ger.} \end{cases} & \bar{\gamma}_C = 1
\end{array}$$

d.h. die Spektraläquivalenzkonstanten $\underline{\gamma}_C$ und $\bar{\gamma}_C$ hängen nur von der Konvergenzrate η des Multigrid–Verfahrens (genauer: von den Eigenwerten $\mu \, (M_l)$ des Multigrid–Iterationsoperators M_l !) und von der Anzahl k (praktisch interessant: $k = 1$) der Multigrid–Schritte ab. Praktisch sollte man die Konvergenzrate in der $B_l \, C_l^{-1} \, B_l \equiv B_l \, (I_l - (M_l)^k) \equiv K_l \, (I_l - (M_l)^k)$–energetischen Norm messen, da aus Pkt. 6.1 folgt:

$$\rho \, (M_l) = \underbrace{\|M_l\|_{B_l}}_{\text{Theorie}} \equiv \underbrace{\|M_l\|_{B_l C_l^{-1} B_l}}_{\text{Praxis}} .$$

Theoretisch kann gezeigt werden, daß η (gemessen in der <u>energetischen Norm</u> oder in der Euklidischen Norm) unabhängig vom Diskretisierungsparameter h ist (vgl. Kap. 4 und Kap. 5 !). Somit ist der MG–Präkonditionierer C_l im asymptotischen Sinne optimal !
Praktisch reicht oft ein MG–Zyklus ($k = 1$) aus, um einen guten MG–Präkonditionierer zu erhalten,

z.B.: $B_l = K_l$ ($\underline{\gamma}_B = \bar{\gamma}_B = 1$), Vor. Satz 6.6, $k = 1$:
$\eta = 0.1$: $\underline{\gamma}_C = 0.9, \quad \bar{\gamma}_C = 1 \;\curvearrowright\; \kappa \, (C_l^{-1} \, K_l) \leq 1.11 \ldots ,$
$\eta = 0.5$: $\underline{\gamma}_C = 0.5, \quad \bar{\gamma}_C = 1 \;\curvearrowright\; \kappa \, (C_l^{-1} \, K_l) \leq 2,$
$\eta = 0.8$: $\underline{\gamma}_C = 0.2, \quad \bar{\gamma}_C = 1 \;\curvearrowright\; \kappa \, (C_l^{-1} \, K_l) \leq 5.$

6.3 Zur Benutzung von Multigrid–Präkonditionierern

6.3.1 Das Multigrid–PCG–Verfahren

- **Das MG($\boldsymbol{k}$)–PCG–Verfahren zur Lösung von $\boldsymbol{K_l \, \underline{u}_l = \underline{f}_l}$:**

1. Startschritt:

   Anfangsnäherung: $\underline{u}_l^0 \in I\!R^{N_l}$ z.B. $\underline{u}_l^0 = \boldsymbol{B_{l,k}^{-1}} \underline{f}_l$ (k MG–Zyklen),
   $\underline{u}_l^0$ – aus "Nested Iteration";

   $\underline{d}_l^0 = \underline{f}_l - K_l \, \underline{u}_l^0$;

   $\underline{w}_l^0 = \boldsymbol{B_{l,k}^{-1}} \, \underline{d}_l^0$; (29)

   $\underline{s}_l^0 = \underline{w}_l^0$;

2. Iteration: $j = 0, 1, \ldots, i$:

   $\alpha_{j+1} = (\underline{w}_l^j, \underline{d}_l^j)/(K_l \, \underline{s}_l^j, \underline{s}_l^j)$;

   $\underline{u}_l^{j+1} = \underline{u}_l^j + \alpha_{j+1} \, \underline{s}_l^j$;

   $\underline{d}_l^{j+1} = \underline{d}_l^j - \alpha_{j+1} \, K_l \, \underline{s}_l^j$;

   $\underline{w}_l^{j+1} = \boldsymbol{B_{l,k}^{-1}} \, \underline{d}_l^{j+1}$; (29)

   $\beta_{j+1} = (\underline{w}_l^{j+1}, \underline{d}_l^{j+1})/(\underline{w}_l^j, \underline{d}_l^j)$;

   $\underline{s}_l^{j+1} = \underline{w}_l^{j+1} + \beta_{j+1} \, \underline{s}_l^j$

   $i = I\,(\varepsilon)$:

   - praktisch:

     $(\underline{w}_l^j, \underline{d}_l^j) \leq \varepsilon^2 \, (\underline{w}_l^0, \underline{d}_l^0) \xrightarrow{\text{ja}} \text{STOP}$

     $$\boxed{\begin{aligned} &\|\underline{z}_l^j\|_{K_l C_l^{-1} K_l} \leq \varepsilon \, \|\underline{z}_l^0\|_{K_l C_l^{-1} K_l} \\ &\text{mit} \quad \underline{z}_l^i = \underline{u}_l - \underline{u}_l^i \text{ – Fehler,} \\ &\qquad K_l \, C_l^{-1} \, K_l = \\ &\qquad = K_l \, (I_l - (M_l)^k) \, B_l^{-1} \, K_l = \\ &\qquad \overset{B_l = K_l}{=} K_l - K_l \, (M_l)^k \approx K_l. \end{aligned}}$$

   - theoretisch:

     gibt es nur Ratenabschätzungen des PCG–Verfahrens in der K_l–energetischen Norm !

MG–Präkonditionierer: $\boldsymbol{C_l = B_{l,k} = B_l \, (I_l - (M_l)^k)^{-1}}$

- **Bemerkung 6.9:**

1. Herleitung des PCG–Verfahrens siehe Vorlesung [33] bzw. Literatur [2], [9], [24].

2. Beachte: (29) $\underline{w}_l^{j+1} = \boldsymbol{B}_{l,k}^{-1} \underline{d}_l^{j+1}$ bedeutet die Anwendung von k speziellen (vgl. Sätze 6.3 und 6.5) Multigrid–Zyklen auf das A-priori–Präkonditionierungssystem

$$B_l \, \underline{w}_l = \underline{d}_l^{j+1}$$

mit der Startnäherung $\underline{w}_l^{j+1,0} = \boldsymbol{O}$, wobei B_l (z.B. $B_l = K_l$) spd ist:

(12) $\underline{\gamma}_B \, B_l \le K_l \le \bar{\gamma}_B \, B_l$ (= Standardvor. (i)).

■ Konvergenzabschätzungen für das MG($\boldsymbol{k}$)–PCG–Verfahren:

Falls die Voraussetzungen von Satz 6.3 oder Satz 6.5 erfüllt sind, dann gelten die folgenden Fehlerabschätzungen

$$(30) \qquad \| \underline{z}_l^i \|_{K_l} \;\le\; q_i \, \| \underline{z}_l^0 \|_{K_l},$$

$$\begin{array}{llll} \text{mit} & \underline{z}_l^i & = & \underline{u}_l - \underline{u}_l^i \text{ – Fehler der } i\text{-ten Iterierenden}, \\ & q_i & = & 2\rho^i/(1+\rho^{2i}), \\ & i & = & I(\varepsilon) := [|\ln(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2}+1})/\ln \rho^{-1}(\eta)|], \\ & \rho & = & \rho(\eta) = (1-\sqrt{\xi_C})/(1+\sqrt{\xi_C}), \end{array}$$

wobei

$$\xi_C = \frac{\underline{\gamma}_C}{\bar{\gamma}_C} = \frac{\underline{\gamma}_B}{\bar{\gamma}_B} \frac{1-\eta^k}{1+\eta^k} \text{ im Falle von } (*) = \text{Satz 6.3 } (k \text{ – ungerade})$$

und

$$\xi_C = \frac{\underline{\gamma}_C}{\bar{\gamma}_C} = \frac{\underline{\gamma}_B}{\bar{\gamma}_B} (1-\eta^k) \text{ im Falle von } (**) = \text{Satz 6.5 und Satz 6.3 } (k \text{ – gerade}).$$

Hierbei ist η die entsprechende Multigrid–Konvergenzrate und $[|x|]$ bezeichnet die kleinste ganze Zahl $\ge x$.

■ Verhalten von $\boldsymbol{\rho(\eta)}$ für schlechte MG–Raten $\boldsymbol{\eta \nearrow 1}$:

$$\rho(\eta) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{(1-\xi)+(1+\xi)\,\eta^k}{(1+\xi)+2\sqrt{\xi}\,\sqrt{1-\eta^{2k}}+(1-\xi)\,\eta^k} & \begin{array}{c}\text{Satz 6.3} \\ k \text{ – unger.} \\ (*)\end{array} \\ \dfrac{1-\sqrt{\xi}\,\sqrt{1-\eta^k}}{1+\sqrt{\xi}\,\sqrt{1-\eta^k}} & \begin{array}{c}(**) \\ \text{Satz 6.5} \\ \text{Satz 6.3, } k \text{ – ger.}\end{array} \end{array} \right\} \Longrightarrow \underline{\underline{\rho'(\eta) \underset{\eta \nearrow 1}{\longrightarrow} \infty\,!}}$$

mit $\xi = \xi_B = \underline{\gamma}_B/\bar{\gamma}_B$. Im praktisch wichtigen Fall $B_l = K_l$ gilt $\underline{\gamma}_B = \bar{\gamma}_B = 1$ und somit $\xi = 1$.

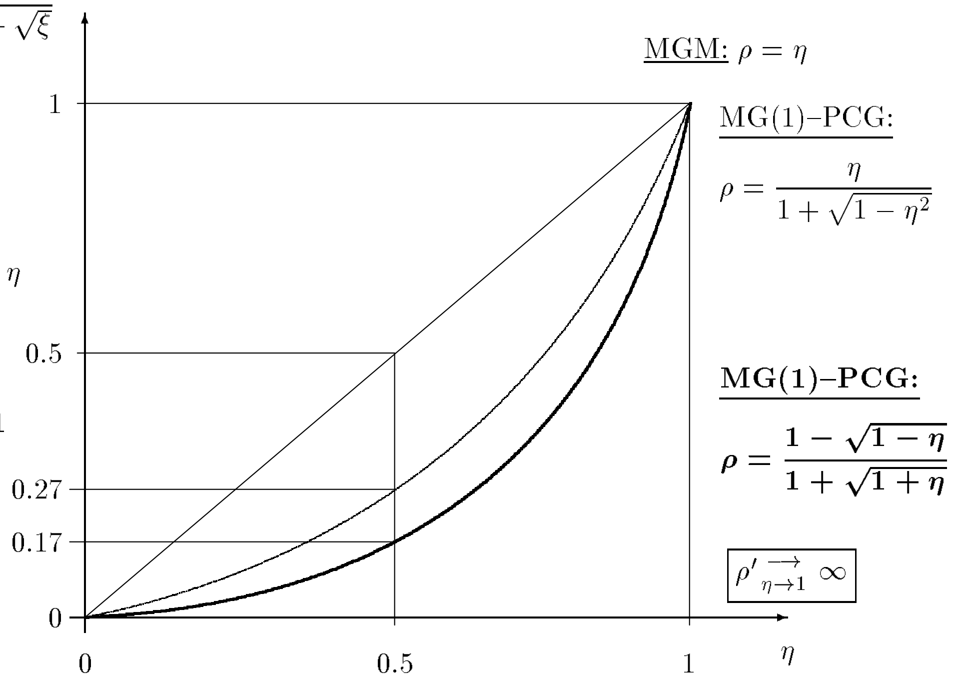
■ **Illustration:** Konvergenz des MG(k)–PCG–Verfahrens im Falle $B_l = K_l$
($\Rightarrow \underline{\gamma}_B = \bar{\gamma}_B = 1$ und $\xi = \xi_B = 1$).

$\rho = \dfrac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}$

$k = 1$, d.h.
1 MG–Zyklus

(∗) MG(1)–PCG:
$\underline{\gamma}_C = 1-\eta, \bar{\gamma}_C = 1+\eta$
$\xi_C = (1-\eta)/(1+\eta)$

(∗∗) **MG(1)–PCG:**
$\boldsymbol{\underline{\gamma}_C = 1-\eta, \bar{\gamma}_C = 1}$
$\boldsymbol{\xi_C = 1-\eta}$



Iterationszahlen: MGM : $I(\varepsilon) = [|\ln \varepsilon^{-1} / \ln \eta^{-1}|]$,
$\varepsilon = 10^{-4}$ MG–PCG : $I(\varepsilon) = [|\ln(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2}+1}) / \ln \rho^{-1}(\eta)|]$.

$I(\varepsilon)$ \ η	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
MGM	4	6	8	11	14	19	26	42	57	88	180	917
MG(1)–PCG	4	5	6	7	8	10	12	15	17	22	31	70
MG(1)–PCG	3	4	5	5	6	7	9	11	13	16	22	55
MG(2)–PCG, **MG(2)–PCG**; $\rho = \dfrac{1-\sqrt{1-\eta^2}}{1+\sqrt{1-\eta^2}}$	2	3	3	4	4	5	6	8	9	11	16	35

Hierbei bedeutet „ | “, daß ab dieser MG–Rate η für standarde ebene Elastizitätsprobleme das MG–PCG–Verfahren besser ist als die MGM bezüglich des Aufwandes an arithmetischen Operationen (Bew.: Auszählen !): $\Longrightarrow$ Umschalten von MGM auf MG–PCG !

- **Praktisch erhalten wir für $B_l = K_l$ unter den Voraussetzungen von Satz 6.5:**

Wegen

$$\|\underline{v}_l\|^2_{K_l C_l^{-1} K_l = K_l - K_l (M_l)^k} = (K_l\,\underline{v}_l, \underline{v}_l) - ((M_l)^k\,\underline{v}_l, \underline{v}_l)_{K_l} \quad \begin{array}{ll} \le & (K_l\,\underline{v}_l, \underline{v}_l) \\ \ge & (1-\eta^k)(K_l\,\underline{v}_l, \underline{v}_l) \end{array}$$

erhalten wir aus der (praktisch kontrollierbaren) $K_l\,C_l^{-1}\,K_l$–Energienormabschätzung

$$\begin{array}{lll} \|\underline{z}_l^i\|_{K_l C_l^{-1} K_l} & \le & \tilde{\varepsilon}^2\,\|\underline{z}_l^0\|_{K_l C_l^{-1} K_l} \\ \| & & \quad\;\; \| \\ (\underline{w}_l^i, \underline{d}_l^i) & \le & \tilde{\varepsilon}^2\,(\underline{w}_l^0, \underline{d}_l^0) \end{array}$$

sofort die K_l–Energienormabschätzung

$$\begin{array}{lllll} \|\underline{z}_l^i\|^2_{K_l} & \le & (1-\eta^k)^{-1}\,\|\underline{z}_l^i\|^2_{K_l C_l^{-1} K_l} & \le & \\ & \le & \dfrac{\tilde{\varepsilon}^2}{1-\eta^k}\,\|\underline{z}_l^0\|^2_{K_l C_l^{-1} K_l} & \le & \dfrac{\tilde{\varepsilon}^2}{1-\eta^k}\,\|\underline{z}_l^0\|_{K_l}, \end{array}$$

d.h. eine $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\,(1-\eta^k)^{0.5}$–Genauigkeit in der kontrollierbaren $K_l\,C_l^{-1}\,K_l$–Energienorm
garantiert eine ε–Genauigkeit in der K_l–Energienorm.

Andererseits ist nach $I\,(\varepsilon) = [|\ln(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2}+1})/\ln\rho^{-1}\,(\eta)|]$ Iterationen sicher eine $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\,(1-\eta^k)^{0.5}$–Genauigkeit in der $K_l\,C_l^{-1}\,K_l$–Energienorm erreicht (mms) !

6.3.2 Konvergenzbeschleunigung von Multigrid–Verfahren durch Relaxation

- **Multigrid–Verfahren zur Lösung von (1) $K_l\,\underline{u}_l = \underline{f}_l$** auf dem feinsten Gitter einer Folge von Diskretisierungen können auch als spezielles vorkonditioniertes Richardson–Verfahren der Art (5) $\tau\,C_l\,(\underline{u}_l^{j+1} - \underline{u}_l^j) + K_l\,\underline{u}_l^j = \underline{f}_l$ interpretiert werden:
$\Longrightarrow$ Konvergenztheorie für Richardson–Verfahren anwendbar !

<u>Tatsächlich:</u> MGM $=$ präkonditionierte Methode der einfachen Iteration
$=$ präkonditioniertes Richardson–Verfahren:

MG–Iterationsoperator (siehe Kap. 4)

$$\begin{aligned}
\underline{u}_l^{j+1} &= M_l\,\underline{u}_l^j + (I_l - M_l)\,K_l^{-1}\,\underline{f}_l = \\
&= (I_l - \boxed{\tau}\,\underbrace{\left[(I_l - M_l)\,K_l^{-1}\right]}_{=:\,C_l^{-1}} K_l)\,\underline{u}_l^j + \boxed{\tau}\,(I_l - M_l)\,K_l^{-1}\,\underline{f}_l
\end{aligned}$$

$\Updownarrow$ $\quad \boxed{\tau = 1} \qquad \boxed{\tau = 1}$

$$\text{(31)} \quad \boxed{\underbrace{K_l\,(I_l - M_l)^{-1}}_{C_l}\,\underbrace{\frac{\underline{u}_l^{j+1} - \underline{u}_l^j}{\tau_{j+1}}}_{\underline{w}_l^j = \underline{d}_l^j := \underline{f}_l - K_l\,\underline{u}_l^j} + K_l\,\underline{u}_l^j = \underline{f}_l \text{ mit } \tau_{j+1} = 1}$$

- **Wenden nun Konvergenztheorie für das präkonditionierte Richardson–Verfahren aus Pkt. 6.1 auf (31) an:**

Satz 6.10:

<u>Vor.:</u>
1) K_l spd;
2) $C_l = K_l\,(I_l - M_l)^{-1}$ spd;
3) $\underline{\gamma}_C\,C_l \le K_l \le \bar{\gamma}_C\,C_l$;
4) $0 < \tau = 1 < 2/\bar{\gamma}_C$, d.h. $\bar{\gamma}_C < 2$.

<u>Bh.:</u> $\|M_l\|_{\substack{K_l \\ C_l \\ K_l C_l^{-1} K_l}} \le \eta := \max\{|1 - \tau\,\underline{\gamma}_C|, |1 - \tau\,\bar{\gamma}_C|\} < 1.$ für $\tau = 1$

<u>Beweis:</u> siehe Pkt. 6.1. **q.e.d.**

- **<u>Bemerkung 6.11:</u>**

1. Voraussetzung 2) $C_l = C_l^T$ p.d. siehe Lemma 6.1 und 6.2:

   <u>Vor.:</u>

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a) } K_q \text{ spd } \forall\, q = \overline{1,l} \\[4pt]
\text{b) (iii) } S_q^{(\text{post})} = \left(S_q^{(\text{pre})}\right)^{*K_q} \ \forall\, q = \overline{2,l} \\[4pt]
\text{c) (iv) } I_q^{q-1} = (I_{q-1}^q)^T \ \forall\, q = \overline{2,l}
\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 6.2}}}{M_l = M_l^{*K_l}} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lemma 6.1} \\ (+\text{ Vor.: } \rho(M_l) < 1)}}{C_l} := K_l\,(I_l - M_l)^{-1} = C_l^T.$$

2. Im Pkt. 6.2 sind wir de facto den umgekehrten Weg gegangen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Bed. an MG-Grundkomp.:}\\ \text{(i) – (iv), \ldots}\\ \rho\,(M_l) \le \eta < 1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll}1) & C_l \text{ spd}\\ 2) & \underline{\gamma}_C = 1-\eta\\ & \bar{\gamma}_C = \begin{cases} 1+\eta, & \text{S. 6.3}\\ 1, & \text{S. 6.5}\end{cases}\end{array}\right\} \curvearrowright \begin{array}{l}C_l \text{ ist zur}\\ \text{Präkonditionierung}\\ \text{geeignet !}\end{array}$$

3. J.H. Bramble und J.E. Pasciak nutzen obige Erkenntnis in [12] (Math. of Comp., 1987, v. 49, No. 180, 311 – 325) zur Entwicklung einer neuen MG–Konvergenztheorie (siehe auch [13]):

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\text{Abstrakte Vor.:}}\\ (*) \mathrel{\widehat{=}} \text{Approximation}\\ (**) \mathrel{\widehat{=}} \text{Glättung}\\ (***) = \text{weitere Bed.}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}1)\ C_l \text{ spd}\\ 2)\ (1-\eta)\,C_l \le K_l \le C_l\end{array} \quad \Rightarrow \|M_l\|_{\substack{K_l\\ C_l\\ K_l C_l^{-1} K_l}} \le \eta < 1,$$

wobei

$(*) \mathrel{\widehat{=}}$ "Approximation Property":

$$|(K_q(I_q - I_{q-1}^q P_{q-1})\,\underline{u}_q, \underline{u}_q)_q| \le c_A^2 \left(\frac{\|K_q\,\underline{u}_q\|_q^2}{\lambda_q}\right)^{\alpha} (K_q\,\underline{u}_q, \underline{u}_q)_q^{1-\alpha} \quad \forall\, \underline{u}_q \in \mathbb{R}^{N_q},$$

wobei $0 < \alpha \le 1$ ($\alpha = 1 \mathrel{\widehat{=}} H^2$–Regularität),

$\lambda_q = \lambda_{\max}\,(K_q)$,

P_{q-1}: $\mathbb{R}^{N_q} \to \mathbb{R}^{N_{q-1}}$ – „Ritzprojektor“ (Nu I [32], Nu II [33]):

$$a\,(\widetilde{P_{q-1}\,\underline{u}_q}, v_{q-1}) = a\,(u_q, v_{q-1})$$

$$\forall\, \underline{u}_q \leftrightarrow u_q \in V_q, \quad \forall\, \underline{v}_{q-1} \leftrightarrow v_{q-1} \in V_{q-1},$$

$$(K_{q-1}\,P_{q-1}\,\underline{u}_q, \underline{v}_{q-1})_{q-1} = (K_q\,\underline{u}_q, I_{q-1}^q\,\underline{v}_{q-1})$$

$$K_{q-1}\,P_{q-1} = I_q^{q-1}\,K_q, \text{ d.h. } P_{q-1} = K_{q-1}^{-1}\,I_q^{q-1}\,K_q$$

$(**) \mathrel{\widehat{=}}$ "Smoothing Property":

$$\frac{\|K_q\,\underline{u}_q\|_q^2}{\lambda_q} \le C_\rho\,(K_q\,(I_q - S_q)\,\underline{u}_q, \underline{u}_q)_q \quad \forall\, \underline{u}_q \in \mathbb{R}^{N_q}$$

$(***) =$ Weitere Bedingungen:

- $S_q = S_q^{*K_q} \ge 0, \qquad \forall\, q = \overline{2,l},$
- $\lambda\,(S_q) = \text{EW}\,(S_q) \in [0,1), \qquad \forall\, q = \overline{2,l},$
- $I_q^{q-1}\,K_q\,I_{q-1}^q \le K_{q-1}, \qquad \forall\, q = \overline{2,l},$
- K_q spd, $\forall\, q = \overline{1,l}$ (d.h. symmetr. Variationsproblem).

Folgerung 6.12:

1. Konvergenz des MG–Verfahrens kann unter den Bedingungen von Satz 6.5 durch Einführung eines Relaxationsparameters sofort verbessert werden:

$$(32)\quad \underline{u}_l^{j+1} = \underbrace{\hat{\underline{u}}_l^j}_{\uparrow\ j\text{-te MG-Iterierende}} + \tau_{j+1}\,(\underbrace{\hat{\underline{u}}_l^{j+1}}_{\uparrow\ (j+1)\text{-te MG-Iterierende } (\tau_{j+1}=1)} - \underbrace{\hat{\underline{u}}_l^j}_{=\underline{u}_l^j}) =$$

$$= (1-\tau_{j+1})\,\hat{\underline{u}}_l^j + \tau_{j+1}\,(M_l\,\hat{\underline{u}}_l^j + (I_l - M_l)\,K_l^{-1}\,\underline{f}_l) =$$

$$= (I_l - \tau_{j+1}\,\underbrace{(I_l - M_l)\,K_l^{-1}}_{=C_l}\,K_l)\,\hat{\underline{u}}_l^j + \tau_{j+1}\,\underbrace{(I_l - M_l)\,K_l^{-1}}_{=C_l}\,\underline{f}_l,$$

d.h. (32) = (31):

(a) Methode der einfachen Iteration (Richardson Iteration):

S. 6.5: $\underline{\gamma}_C = 1-\eta,\ \bar{\gamma}_C = 1 \implies \tau_{j+1} \equiv \tau_{\text{opt}} := \dfrac{2}{\underline{\gamma}_C + \bar{\gamma}_C} = \dfrac{2}{2-\eta},$

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{\bar{\gamma}_C - \underline{\gamma}_C}{\bar{\gamma}_C + \underline{\gamma}_C} = \frac{\eta}{2-\eta} < \eta,$$

$$\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^j\|_{\substack{K_l\\ C_l\\ K_lC_l^{-1}K_l}} \le \rho_{\text{opt}}^j\,\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^0\|_{\substack{K_l\\ C_l\\ K_lC_l^{-1}K_l}},$$

$$\begin{array}{ccc} \|\underline{u}_l - \underline{u}_l^j\|^2_{K_lC_l^{-1}K_l} & \le & \rho_{\text{opt}}^{2j}\,\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^0\|^2_{K_lC_l^{-1}K_l} \\ \| & & \| \\ (\underline{w}_l^j, \underline{d}_l^j) & \le & \rho_{\text{opt}}^{2j}\,(\underline{w}_l^0, \underline{d}_l^0), \end{array}$$

mit $\underline{d}_l^j = \underline{f}_l - K_l\,\hat{\underline{u}}_l^j,\quad \underline{w}_l^j = \hat{\underline{u}}_l^{j+1} - \hat{\underline{u}}_l^j = (\underline{u}_l^{j+1} - \underline{u}_l^j)/\tau_{j+1}.$

S. 6.3: $\underline{\gamma}_C = 1-\eta,\ \bar{\gamma}_C = 1+\eta \implies \tau_{j+1} = \tau_{\text{opt}} = 1,\ \rho_{\text{opt}} = \eta,$

d.h. Richardson–Relaxation bringt keinen Gewinn, **aber** aus K_l–Norm–Konvergenz folgt C_l– bzw. $K_l\,C_l^{-1}\,K_l$–Norm–Konvergenz.

(b) Gradientenverfahren:

$$\tau_{j+1} = \frac{(\underline{w}_l^j, \underline{d}_l^j)}{(K_l\,\underline{w}_l^j, \underline{w}_l^j)} \text{ mit } \underline{d}_l^j = \underline{f}_l - K_l\,\hat{\underline{u}}_l^j,\ \underline{w}_l^j = \hat{\underline{u}}_l^{j+1} - \hat{\underline{u}}_l^j = \frac{\underline{u}_l^{j+1} - \underline{u}_l^j}{\tau_{j+1}},$$

$$\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^j\|_{K_l} \le \rho_{\text{opt}}^j\,\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^0\|_{K_l}.$$

(c) Tschebyschev–Verfahren:

$\tau_{j+1} \in \mathcal{M}_{I(\varepsilon)}\,(\underset{1-\eta}{\underline{\gamma}_C}, \underset{1}{\bar{\gamma}_C})$ – Tschebyschev–Parameter (stabil auswählen !!),

$$\|\underline{u}_l - \underline{u}_l^i\|_{\substack{K_l\\C_l\\K_lC_l^{-1}K_l}} \leq q_i \, \|\underline{u}_l - \underline{u}_l^0\|_{\substack{K_l\\C_l\\K_lC_l^{-1}K_l}},$$

mit q_i und $i = I\,(\varepsilon)$ aus Pkt. 6.3.1 (MG(k)–PCG–Verfahren)

2. Weitere Verbesserung der Konvergenz:
   $C_l = K_l\,(I_l - M_l)^{-1}$ als Präkonditionierer im CG–Verfahren (siehe Pkt. 6.3.1).

■ **Bemerkung 6.13:**

1. Die Nutzung von Multilevel–Techniken zur Konstruktion von Präkonditionierern hat durch die Arbeiten von H. Yserentant [48], [47] zur hierarchischen Basis und durch die Arbeiten von Bramble et. all. [14] in den letzten Jahren einen entscheidenden Durchbruch erzielt. Im Kapitel 6 der Vorlesung Nu II [33] wird eine kurze Einführung in die Problematik der Konstruktion und Analysis von Multilevel-Präkonditionierern auf der Basis der Schwarz–Theorie gegeben. Interessierte Leser seien darüberhinaus auf die Monographien von M. Griebel [19] (praktische Aspekte) und von P. Oswald [35] (theoretische Aspekte) verwiesen.

2. Weitere Resultate zu Multigrid–, Multilevel– und Multiskalen–Präkonditionierern findet der Leser in [46] (Frequenzfiltermethoden) und in Zeitschriftenartikeln zu Wavelet-Präkonditionierern.

Literaturverzeichnis

[1] G.P. Astrachancev. An iterative method for solving elliptic net problems. *USSR Comput. Math. math. Phys.*, 11(2):171–182, 1971.

[2] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[3] N.S. Bachvalov. On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. *USSR Comput. Math. math. Phys.*, 6(5):101–135, 1966.

[4] R. Bank. PLTMG: A software package for solving elliptic partial differential equations. User's guide 7.0, SIAM, Philadelphia, 1994.

[5] R. Bank and A. Weiser. Some a-posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44(170):283–301, 1985.

[6] E. Bänsch. Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. Report No. 6, Universität Bonn, SFB 256, 1989.

[7] P. Bastian. UG version 2.0 – short manual. Preprint 92–14, IWR Heidelberg, 1992.

[8] J. Bey. Der BPX-Vorkonditionierer in 3 Dimensionen : Gitter–Verfeinerung, Parallelisierung und Simulation. Preprint 92–03, IWR Heidelberg, 1992.

[9] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1992.

[10] D. Braess and P. Peisker. On the numerical solution of the biharmonic equation and the role of squaring matrices for preconditioning. *IMA J. Numer. Anal.*, 6:393–404, 1986.

[11] J. H. Bramble. *Multigrid methods.* Pitman Research Notes in Mathematics, Longman Scientific and Technical, London, 1993.

[12] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. New convergence estimates for multigrid algorithms. *Math. Comput.*, 49(180):311–329, 1987.

[13] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. New estimates for multilevel algorithms including the v-cycle. *Math. Comput.*, 60:447–471, 1993.

[14] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comput.*, 1990.

[15] A. Brandt. Multi-level adaptive techniques (mlat) for fast numerical solution to boundary value problems. In *Lecture Notes in Physics*, 1973. Proc. 3rd Internat. Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Paris, 1972.

[16] A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31:333–390, 1977.

[17] R.P. Fedorenko. A relaxation method for elliptic difference equations. *USSR Comput. Math. math. Phys.*, 1(5):1092–1096, 1961.

[18] R.P. Fedorenko. The speed of convergence of one iterative process. *USSR Comput. Math. math. Phys.*, 4(3):227–235, 1964.

[19] M. Griebel. *Multilevelmethoden als Iterationsverfahren über Erzeugendensystemen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[20] G. Haase, U. Langer, and A. Meyer. The approximate Dirichlet decomposition method. part I,II. *Computing*, 47:137–167, 1991.

[21] W. Hackbusch. Implementation of the multi-grid method for solving partial differential equations. Technical Report RA 82, IBM T.J. Watson Research Centre, 1976.

[22] W. Hackbusch. On the solution of nonlinear elliptic equations. *Numer. Math.*, 32:83–95, 1979.

[23] W. Hackbusch. *Multigrid Methods and Applications.* Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[24] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[25] W. Hackbusch and U. Trottenberg, editors. *First European Conference on Multigrid Methods*, Berlin, Heidelberg, New York, 1982. Lecture Notes in Mathematics, v. 960, Springer-Verlag. Köln-Porz, November 23-27, 1981.

[26] W. Hackbusch and U. Trottenberg, editors. *Second European Conference on Multigrid Methods*, Berlin, Heidelberg, New York, 1985. Lecture Notes in Mathematics, v. 1228, Springer-Verlag. Köln, Oktober 1-4, 1985.

[27] W. Hackbusch and U. Trottenberg, editors. *Third European Conference on Multigrid Methods*, Basel, Boston, Berlin, 1991. ISNM 98, Birkhäuser Verlag. Bonn, Oktober 1-4, 1990.

[28] P.W. Hemker and P. Wesseling, editors. *Multigrid Methods IV. Proceedings of the Fourth European Multigrid Conference*, Basel, 1994. Birkhäuser Verlag. Amsterdam, July 6-9, 1993.

[29] M. Jung and U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung FEM (Eine Einführung für Ingenieurstudenten).* TU Chemnitz (Fakultät für Mathematik) und Johannes Kepler Universität (Institut für Mathematik), Chemnitz und Linz, 1993.

[30] V.G. Korneev. *Finite element schemes of higher order of accuracy (in Russian.* Leningrad University Press, Leningrad, 1977.

[31] U. Langer. Zur numerischen Lösung des ersten biharmonischen Randwertproblems. *Numer. Math.*, 50:291–310, 1987.

[32] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK I (Operatorgleichung).* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[33] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK II (RWA).* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[34] S. McCormick. *Multilevel adaptive methods for partial differential equations.* SIAM, Frontiers in Applied Mathematics, Philadelphia, 1989.

[35] P. Oswald. *Multilevel Finite Element Approximation.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[36] A. Reusken. Convergence of the multilevel full approximation scheme including the v-cycle. *Numer. Math.*, 53:663–686, 1988.

[37] U. Rüde. *Mathematical and Computational Techniques for Multilevel Adaptive methods.* SIAM, Frontiers in Applied Mathematics, Philadelphia, 1993.

[38] J. W. Ruge and K. Stüben. Efficient solution of finite difference and finite element equations by algebraic multigrid (AMG). In D. J. Paddon and H. Holstein, editors, *Multigrid Methods for Integral and Differential Equations*, The Institute of Mathematics and its Applications Conference Series, pages 169–212. Clarendon Press, Oxford, 1985.

[39] J. W. Ruge and K. Stüben. Algebraic multigrid (AMG). In S. F. McCormick, editor, *Multigrid Methods*, volume 3 of *Frontiers in Applied Mathematics*, pages 73–130. SIAM, Philadelphia, PA, 1987.

[40] N. Schieweck. A multigrid convergence proof by a strengthened cauchy inequality for symmetric elliptic boundary value problems. In Sabine Hengst, editor, *Proceedings of the "2-nd Multigrid Seminar" held at Garzau, GDR, November 5-8, 1985*, pages 49–62, Berlin, 1986. Academy of Science. Report-Nr. R-MATH-08/86.

[41] V.V. Shaidurov. *Multigrid finite element methods (in Russian).* Nauka, Moscow, 1989.

[42] H. Regler T. Grauschopf, M. Griebel. Additive Multilevel–Preconditioners based on Bilinear Interpolation, Matrix Dependent Geometric Coarsening and Algebraic–Multigrid Coarsening for Second Order Elliptic PDEs. SFB–Bericht Nr. 342/02/96, TU München, 1996.

[43] St. Vandewalle. *Parallel Multigrid Waveform Relaxation for Parabolic Problems.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1993.

[44] R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques.* Teubner, 1996.

[45] P. Wesseling. *An introduction to Multigrid Methods.* John Wiley, Chichester, 1992.

[46] G. Wittum. *Filternde Zerlegungen: Schnelle Löser für große Gleichungssysteme.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[47] H. Yserentant. Hierarchical basis give conjugate gradient type methods a multigrid speed of convergence. *Appl. Math. and Comput.*, 19:347–358, 1986.

[48] H. Yserentant. On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49(4):379–412, 1986.

[49] H. Yserentant. Old and new convergence proofs for multigrid methods. *Acta Numerica*, 0:285–326, 1993.

Anhang A

Interpolationen

▷ Bezeichnungen:

ω_C – Menge der Grobgitterknoten ■ $N_C := |\omega_C|$

ω_F – Menge der reinen Feingitterknoten • $N_F := |\omega_F|$

$I_H^h = [\alpha_{ij}]_{\substack{i=1,N \\ j=1,N_C}}$ – Interpolationsmatrix $I\!R^{N_C} \to I\!R^N$

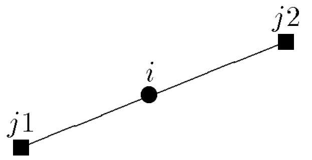
$K = K_h = [K_{ij}]_{i,j=1,N}$ – Feingittermatrix $I\!R^N \to I\!R^N$

▷ Allgemein gelte für die Interpolationsgewichte α_{ij}:

$$\begin{aligned} \alpha_{ii} &= 1 & \forall\, i \in \omega_C \\ \alpha_{ij} &= 0 & \forall\, i,j \in \omega_C \wedge i \neq j \end{aligned}$$

Wir betrachten im folgenden ausschließlich $\alpha_{ij},\ i \in \omega_F$!

▷ Lineare Interpolation

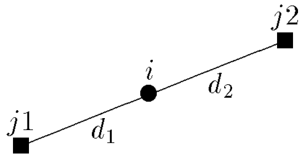


$i \in \omega_F$

$j1, j2 \in \omega_C$ – Väter von i

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha_{ij} = \frac{1}{2} & j \in \{j1, j2\} \\ \alpha_{ij} = 0 & \text{sonst} \end{array}}$$

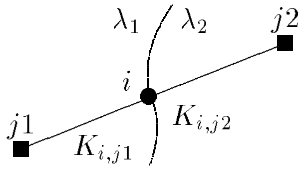
▷ Geometrische lineare Interpolation



$i \in \omega_F$
$j1, j2 \in \omega_C$
$d_1 := \|x_i - x_{j1}\|;\ d_2 := \|x_i - x_{j2}\|$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha_{i,j1} = \dfrac{d_2}{d_1 + d_2} & \\ \alpha_{i,j2} = \dfrac{d_1}{d_1 + d_2} & \\ \alpha_{ij} = 0 & \text{sonst} \end{array}}$$

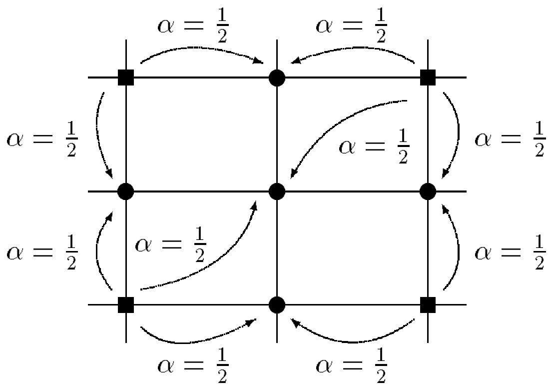
▷ Matrixgewichtete lineare Interpolation



$i \in \omega_F$
$j1, j2 \in \omega_C$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \alpha_{i,j1} & = \dfrac{K_{i,j1}}{K_{i,j1} + K_{i,j2}} & \\ \alpha_{i,j2} & = \dfrac{K_{i,j2}}{K_{i,j1} + K_{i,j2}} & \\ \alpha_{i,j} & = 0 & \text{sonst} \end{array}}$$

▷ Spezialfälle bei regelmäßigen Rechteckgittern (5-Punkte–Stern)

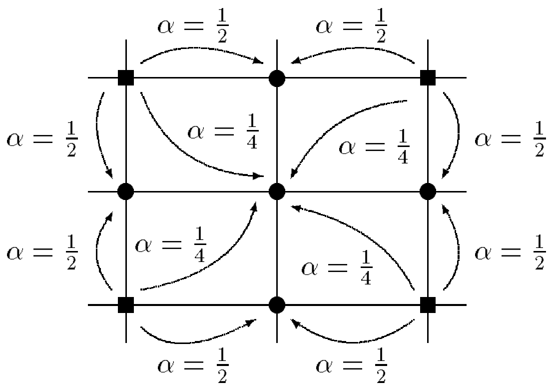


▷ lineare Interpolation:
Mittelknoten kann auch durch die beiden anderen Grobgitterknoten interpoliert werden.

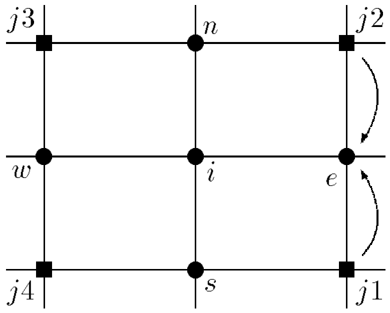
▷ Matrixgewichtete lineare Interpolation

Für obigen Mittelknoten kann bei einer 5-Punkte-Stern–Diskretisierung keine matrixgewichtete Interpolation gefunden werden. Bei 9-Punkte-Stern ist es möglich, dort sollte jedoch gleich die entsprechende bilineare Interpolation gewählt werden.

▷ Bilineare Interpolation



▷ Matrixgewichtete bilineare Interpolation: 5-Punkte-Stern $\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$



$$\alpha_{e,j2} = \frac{K_{e,j2}}{K_{e,j1} + K_{e,j2}} \Leftarrow \text{matrixgew. lin. Interpolation für } w, n, e, s$$

$$\alpha_{e,j1} = \frac{K_{e,j1}}{K_{e,j1} + K_{e,j2}}$$

- Ansatz:

$$K_{ii}u_i = -K_{iw}u_w - K_{in}u_n - K_{ie}u_e - K_{is}u_s$$

+ matrixgewichtete lineare Interpolation für u_w, u_n, u_e, u_s

$$\begin{aligned} K_{ii}u_i \quad = \quad & -\frac{K_{iw}}{K_{w,j3} + K_{w,j4}} \left(K_{w,j3}u_{j3} + K_{w,j4}u_{j4}\right) \\ & -\frac{K_{in}}{K_{n,j2} + K_{n,j3}} \left(K_{n,j2}u_{j2} + K_{n,j3}u_{j3}\right) \\ & -\frac{K_{ie}}{K_{e,j1} + K_{e,j2}} \left(K_{e,j1}u_{j1} + K_{e,j2}u_{j2}\right) \\ & -\frac{K_{is}}{K_{s,j1} + K_{s,j4}} \left(K_{s,j1}u_{j1} + Ks,j4u_{j4}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}
\alpha_{i,j1} &= -\left(\frac{K_{is}K_{s,j1}}{K_{s,j1}+K_{s,j4}} + \frac{K_{ie}K_{e,j1}}{K_{e,j1}+K_{e,j2}}\right)/K_{ii} \\
\alpha_{i,j2} &= -\left(\frac{K_{ie}K_{e,j2}}{K_{e,j1}+K_{e,j2}} + \frac{K_{in}K_{n,j2}}{K_{n,j2}+K_{n,j3}}\right)/K_{ii} \\
\alpha_{i,j3} &= -\left(\frac{K_{in}K_{n,j3}}{K_{n,j2}+K_{n,j3}} + \frac{K_{iw}K_{w,j3}}{K_{w,j3}+K_{w,j4}}\right)/K_{ii} \\
\alpha_{i,j4} &= -\left(\frac{K_{iw}K_{w,j4}}{K_{w,j3}+K_{w,j4}} + \frac{K_{is}K_{s,j4}}{K_{s,j4}+K_{s,j1}}\right)/K_{ii}
\end{aligned}}$$

▷ <u>Matrixgewichtete bilineare Interpolation: 9-Punkte-Stern</u> $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Bild und Interpolation für w, n, e, s wie bei 5-Punkte-Stern

- Ansatz:

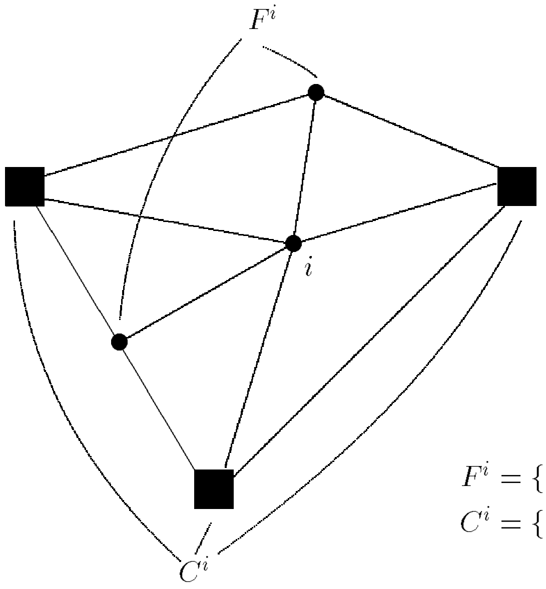
$$\begin{aligned}
K_{ii}u_i &= -K_{iw}u_w - K_{in}u_n - K_{ie}u_e - K_{is}u_s \\
&\quad - K_{i,j1}u_{j1} - K_{i,j2}u_{j2} - K_{i,j3}u_{j3} - K_{i,j4}u_{j4}
\end{aligned}$$

\+ matrixgewichtete lineare Interpolation für u_w, u_n, u_e, u_s

$\vdots$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}
\alpha_{i,j1} &= -\left(\frac{K_{is}K_{s,j1}}{K_{s,j1}+K_{s,j4}} + \frac{K_{ie}K_{e,j1}}{K_{e,j1}+K_{e,j2}} + K_{i,j1}\right)/K_{ii} \\
\alpha_{i,j2} &= -\left(\frac{K_{ie}K_{e,j2}}{K_{e,j1}+K_{e,j2}} + \frac{K_{in}K_{n,j2}}{K_{n,j2}+K_{n,j3}} + K_{i,j2}\right)/K_{ii} \\
\alpha_{i,j3} &= -\left(\frac{K_{in}K_{n,j3}}{K_{n,j2}+K_{n,j3}} + \frac{K_{iw}K_{w,j3}}{K_{w,j3}+K_{w,j4}} + K_{i,j3}\right)/K_{ii} \\
\alpha_{i,j4} &= -\left(\frac{K_{iw}K_{w,j4}}{K_{w,j3}+K_{w,j4}} + \frac{K_{is}K_{s,j4}}{K_{s,j4}+K_{s,j1}} + K_{i,j4}\right)/K_{ii}
\end{aligned}}$$

▷ Matrixgewichtete Interpolation [nach Ruge / Stüben]



$$F^i = \{\, j \in \omega_F, j \neq i : |K_{ij}| + |K_{ji}| \neq 0\}$$
$$C^i = \{\, j \in \omega_C \qquad : |K_{ij}| + |K_{ji}| \neq 0\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_{ij} &:= \sum_{k \in F^i} \frac{K_{ik} \cdot K_{kj}}{\sum\limits_{l \in C^i} K_{kl} + K_{ki}} && \forall\, j \in C^i,\ i \in \omega_F \\ \alpha_{ij} &:= -\frac{K_{ij} + c_{ij}}{K_{ii} + c_{ii}} && \forall\, j \in C^i,\ i \in \omega_F \end{aligned}}$$

Anhang B

Ein Programmbeispiel

Die einfachste partielle Dgl. 2. Ordnung ist die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichletrandbedingungen im Einheitsquadrat (siehe Kap. 1):

$$\begin{aligned} -\triangle u(x,y) &= f(x,y) \qquad \forall x \in \Omega = (0,1)^2 \\ u(x,y) &= 0 \qquad\qquad \forall x \in \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Eine äquidistante Diskretisierung (Diskretisierungsschrittweite $h = h_x = h_y$) des Laplace-Operators mittels des 5-Punkte-Stern–Differenzenverfahrens ergibt das Gleichungssystem $K\underline{u} = \underline{f}$ mit der symmetrischen und positiv definiten Matrix K.

Im Programmbeispiel wurde genau dieser einfachste Fall realisiert, wobei die Matrixoperationen in den entsprechenden Routinen fest programmiert sind. Das gröbste Gitter ($\ell = 1$) besitzt stets die Diskretisierungsschrittweite $h = 1/2$, d.h. das zugehörige Grobgittersystem besteht nur aus einer Zeile mit einer Unbekannten, da die restlichen 8 Randpunkte den Wert 0 besitzen. Alle weiteren Gitter entstehen durch Halbierung der Diskretisierungsschrittweite $h_k = h_{k-1}/2$ (siehe Kap. 1, MBsp. 2).

Das Beispielprogramm liegt in FORTRAN77, FORTRAN90 und C vor, wobei die spezifischen Eigenschaften der einzelnen Programmiersprachen bei der Umsetzung des Multigridalgorithmus berücksichtigt wurden (das klassische FORTRAN77 erlaubt keinerlei Rekursionen !). Die Beispielprogramme sind modular aufgebaut, sodaß die einzelnen Multigridkomponenten wie Glättung, Restriktion, Interpolation leicht veränderbar sind. Folgende Komponenten sind implementiert:

- ▷ Zyklen: V, verallgemeinerter V, W und der Full-Multigrid Startschritt. [1-0,1-1,2],
- ▷ Glätter: Gauß-Seidel (lexikographisch vorwärts/rückwärts), ω-Jacobi und bei FORTRAN90 die Blockvarianten des Gauß-Seidel [1,2,3,4,5]
- ▷ Interpolation: linear, bilinear [1,2],
- ▷ Restriktion: Injektion, linear, bilinear [0,1,2].

Die Zahlen in den eckigen Klammern geben die einzugebenden Größen für die interaktive Eingabe vor.

Im Programmcode wird stets der Lösungs-/Korrekturvektor mit u und die rechte Seite/Defektvektor mit f bezeichnet.

Die Quelltexte des Beispielprogrammes sind unter *ftp://ftp.uni-linz.ac.at/pub/lectures/multigrid* verfügbar.

Quellcode FORTRAN77

Quellcode FORTRAN90

Quellcode C

Anhang C

Praktikumsaufgaben

Numerik dünnbesetzter Systeme WS 95/96

P1-2 20.10. / 27.10.1995 ($12^{\underline{00}}$ - $12^{\underline{15}}$)

C.1 Fehlerreduktion bei 1D–Glättungsverfahren

C.1.1 Fehlerreduktion beim ω–Jacobi–Verfahren

Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \qquad x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{C.1.1}$$

wird mittels einer äquidistanten Unterteilung des Intervalles [0,1] ($h = 1/(n+1)$, $x_i = i \cdot h$ ($i=\overline{0,n+1}$)), dem Ersetzen der Funktionen $u(x)$ und $f(x)$ durch Vektoren $\underline{u} = \{u_i\}_{i=\overline{0,n+1}} = \{u(x_i)\}_{i=\overline{0,n+1}}$ und $\underline{f}$ und Approximation der 2. Ableitung $u''(x)$ durch

$$u''(x_i) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \qquad i = \overline{1,n}$$

in das lineare Gleichungssystem

$$A_{n\times n} \cdot \underline{u} := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}_n =: \underline{f} \tag{C.1.2}$$

überführt. Die homogenen Dirichletrandbedingungen $u_0 = u_{n+1} = 0$ sind eingearbeitet. Die Matrix A besitzt die folgenden Eigenvektoren $\underline{\mu}_k$ und Eigenwerte λ_k

$$\underline{\mu}_k = \{\sin(k\pi i h)\}_{i=\overline{1,n}}, \qquad \lambda_k = \frac{4}{h}\sin^2(k\pi h/2)\,. \tag{C.1.3}$$

1-5 Analytischer Teil: Bestimmen Sie für die folgenden Übungsaufgaben mit jeweils $n = 9$

a) die exakte Lösung $\underline{u}^*$ von (C.1.2),

b) das optimale ω im ω–Jacobi–Verfahren zur iterativen Lösung von (C.1.2) für die konkrete Übungsaufgabe,

c) den zu erwartenden Fehlerdämpfungsfaktor (Konvergenzrate) ϱ für die konkrete Übungsaufgabe.

Rechnergestützter Teil: Lösen Sie (C.1.2) für alle Übungsaufgaben mittels des ω–Jacobi–Verfahrens (wählen Sie $\omega = 1$, $\omega = 2/3$, $\omega = \omega_{\text{opt}}$) bis zur relativen Genauigkeit 10^{-4} bzgl. der

Startlösung $\underline{u}^0 = 0$, gemessen in der Maximumnorm des Fehlers der iterativen zur exakten Lösung, d.h.

$$\| \underline{u}^* - \underline{u}^j \| = \max_{i=1,n} |u_i^* - u_i^j| \ .$$

Geben Sie den Fehler nach jeweils 1, 5, 10 Iterationen an (siehe Tabellen) !
Interpretieren Sie Iterationszahlen, und vergleichen Sie die praktisch erzielte Konvergenzrate mit der vorhergesagten !

$\boxed{1}$ $\quad \underline{f} = \lambda_1 \underline{\mu}_1$

$\boxed{2}$ $\quad \underline{f} = \lambda_n \underline{\mu}_n$

$\boxed{3}$ $\quad \underline{f} = \lambda_{(n+1)/2} \underline{\mu}_{(n+1)/2} + \lambda_n \underline{\mu}_n$

$\boxed{4}$ $\quad \underline{f} = \lambda_1 \underline{\mu}_1 + \lambda_n \underline{\mu}_n$

$\boxed{5}$ $\quad \underline{f} = \lambda_2 \underline{\mu}_2 + \lambda_{n-1} \underline{\mu}_{n-1}$

$\omega = 1$	It. bis rel. Fehler $< 10^{-4}$	Iteration 1	Iteration 5	Iteration 10
1				
2				
3				
4				
5				

$\omega = 2/3$	It. bis rel. Fehler $< 10^{-4}$	Iteration 1	Iteration 5	Iteration 10
1				
2				
3				
4				
5				

	1	2	3	4	5
ω_{opt}					
ϱ_{theo}					
It. bis rel. Fehler $< 10^{-4}$					
ϱ_{exp}					

C.1.2 Fehlerreduktion beim SOR–Verfahren

6 Ermitteln Sie am Computer näherungsweise für die rechten Seiten $\underline{f}$ in 1 – 5 das optimale ω zur Lösung von (C.1.2) mittels des SOR–Verfahrens (Gauß–Seidel–Verfahren mit Relaxationsparameter ω).

	1	2	3	4	5
ω_{opt}					
It. bis rel. Fehler $< 10^{-4}$					
ϱ_{exp}					

Numerik dünnbesetzter Systeme WS 95/96

P3-4 17.11.1995 ($13^{\underline{00}}$ – $14^{\underline{30}}$)

C.2 Multigridmethoden – Allgemeiner Aufbau

C.2.1 Speicher- und Programmiertechniken

Ausgehend von den notwendigen Komponenten der Multigridmethoden

- ▷ Glättung (ω-Jacobi, Gauß-Seidel, SOR)
- ▷ Restriktion (Injektion, lineare und bilineare Restriktion)
- ▷ Interpolation (linear und bilinear)
- ▷ Grobgitterlöser

werden für verschiedene Programmiersprachen (Pascal, C, Fortran, Fortran90) die Möglichkeiten der Speicherung/Adressierung der Sequenz von Feldern und der Realisierung des rekursiven Multigridalgorithmus erläutert.

C.2.2 Multigrid–Zyklenregime und Steuerung des Algorithmus

Nach einer Einführung in das Multigriddemonstrationsprogramm *pds* veranschaulichen Sie sich selbst die Wirkungsweise verschiedener Multigridkomponenten und -zyklenregime an Hand der Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\triangle u(x) &= f(x) \qquad\qquad x \in \Omega = (0,1)^2 \\ u\,|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

mit verschiedenen rechten Seiten $f(x)$. Nutzen Sie dabei auch die graphischen Möglichkeiten zur Kontrolle der Qualität der Lösung.
Die Startlösung der Multigriditeration ist stets identisch Null.

7 Veranschaulichen Sie sich mit Hilfe des Demonstrationsprogrammes *pds* den V-Zyklus, den W-Zyklus und den verallgemeinerten V-Zyklus für verschiedene Gitterzahlen (nur eine Multigriditeration).
Wodurch unterscheidet sich hiervon ein Full-Multigrid–Schritt ?

8 Führen Sie einen Iterationsschritt des V-Zyklus (lineare Interpolation und Restriktion) mit Bsp. 3 aus.

a) Benutzen Sie zur Vorglättung eine lexikographisch vorwärtige Gauß-Seidel–Iteration und zur Nachglättung eine lexikographisch rückwärtige Gauß-Seidel–Iteration.

b) Vertauschen Sie Vor- und Nachglättung in a).

Welche Unterschiede sind in der ersten Iteration der Lösung erkennbar ? Wodurch treten diese Unterschiede auf ?

$\boxed{9}$ Führen Sie einen Iterationsschritt des V-Zyklus (lineare Interpolation und Restriktion) mit Bsp. 2 auf 4 Gittern mit den folgenden Komponenten aus:

a) Ein $\omega\,(=0.8)$-Jacobi–Nachglättungsschritt mit bzw. ohne Full-Schritt.

b) Ein $\omega\,(=0.8)$-Jacobi–Vorglättungsschritt mit bzw. ohne Full-Schritt.

Welche Unterschiede treten im Aussehen der Lösung auf. Interpretieren Sie diese !
Was tritt insbesondere bei völligem Verzicht auf die Glättung auf ?

$\boxed{10}$ Reduzieren Sie in den Beispielen 1 – 4 auf 6 Gittern den Fehler der Lösung bis auf 10^{-4} in der K-Energienorm bzgl. des Ausgangsfehlers. Verwenden Sie einen V-Zyklus mit je einem Gauß-Seidel Vor- und Nachglättungsschritt. Untersuchen Sie das Verhalten der Iterationszahlen für die folgende Wahl von Restriktion/Interpolation:

a) Injektion / lineare Interpolation

b) lineare Restriktion / lineare Interpolation

c) bilineare Restriktion / bilineare Interpolation

Welche Schlußfolgerungen ergeben sich aus den Iterationszahlen ?

$\boxed{11}$ Lösen Sie ein Bsp. Ihrer Wahl mit einem Multigridzyklus Ihrer Wahl bis zur Genauigkeit von 10^{-8} für sämtliche verfügbare Gitterzahlen.
Was beobachten Sie bzgl. der theoretischen Optimalität des Algorithmus ?

Numerik dünnbesetzter Systeme WS 95/96

P5-6 1.12.1995 ($13^{\underline{00}}$ – $14^{\underline{30}}$)

C.3 Ein 1D–Multigrid–Programm

C.3.1 Die Komponenten des 1D–Multigrid–Programmes

Zu lösen ist die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \qquad x \in (0,1) \\ u(0) &= g_0 \\ u(1) &= g_1. \end{aligned} \tag{C.3.4}$$

Die Unterteilung des Intervalles $[0,1]$ erfolgt in N äquidistante Teilintervalle

$$x_i = ih = \frac{i}{N}, \quad i = 0, \ldots, N.$$

Eine Diskretisierung mittels eines 3-Punkte–Differenzensterns zur Approximation der 2. Ableitung von $u(x)$ liefert unter Beachtung der Dirichlet-RB das lineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1\cdot h^2 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & & & 0 & 1\cdot h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ f_1 + g_0 \cdot \frac{1}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} + g_N \cdot \frac{1}{h^2} \\ g_N \end{pmatrix}. \tag{C.3.5}$$

Benutzen Sie als Testbeispiele die Beispiele aus P1-2 sowie Gleichung (C.3.4) mit

$$f(x) = 2, \qquad u(0) = u(1) = \frac{1}{4}.$$

12 Schreiben Sie Unterprogramme

a) Jacobi (u, f, N, ω)

b) SOR (u, f, N, ω),

welche jeweils eine Iteration des Omega-Jacobi / SOR-Verfahrens realisieren. Lösen Sie die Testbeispiele mit Hilfe des entsprechenden Verfahrens, und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen in P1-2.

13 Implementieren Sie die lineare Interpolation und lineare Restriktion im 1D. Bilden Sie den Defektvektor, und restringieren Sie ihn auf das nächstgröbere Gitter ($h_{l-1} = 2h_l$).

14 Implementieren Sie für das tridiagonale System (C.3.5) einen direkten Löser (Thompson/Progonka, Gauß, LU). Lösen Sie damit Ihre Testbeispiele, kontrollieren Sie an Hand der exakten Lösung Ihr Unterprogramm.

Hinweis:
Beachten Sie die Dirichlet-RB. Welchen Wert werden die Randkomponenten des Defektvektors bekommen ?

Numerik dünnbesetzter Systeme WS 95/96

P7-8 15.12.1995 ($13^{\underline{00}}$ – $14^{\underline{30}}$)

C.3.2 Der Multigrid–Zyklus

15 Programmieren Sie unter Verwendung der in P5-6 erstellten Unterprogramme ein 1D–Multigridprogramm, welches die Testbeispiele lösen kann und folgende Steuerungsmöglichkeiten beinhalten soll:

- W-Zyklus, V-Zyklus, verallg. V-Zyklus
- Wahl verschiedener Glätter, Glättungsschritte, Omega
- Abbruchschranke des Mehrgitterverfahrens
- Maximale Anzahl von Iterationsschritten des Multigridverfahrens.

Konstruieren Sie die notwendige Gitterfolge

$$\omega_l \supset \omega_{l-1} \supset \cdots \supset \omega_1 \quad \text{mit} \quad h := h_l, \quad h_j := 2^{l-j} h,$$

und wählen Sie auf dem gröbsten Gitter $N = 2$ bzw. $N = 3$.

Hinweise:

- Implementieren Sie zuerst einen Zweigitteralgorithmus, und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der exakten Lösung.
- Testen Sie an einem Beispiel das Verhalten (Anzahl der Iterationen) des Mehrgitterverfahrens mit steigender Gitterzahl ($l = 10$), wenn Sie sie bis zu einer Genauigkeit von 10^{-4} bzw. 10^{-8} lösen.

Numerik dünnbesetzter Systeme WS 95/96

P9-10 12.01.1996 ($13^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{30}}$)

C.3.3 Ein 2D–Multigrid mit Neumann–Randbedingungen

Wir betrachten die folgende partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\triangle u(x,y) &= f(x) && \forall (x,y) \in \Omega = (0,1)^2 \\ u(x,y) &= g(x,y) && \forall (x,y) \in \Gamma_D \subset \partial\Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} &= \sigma(x,y) && \forall (x,y) \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \end{aligned} \tag{C.3.6}$$

mit $\Gamma_D \bigcup \Gamma_N = \partial\Omega = [0,1]^2 \setminus \Omega$.
Die Diskretisierung erfolgt mittels eines äquidistanten 5-Punkte Differenzensternes und liefert das Gleichungssystem $A\underline{u} = \underline{f}$. Vor dem Einbau der Randbedingungen ergibt sich für die Matrix A eine Pentadiagonalstruktur mit den Einträgen $h^{-2}\{-1,-1,4,-1,-1\}$ für die inneren Punkte und entsprechend reduzierte Einträge für die Randknoten. Auf dem gröbsten Gitter wird die Diskretisierungsschrittweite $h_1 := h_{1,x} = h_{1,y} = 1/2$ gewählt, und es gilt $h_{k+1} := .5 * h_k$ für $k = \overline{1, \ell - 1}$.

16 Der gegebene Programmcode realisiert die diskretisierte Gleichung (C.3.6) mit $\Gamma_D = \partial\Omega$, $g(x,y) \equiv 0$ und $f(x,y) \equiv 0$.
Implementieren Sie in dem gegebenen Programmcode (oder in Ihrem Programm) die Multigridvarianten

- verallg. V-Zyklus
- F-Zyklus
- Full-Multigrid.

Hinweise : Überprüfen Sie Ihre Implementation an Hand des zu erwartenden Konvergenzverhaltens im Vergleich zu bereits programmierten Zyklenregimen.

17* Realisieren Sie im Programm Neumannrandbedingungen, indem Sie die Komponenten Defekt, Glätter, Interpolation, Restriktion und Grobgittersolver entsprechend verändern, d.h. der veränderten Matrix Rechnung tragen. Überprüfen Sie Ihre Implementation an Hand der Beispiele

a) $g(x,y) = \sigma(x,y) \equiv 0,$ $\Gamma_N = \{1\} \times (0,1)$ und $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$
$u(x,y) = \sin(x \cdot \pi/2) \cdot y \cdot (1-y),$ $f(x,y) = \sin(x \cdot \pi/2) \cdot [1/2 - \pi^2/4 \cdot y \cdot (1-y)]$

b) $g(x,y) = \sigma(x,y) \equiv 0,$ $\Gamma_N = \{1\} \times (0,1) \bigcup (0,1) \times \{1\}$ und $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N$
$u(x,y) = \sin(x \cdot \pi/2) \cdot \sin(y \cdot \pi/2),$ $f(x,y) = \pi^2/2 \cdot \sin(x \cdot \pi/2) \cdot \sin(y \cdot \pi/2)$

Vereinfachung : Nutzen Sie Ihr 1D-Multigridprogramm, um eine analoge 1D-Aufgabe zu betrachten.