GEBIETSDEKOMPOSITIONS–METHODEN

(Ausgewählte Kapitel)

Ulrich Langer
Institut für Mathematik
Johannes Kepler Universität Linz

Wintersemester 1994/95 und 1996/97

Vorwort

Das vorliegende Vorlesungsskriptum entstand unmittelbar aus Vorlesungen, die der Autor im Wintersemester 1994/95 und im Wintersemester 1996/97 an der Johannes Kepler Universität Linz zu „Gebietsdekompositionsverfahren“ (2 SWS) gehalten hat. Dieser Vorlesungszyklus wurde ebenfalls an der TU Chemnitz (1990 – 1993) und in modifizierter Form 1994 an der Universität Kaiserslautern und 1997 in Mexiko [28] als Kompaktkurs gehalten.

Gebietsdekompositionsmethoden (= DD–Methoden = Domain Decomposition Methods) haben sich seit der ersten internationalen DD–Konferenz [10] 1987 in Paris stürmisch entwickelt. Dies betrifft sowohl die Theorie (z.B. die sogenannte „Schwarz-Machinary“) als auch die praktische Nutzung von DD-Techniken zur Entwicklung effizienter Applikationssoftware für Parallelrechner. Diese Entwicklung spiegelt sich ziemlich gut in den Proceedings der seit 1987 jährlich stattfindenden internationalen DD–Konferenzen wider [10, 5, 6, 36]. 1996 erschien die erste Monographie zu DD–Methoden von B. Smith, P. Bjorstad und W. Gropp, die eine ausgezeichnete Übersicht über die verschiedenen DD–Ideen und deren algorithmische Umsetzung gibt [38]. Aktuelle Informationen zu DD–Methoden findet man auf der DD–Home-Page **http://www.ddm.org**.

Im Mittelpunkt unserer Spezialvorlesung stehen ausschließlich **nichtüberlappende DD–Methoden**, die ihren Ursprung in der Finiten-Elemente-Substruktur-Technik haben. Wir beginnen im Kapitel 2 der Vorlesung mit einem kurzen historischen Überblick. Im Kapitel 3 wird der Weg von der klassischen Finiten-Elemente-Substruktur-Technik zur modernen iterativen Substruktur-Technik gegangen. Daraus werden im vierten Kapitel moderne ASM– und MSM–Präkonditionierer entwickelt und analysiert. Die Vorlesung setzt voraus, daß der Leser Grundkenntnisse zu Sobolev–Räumen, Randwertaufgaben, Variationsformulierungen, Diskretisierungstechniken (FEM) und Auflösungsverfahren, wie sie etwa in den Vorlesungen NUMERIK I [26], NUMERIK II [27] und MGM [25] vermittelt werden, besitzt. Vorkenntnisse aus der Spezialvorlesung „Parallelisierung und Vektorisierung numerischer Algorithmen“ von G. Haase [14] sind wünschenswert.

Das Skriptum wurde bewußt im Stile eines Vorlesungsmanuskriptes gehalten. Im Gegensatz zu vielen Lehrbüchern wurde auf „belletristische“ Ausschmückungen verzichtet. Die Lehrinhalte sollen schnell und kompakt erfaßbar sein. Es wird eine Vielzahl von Abkürzungen eingeführt. Die Abkürzungen **Ü x.x** und **(mms)** bedeuten harte Arbeit an der Materie. Das Lösen von Übungsaufgaben und das „Mach-Mal-Selbst“ ist angesagt. Das vorliegende Skriptum ist ein Arbeitspapier. Es ist kein Ersatz für den Vorlesungsbesuch und auch kein Ersatz für ein Lehrbuch, aber eine gute Vorbereitung auf die allfällige Prüfung.

Der Autor möchte an dieser Stelle seiner Sekretärin, Frau Doris Holzer, für die Erstellung und technische Überarbeitung des LaTeX–Files recht herzlich danken.

Ulrich Langer

Linz, den 28. Februar 1997

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Geschichtliches **4**

2.1 Die überlappende Gebietsdekompositionsmethode von Herman Schwarz (1869) 4

2.2 FEM-Substrukturtechnik 9

2.3 Überlappende und nichtüberlappende DD–Methoden zur Konstruktion paralleler Lösungsstrategien für PDgl. 10

3 Parallelisierung durch nichtüberlappende DD **12**

3.1 Die Finite-Elemente-Substrukturtechnik als Hintergrund für die nichtüberlappende DD 12

3.2 Drei verschiedene parallele Lösungsstrategien 18

3.2.1 Substrukturtechnik mit Assemblierung des Schur–Komplements (= klassische Technik) 18

3.2.2 Substrukturtechnik ohne Assemblierung des Schur–Komplements (In der Praxis: Schur–Komplement–CG) 20

3.2.3 Substrukturtechnik und iterative Lösung des Ausgangsproblems 24

3.3 Parallelisierung der konjugierten Gradientenmethode (CG–Verfahren) durch nichtüberlappende Gebietszerlegung 27

4 ASM– und MSM–Präkonditionierer im Spezialfall $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 : \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{O}\}$ **32**

4.1 ASM–Präkonditionierer 32

4.1.1 ASM–Algorithmus und seine Matrix–Darstellung 32

4.1.2 Spektraläquivalenzabschätzung 36

4.1.3 Inexakte Lösung der ASM–Teilprobleme 39

4.1.4 Die näherungsweise diskret harmonische Basis und der ASM–DD–Präkonditionierer 40

4.1.5 Zur Wahl der Komponenten $C_I,\ C_C,\ B_I$ bzw. B_{IC} (E_{IC}) im ASM–DD–Präkonditionierer 49

4.2 Der MSM–DD–Präkonditionierer 58

Kapitel 1

Einleitung

- **Domain Decomposition (DD) ?**
  = Grundwerkzeug zur Konstruktion paralleler PDE–Solver !

- **<u>Voraussetzungen:</u>**

  1. PDE = PDgl.:
     - Sobolev–Räume [26],
     - RWP [27],
     - Variationsformulierung [27].
  2. Finite-Elemente-Methode = FEM [27].
  3. Direkte und iterative Verfahren zur Lösung großdimensionierter Gleichungssysteme (GS) [27, 25].
  4. Multigrid-Methoden (MGM) [25].

- **<u>Literatur zu den Punkten 1. – 4.:</u>**

[1] **Adams R.A.:** Sobolev Spaces. Academic Press, San Francisco 1975.

[2] **Axelsson O., Barker V.A.:** Finite Element Solution of BVP. Academic Press, N.Y. 1984.

[12] **Grossmann Ch., Roos H.-G.:** Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner–Verlag, Stuttgart 1992.

[21] **Hackbusch W.:** Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme. Teubner–Verlag, Stuttgart 1991.

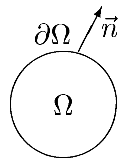
Literatur zu DD–Methoden:

[*] Proceedings der DD Konferenzen seit 1987: [10, 5, 6, 11, 23, 36, 24].

[29] Le Tallec P.: Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics. Computational Mechanics Advances, 1 (2), 1–220, 1994.

[38] Smith B., Bjorstad P., Gropp W.: Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic PDEs. Cambridge University Press, Cambridge 1996.

Einige Bezeichnungen:



$\Omega \subset \mathbb{R}^m (m = 1, \underline{\underline{2}}, 3)$ – beschränktes Gebiet, $\vec{n} = \vec{n}(x) = (n_1, \ldots, n_m)^T$

$\Gamma = \partial\,\Omega \in C^{0,1}$ – Lipschitz–stetiger Rand,

$\nabla u = \mathrm{grad}\,(u) := \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\right)^T$ – Gradient,

$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ – Laplace Operator, $\mathrm{div}\,(v) = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$, $v = (v_1, \ldots, v_m)^T$;

$C^k(\Omega),\ C^k(\bar{\Omega}),\ \overset{\bullet}{C}{}^k\ (\Omega), \ldots;$

$L_2(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbb{R}^1 : ||v||_0^2 := \int_\Omega v^2\,dx < \infty\} = H^0(\Omega),$

$H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ – Sobolev Hilbert–Räume:

$$
\begin{aligned}
&(\cdot,\cdot)_k = (\cdot,\cdot)_{k,\Omega} \text{ – Skalarprodukt,}\\
&\|\cdot\|_k = (\cdot,\cdot)_k^{0.5} \text{ – Norm, } |\cdot|_k \text{ – Seminorm,}\\
&k = 1 : (u,v)_1 := \int_\Omega (uv + \nabla^T u \nabla v)\,dx,\\
&\qquad \|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + |u|_1^2,\\
&\qquad |u|_1^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

$\mathring{H}^1\ (\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) :\ u = 0 \text{ auf } \Gamma\} \subset H^1(\Omega).$

Kapitel 2

Geschichtliches

2.1 Die überlappende Gebietsdekompositionsmethode von Herman Schwarz (1869)

- **1869 untersuchte H. Schwarz (1843 – 1921) die Existenz harmonischer Funktionen in Gebieten mit nichtglatten Rändern [37]:**

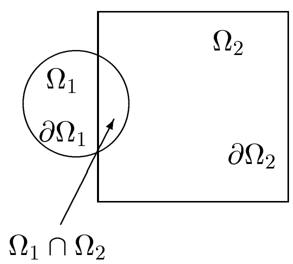
$$
(2.1) \quad \begin{cases} \underline{\text{Dirichlet–Problem für Laplace–Gleichung:}} \\ -\Delta u(x) = f(x) \equiv 0 \quad , \quad x \in \Omega : \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \\ \quad u(x) = g(x) \quad , \quad x \in \partial\,\Omega \end{cases}
$$

kompl.
∃ unbek. !

rel. einfach
∃ bekannt !
z.B. Fourier-Methode

rekursiv !

<u>Beispiel aus der Arbeit von Schwarz:</u>



- **Homogenisieren die RB mit dem Ansatz:**

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{bekannt !} & & \text{unbekannt !} \\ & & C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega) & & C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega) \\ & & \Cup & & \Cup \\ u(x) & = & g(x) & + & w(x): \end{array}$$

$$(2.1) \to (2.1)_0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Poisson–Gleichung mit homogenen Dirichlet-Bed.:}} \\ \text{Ges. } w \in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega) : \\ \begin{array}{rcll} -\Delta w(x) & = & f(x) := \Delta g(x) & , \quad x\in\Omega \\ w(x) & = & 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{array} \end{array} \right.$$

- **O. B. d. Allg. betrachten wir die Poisson–Gleichung mit homogenen Dirichlet–Bedingungen:**

$$(2.1)_0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ges. } u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega) : \\ -\Delta u(x) = f(x) \quad , \quad x\in\Omega, \qquad \bar\Omega = \bar\Omega_1 \cup \bar\Omega_2 \quad (\uparrow) \\ u(x) = 0 \qquad\qquad , \quad x\in\partial\Omega, \\ \text{mit } f \in C(\Omega) \text{ gegeben.} \end{array} \right.$$

1869 schlug H. Schwarz zur Lösung von $(2.1)_0$ den folgenden Algorithmus vor [37]:
→ <u>Alternierende Schwarzsche Methode</u>
= (spezielle) Multiplikative Schwarz Methode (MSM):

$(2.2)_{\text{KF}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0.\ u^0 \in X := C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega) : u^0|_{\partial\Omega} = 0 \text{ sei geg.:} \\ \quad \underline{\text{Iteration}}:\ n = 0,1,\ldots \\ 1.\ \tilde u^{n+1/2} \in C^2(\Omega_1)\cap C(\bar\Omega_1) : \ -\Delta\tilde u^{n+1/2}(x) = f(x),\ x\in\Omega_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \tilde u^{n+1/2}(x) = u^n(x),\ x\in\partial\Omega_1 \\ \quad u^{n+1/2}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde u^{n+1/2}(x), & x\in\bar\Omega_1 \\ u^n(x) & , x \in \overline{\Omega_2\setminus\Omega_1} = \bar\Omega_2\setminus\Omega_1 \end{array}\right. \\ 2.\ \tilde u^{n+1} \in C^2(\Omega_2)\cap C(\bar\Omega_2) : \ -\Delta\tilde u^{n+1}(x) = f(x),\ x\in\Omega_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \tilde u^{n+1}(x) = u^{n+1/2}(x),\ x\in\partial\Omega_2 \\ \quad u^{n+1}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde u^{n+1}(x) & , x\in\bar\Omega_2, \\ u^{n+1/2}(x), & x\in\bar\Omega_1\setminus\Omega_2. \end{array}\right. \end{array}}$$

<u>Konvergenzanalysis:</u> mit Maximumprinzip (siehe [37], [30]) !

■ **S. L. Sobolev (1936) [40]:**

$\rightarrow$ Minimumprinzip $\Longleftrightarrow$ Variationsformulierung

$(2.2)_{\mathrm{VF}}$

0. $u^0 \in \mathbf{V} = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ sei geg.

   Iteration: $n = 0, 1, \ldots$

1. $u^{n+1/2} = u^n + \mathbf{w^{n+1/2}}$ mit $\mathbf{w^{n+1/2}} \in \mathbf{V}_1 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_1) \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:

$$a(\mathbf{w^{n+1/2}}, v) = \underbrace{< F, v >}_{:=} - a(u^n, v) \equiv a(u - u^n, v) \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_1$$

$$a(\mathbf{w^{n+1/2}}, v) := \int_\Omega \nabla^T w^{n+1/2} \nabla v \, dx = \int_{\Omega_1} \nabla^T w^{n+1/2} \nabla v \, dx$$

$$< F, v > := \int_\Omega f(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega_1} f(x) v(x) \, dx$$

$$\boxed{J\big(u^n + w^{n+1/2}\big) = \min_{v \in \mathbf{V}_1} J(u^n + v)}$$

$$\mathbf{w^{n+1/2}} = P_1 \underbrace{(u - u^n)}_{=: z^n} = P_1\, z^n =$$ Orthoprojektion des Fehlers $z^n = u - u^n$ auf UR $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}$

2. $u^{n+1} = u^{n+1/2} + \mathbf{w^{n+1}}$ mit $\mathbf{w^{n+1}} \in \mathbf{V}_2 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_2) \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:

$$a(\mathbf{w^{n+1}}, v) = < F, v > - \, a(u^{n+1/2}, v) \equiv a(u - u^{n+1/2}, v) \ \ \forall v \in \mathbf{V}_2$$

$$a(\mathbf{w^{n+1}}, v) = \int_{\Omega_2} \nabla^T w^{n+1} \nabla v \, dx, \qquad < F, v > = \int_{\Omega_2} f(x) v(x) \, dx$$

$$\mathbf{w^{n+1}} = P_2 (u - u^{n+1/2}) = P_2\, z^{n+1/2}$$

wobei $a(u, v) := \int_\Omega \nabla^T u \nabla v \, dx, \ < F, v > := \int_\Omega f(x) v(x) \, dx,$

$P_i : \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}_i$ – Orthoprojektor bzgl. des energetischen Skalarproduktes $a(\cdot, \cdot)$:
↬ Ritzprojektor;

$a(P_i\, u, v) = a(u, v) \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_i$.

Konvergenzanalysis:

1. $J(u^n) := \frac{1}{2}\, a(u^n, u^n) - < F, u^n > \ \ \downarrow, \ \geq$ ✝
2. $J(u^{n+1} - u^n) \longrightarrow 0$
3. $\{u^n\}$ Cauchy–Folge ↬ $\exists$ Grenzwert $u \in \mathbf{V}$:
   $u^n \longrightarrow u \in \mathbf{V} : a(u, v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}$.

■ **Bemerkung 2.1:** (zur MSM in Variationsformulierung)

1. Btr. den Fehler $z^{n+1} = u - u^{n+1}$:

$$z^{n+1} = u - u^{n+1} = \underbrace{u - u^{n+1/2}}_{= z^{n+1/2}} - P_2\, z^{n+1/2} = (I - P_2) z^{n+1/2} =$$

$$= (I - P_2)(u - u^{n+1/2}) = (I - P_2)(\underbrace{u - u^n}_{= z^n} - P_1 z^n) =$$

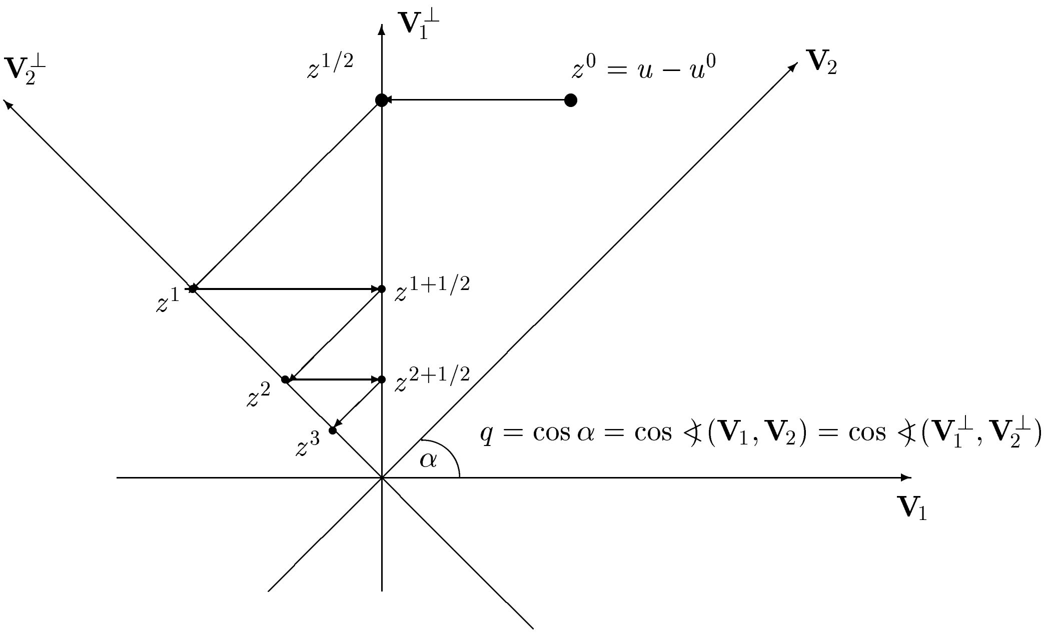
$$= \underbrace{(I - P_2)}_{= Q_2}\underbrace{(I - P_1)}_{= Q_1} z^n = Q_2\, Q_1\, z^n$$

$\|z^{n+1}\| \ \leq\ \|Q_2\, Q_1\|\, \|z^n\|$ mit $\|\cdot\|^2 = a(\cdot,\cdot)$.

Interpretation: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\ :\ \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{O}\}$ **!**

! Diese Eigenschaft ist für die überlappende DD von H. Schwarz nicht erfüllt !

$$\begin{array}{lcl} P_i & : & \mathbf{V} \longmapsto \mathbf{V}_i \\ Q_i = I - P_i & : & \mathbf{V} \longmapsto \mathbf{V}_i^{\perp} \end{array}$$



$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \|z^1\| &= q\,\|z^{1/2}\| \le q\,\|z^0\|, \\
\|z^{3/2}\| &= q\,\|z^1\| \le q^2\,\|z^0\|, \\
\|z^2\| &= q\,\|z^{3/2}\| \le q^3\,\|z^0\| \quad \text{usw.} \quad \boxed{\|z^n\| \le q^{2n-1}\,\|z^0\|}
\end{aligned}
$$

2. 2 Teilgebiete $\overset{\text{o.k.}}{\longmapsto}$ p Teilgebiete
   $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ $\qquad$ $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \ldots \cup \bar{\Omega}_p$
   $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ $\qquad$ $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots + \mathbf{V}_p$

3. Variationsformulierung $\overset{\text{o.k.}}{\longmapsto}$ Finite-Elemente-Modell
   $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \ldots + \mathbf{V}_p$ $\qquad$ $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_{1h} + \ldots + \mathbf{V}_{ph}$

4. Parallelisierung der MSM ??

5. Idee: M. Dryja + O. Widlund (1988) [9], S. Nepomnyaschikh + A. M. Matsokin (1985) [31]:
   $\longrightarrow$ Additive Schwarz Methode (ASM)

M S M $\longrightarrow$ A S M

M S M	A S M
$u - u^{n+1} = (I - P_2)(I - P_1)(u - u^n) = (I - P_1 - P_2 + \cancel{P_2P_1})(u - u^n)$	$u - u^{n+1} = (I - \tau P)(u - u^n)$
$u^{n+1} = (I - \wp)u^n + \wp\, u$ mit $\wp = P_1 + P_2 - \cancel{P_1P_2}$	$u^{n+1} = (I - \tau P)u^n + \tau P u$ mit $P = P_1 + P_2$
$\downarrow$	$\downarrow$

Verallgemeinerung auf $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \ldots + \mathbf{V}_p$

M S M	A S M
$u^{n+1} = (I - \wp)u^n + \wp u$ mit $\wp = I - (I - P_p)(I - P_{p-1}) :\,.\,: (I - P_1)$	$u^{n+1} = (I - \tau P)u^n + \tau P u$ mit $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_p$
$\longrightarrow$ schwer parallelisierbar !	$\longrightarrow$ offensichtlich parallelisierbar !

Später: Konvergenzanalysis, Anwendungen, Realisierung und Implementierung von MSM und ASM !

2.2 FEM-Substrukturtechnik

- **Seit den 60-er Jahren nutzen die Ingenieure in der FE-Analyse von Strukturen die sogenannte Substrukturtechnik:**

  $\longrightarrow$ Gründe:
  - Geringer interner Speicher (damals wenige KByte !) ↷ Notwendigkeit der Nutzung von externen Speichermedien !
  - Vereinfachtes FE-Pre- und Post-Processing !
  - etc.

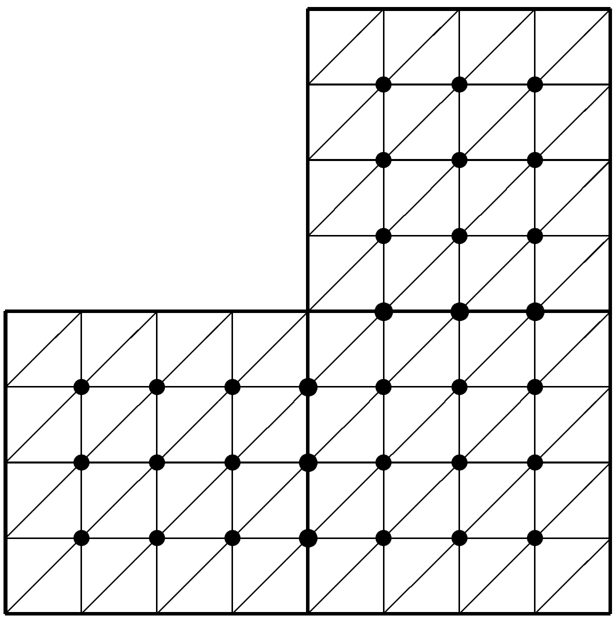
  $\longrightarrow$ [35] Prezemieniecki J. S.:
  Matrix Structural Analysis of Substructures.
  Am. Inst. Aeor. Astro. J., v.1, 1963.

- **Idee:** $\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{s=1}^{p} \underset{\uparrow}{\bar{\Omega}_s} : \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset,\ i \neq j.$

  Substrukturen (Superelemente, Teilgebiete)

  $\Gamma_C = \bigcup\limits_{s=1}^{p} \partial\,\Omega_s \setminus \underset{\uparrow}{\Gamma_D}$ = Koppelrand (Interfaces)

  Dirichlet-Rand



$\Gamma_D = \Gamma = \partial\Omega$

Bsp. 2: Modell-Problem „L-Gebiet“

$$\text{FEM} \Longrightarrow \begin{bmatrix} K_C & K_{CI} \\ K_{IC} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_C \\ \underline{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_C \\ \underline{f}_I \end{bmatrix}$$

$$K_I = \text{diag}\,[K_{I,s}]_{s=\overline{1,p}} = \begin{bmatrix} K_{I,1} & & & \mathbf{O} \\ & K_{I,2} & & \\ & & \ddots & \\ & \mathbf{O} & & K_{I,s} \end{bmatrix}$$

FEM–Substrukturtechnik
= Block–Gauß–Elimination
= Elimination von $\underline{u}_I$ aus den FE–Gleichungen:

$$\underline{u}_I = K_I^{-1}\,(\underline{f}_I - K_{IC}\underline{u}_C) = K_I^{-1}\,\underline{f}_I - K_I^{-1}\,K_{IC}\,\underline{u}_C$$
$$K_C\underline{u}_C + K_{CI}\,(K_I^{-1}\,\underline{f}_I - K_I^{-1}\,K_{IC}\,\underline{u}_C) = \underline{f}_C$$

$\Longrightarrow$ <u>FEM–Substruktur–Algorithmus:</u>

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{K_I\,\tilde{\underline{u}}_I = \underline{f}_I} & \\ S_C = K_C - K_{CI}\,\underline{K_I^{-1}\,K_{IC}} & \text{(Schur–Komplement)} \\ \underline{g}_C = \underline{f}_C - K_{CI}\,\tilde{\underline{u}}_I & \\ S_C\,\underline{u}_C = \underline{g}_C & \longrightarrow\ \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{C}} \\ \underline{K_I\,\underline{u}_I = \underline{f}_I - K_{IC}\,\underline{u}_C} & \longrightarrow\ \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{I}} \end{array}}$$

$\underline{\qquad\quad}$ kann völlig parallel durchgeführt werden !

2.3 Überlappende und nichtüberlappende DD–Methoden zur Konstruktion paralleler Lösungsstrategien für PDgl.

- **Seit Anfang der 80-er Jahre:**

$\longrightarrow$ <u>Mathematiker</u> begannen über die Benutzung der DD zur Konstruktion paraller „PDE–Solver“ nachzudenken
$\downarrow$
Y. Kuznetsov
S. Nepomnyaschikh
M. Dryja

- **Seit 1986/87 verstärktes Interesse an DD:**

$\longrightarrow$ Erste Transputer–Systeme:
$\hookrightarrow$ Durchbruch beim Preis-Leistungs–Verhältnis

$\longrightarrow$ Erste internationale DD–Konferenz in Paris (1987).

$\longrightarrow$ Internationale DD–Konferenzen seit 1987:

DD01: Paris (1987)	:	[10].
DD02: Los Angeles (1988)	:	[5].
DD03: Houston (1989)	:	[6].
DD04: Moskau (1990)	:	[11].
DD05: Norfolk (1991)	:	[23]
DD06: Como (1992)	:	[36].
DD07: Pen State University (1993)	:	[24].
DD08: Peking (1994)	:	Wiley & Sons.
DD09: Bergen (1996)	:	Wiley & Sons.
DD10: Boulder (1997)	:	Wiley & Sons.

■ **heute:**

- Praxis: Überlappende und nichtüberlappende DD zur Konstruktion paralleler Lösungsstrategien für PDgl. [29, 38].
- Theorie: Schwarz–Analysis: ASM – MSM [42, 29, 38].

Kapitel 3

Parallelisierung durch nichtüberlappende DD

3.1 Die Finite-Elemente-Substrukturtechnik als Hintergrund für die nichtüberlappende DD

■ **Btr. symmetrisches, V_0-elliptisches und V_0-beschränktes Variationsproblem**

(3.1) $$\boxed{\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_0 : a(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0,}$$

welches durch die schwache Formulierung einer RWA für eine skalare, elliptische PDgl. 2. Ordnung entstanden sei, wobei

$$a(\cdot,\cdot) \quad : \quad \mathbf{V}_0 \times \mathbf{V}_0 \quad \longrightarrow \quad I\!R^1\text{–Bilinearform;}$$
$$< \cdot,\cdot > \quad : \quad \mathbf{V}_0^* \times \mathbf{V}_0 \quad \longrightarrow \quad I\!R^1\text{–Dualitätsprodukt;}$$

$\mathbf{V}_0$ – Hilbert-Raum: $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{0.5}$, $(\cdot,\cdot)$;

$\mathbf{V}_0 \subset W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega) : \|\cdot\| = \|\cdot\|_{1,\Omega},\ (\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{1,\Omega}$;

$\mathbf{V}_0^*$ – dualer Raum;

$\Omega \subset I\!R^d\ (d=2),\ \partial\Omega \in C^{0,1}$,

und wir setzen voraus, daß

$$(3.2)\quad \begin{cases} 1) & F \in \mathbf{V}_0^* \text{ geg.} \\ 2) & a(\cdot,\cdot) : \mathbf{V}_0 \times \mathbf{V}_0 \to I\!R^1 - \text{bilinear:} \\ 2a) & \mathbf{V}_0 - \text{elliptisch: } \exists\, \mu_1 = \text{ const. } > 0 : a(v,v) \geq \mu_1 \|v\|^2 \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \\ 2b) & \mathbf{V}_0 - \text{beschränkt: } \exists\, \mu_2 = \text{ const. } > 0 : |a(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|\,\|v\| \quad \forall\, u,v \in \mathbf{V}_0, \\ 2c) & \text{symmetrisch: } a(u,v) = a(v,u) \quad \forall\, u,v \in \mathbf{V}_0 \end{cases}$$

Lax-Milgram–Satz: $\exists!\ \ldots$ (siehe Nu I [26] und Nu II [27])

- **Beispiele:** Siehe Nu II [27]

  1. Poisson–Gleichung unter homogenen Dirichletschen RB:

KF: $\begin{cases} -\Delta u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \Gamma = \Gamma_D = \partial\Omega. \end{cases}$

VF: Ges. $u \in \mathbf{V}_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) : \underbrace{\int_\Omega \nabla^T u \nabla v \, dx}_{=: a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{=: <F,v>} \qquad \forall v \in \mathbf{V}_0.$

$\boxed{\textbf{Ü 3.1}}$ Überprüfen Sie die Voraussetzungen (3.2), falls $f \in L_2(\Omega)$!

1) $| <F,v> | \leq \|f\|_0 \, \|v\|_0 \leq \|f\|_0 \, \|v\|_1$ o.k.

2) o.k.

2a) $a(v,v) = |v|^2_{1,\Omega} \underset{\uparrow}{\geq} (c_F^2 + 1)^{-1} \|v\|^2_{1,\Omega} \quad \forall v \in \mathbf{V}_0$, d.h. $\mu_1 = \frac{1}{c_F^2+1}$

Friedrichs-Ungleichung
$\|v\|_0^2 \leq c_F^2 |v|_1 \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

2b) $|a(u,v)| \leq |u|_1 |v|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u, v \in \mathbf{V}_0$, d.h. $\mu_2 = 1$

2c) o.k.

  2. Wärmeleitprobleme:

KF: $\begin{cases} -\operatorname{div}(\lambda(x)\nabla u(x)) + a(x)u(x) = f(x), \; x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \; x \in \Gamma_D = \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$

VF: Ges. $u \in \mathbf{V}_0 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) : \underbrace{\int_\Omega (\lambda(x)\nabla^T u \nabla v + a(x) u v) \, dx}_{=: a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{=: <F,v>} \qquad \forall v \in \mathbf{V}_0.$

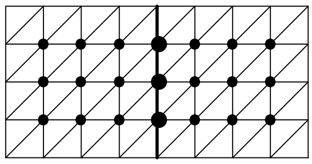
$\boxed{\textbf{Ü 3.2}}$ Überprüfen Sie die Vor. (3.2), falls $\lambda, a \in L_\infty(\Omega)$, $\lambda(x) \geq \underline{\lambda} = \text{const.} > 0$ $\forall$ f. ü. $x \in \Omega$, $a(x) \geq 0 \quad \forall$ f. ü. $x \in \Omega$ und $f \in L_2(\Omega)$!

- **Nichtüberlappende DD = Substrukturtechnik:**

$\bar{\Omega} = \bigcup_{s=1}^{p} \underset{\uparrow}{\bar{\Omega}_s} : \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \; i \neq j.$

Substrukturen = Superelemente = Teilgebiete

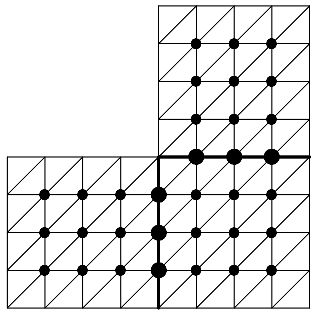
Beispiel 1 | **Beispiel 2**



Ω_1 Γ_C Ω_2

$\Gamma = \Gamma_D$

- „I“
- „C“



Ω_3

Ω_1 Ω_2

- $\Gamma_C = \bigcup\limits_{s=1}^{p} \partial\,\Omega_s \setminus \Gamma_D =$ Koppelrand (Interface)

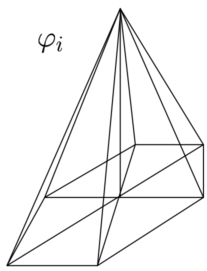
- $\underset{s=\overline{1,p}}{\bar\Omega_s} = \bigcup\limits_{r\in I\!R_{h,s}} \bar\delta_r \,:\, \bar\Omega = \bigcup\limits_{s=1}^{p} \bigcup\limits_{r\in I\!R_{h,s}} \bar\delta_r =$ konforme Triangularisierung von $\bar\Omega$

  $\uparrow$
  FE-Triangularisierung !

■ Knotenbasis (= Standarde FE–Basis):

$$\Phi = [\underbrace{\varphi_1,\ldots,\varphi_{N_C}}_{\mathbf{\Gamma_C}};\underbrace{\underbrace{\varphi_{N_C+1},\ldots,\varphi_{N_C+N_{I,1}}}_{\substack{\Omega_1\\ N_{I,1}}};\underbrace{\varphi_{N_C+N_{I,1}+1},}_{\substack{\Omega_2\\ N_{I,2}}}\ \cdots\ \underbrace{,\varphi_{N=N_C+N_I}}_{\substack{\Omega_p\\ N_{I,p}}}}_{\substack{\Omega_I \;=\; \Omega_1 \;\cup\; \Omega_2 \;\cup\; \ldots \;\cup\; \Omega_p\\ N_I \;=\; N_{I,1} \;+\; N_{I,2} \;+\; \ldots \;+\; N_{I,p}}}]$$

φ_i



● $\widehat{=}$ „C“ • $\widehat{=}$ „I“

■ FE–Räume:

$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{0h} = \operatorname{span}\Phi = \operatorname{span}\Phi V \subset \mathbf{V}_0,\;\; V = I$

$\uparrow$
h – Diskretisierungsparameter: $N = O(h^{-d}) \underset{\substack{\uparrow\\ d=2}}{=} O(h^{-2})$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_I : \quad \mathbf{V}_C = \operatorname{span} \Phi V_C = \operatorname{span}[\varphi_1, \ldots, \varphi_{N_C}],$$
$$\mathbf{V}_I = \operatorname{span} \Phi V_I = \operatorname{span}[\varphi_{N_C+1}, \ldots, \varphi_N],$$

mit

$$V_C = \begin{bmatrix} I_C \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}_{N_C \times N_C}, \quad V_I = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ I_I \end{bmatrix}_{N \times N_I}, \quad V = [V_C\, V_I] = I$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{I,s} &= \{v \in \mathbf{V}_I : \operatorname{supp} v \subset \bar{\Omega}_s\} = \\ &= \operatorname{span} \underbrace{[\varphi_{N_C+\ldots+N_{I,s-1}+1}, \ldots, \varphi_{N_C+\ldots+N_{I,s}}]}_{\rightsquigarrow \Omega_s} = \operatorname{span} \Phi V_{I,s} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_s) \end{aligned}$$

$$v \in \mathbf{V}_{I,s} \Rightarrow v|_{\bar{\Omega} \setminus \Omega_s} = 0, \text{ insbesondere: } v|_{\partial \Omega_s} = 0$$

$$\mathbf{V}_I = \mathbf{V}_{I,1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{V}_{I,p} \quad (\oplus \text{ bzgl. } (\cdot,\cdot)_0,\ (\cdot,\cdot)_1,\ a(\cdot,\cdot))$$

$$\mathbf{V}_s = \{v|_{\bar{\Omega}_s} : v \in \mathbf{V}\} = \operatorname{span}\{\varphi_i|_{\bar{\Omega}_s} : i \in \bar{\omega}_s\} \subset W_2^1(\Omega_s)$$

mit $\bar{\omega}_s = \{i : x^{(i)} = \text{Knoten} \in \bar{\Omega}_s\}$, $N_s = \dim \mathbf{V}_s = |\bar{\omega}_s|$.

- **FE–Isomorphismus (für gegebene Basis Φ):**

$$\mathbf{V} \ni u = \Phi V \underline{u} \quad = \quad \frac{\Phi\, \underline{u} = \sum_{i=1}^{N} u_i\, \varphi_i(x)}{\text{Nu II: } \sum_{i \in \omega_h} u^{(i)} p^{(i)}(x)} \quad \overset{\Phi}{\longleftrightarrow} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}_C \\ \underline{u}_I \end{bmatrix} \in I\!R^N$$

- **FE–Galerkin–Schema $\overset{\Phi}{\longleftrightarrow}$ FE–Gleichungen:**

$$\begin{array}{llcll} (3.1)_h & u = \Phi V \underline{u} \in \mathbf{V} : & a(\Phi V \underline{u}, \Phi V \underline{v}) & = & < F, \Phi V \underline{v} > \quad \forall\, v = \Phi V \underline{v} \in \mathbf{V} \\ \updownarrow & & \| & & \quad \| \qquad\qquad \updownarrow \\ & & (KV\underline{u}, V\underline{v}) & = & (\underline{f}, V\underline{v}) \qquad \forall\, \underline{v} \in I\!R^N \\ (\underline{3.1})_h & \underline{u} \in I\!R^N : & V^T K V \underline{u} & = & V^T \underline{f}, \text{ d.h. } K\underline{u} = \underline{f} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} K_C & K_{CI} \\ K_{IC} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_C \\ \underline{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_C \\ \underline{f}_I \end{bmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} K_I &= \operatorname{diag}[K_{I,s}]_{s=\overline{1,p}} : & (K_I \underline{u}_I, \underline{v}_I) &= a(\Phi V_I \underline{u}_I, \Phi V_I \underline{v}_I) \\ &= K_I^T \text{ p.d.} & &= \sum_{s=1}^{p} a(\Phi V_{I,s} \underline{u}_{I,s}, \Phi V_{I,s} \underline{v}_{I,s}) \\ &\text{spd} & &= \sum_{s=1}^{p} (K_{I,s} \underline{u}_{I,s}, \underline{v}_{I,s}), \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } K_{I,s} \overset{\text{FE}}{\simeq} \left\{ \begin{array}{l} \text{PDgl. in } \Omega_s \\ u = 0 \text{ auf } \partial \Omega_s \end{array} \right\},$$

$$\begin{array}{lcllcl} K_C & = & K_C^T \text{ p.d.}: & (K_C\underline{u}_C, \underline{v}_C) & = & a(\Phi\, V_C\underline{u}_C, \Phi\, V_C\underline{v}_C), \\ K_{IC} & = & K_{CI}^T: & (K_{IC}\underline{u}_C, \underline{v}_I) & = & a(\Phi\, V_C\underline{u}_C, \Phi\, V_I\underline{v}_I) \end{array}$$

- **DD–Assemblierung:** (Bsp.: Wärmeleitung)

$$(K\underline{u}, \underline{v}) \;=\; a(u,v) = \sum_{s=1}^{p} \underbrace{\int_{\Omega_s} (\underset{\lambda_s = \text{ const. } > 0}{\underset{\|}{\lambda(x)}}\ \nabla^T u\ \ \nabla v \ \ \overset{\text{z.B.}}{+}\ \ \underset{a_s = \text{ const. } \geq 0}{\underset{\|}{a(x)}}\ uv)\, dx}_{\substack{= \ a_s(u,v) \\ = \text{ Teilgebietsbilinearform}}}$$

$$= \sum_{s=1}^{p} (\overset{N_s \times N_s}{K_s}\, \underline{u}_s, \underline{v}_s)$$

$$= \sum_{s=1}^{p} \left(\begin{bmatrix} K_{C_s} & K_{C_s I_s} \\ K_{I_s C_s} & K_{I_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{C_s} \\ \underline{u}_{I_s} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{u}_{C_s} \\ \underline{u}_{I_s} \end{bmatrix} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{K = \sum_{s=1}^{p} A_s^T\, K_s\, A_s} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{K_s}_{s=\overline{1,p}} \;\widehat{=}\; \bar{\Omega}_s,$$

wobei

$$A_s = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} N_{C_0} & \qquad\qquad N_I \end{array} \\ \begin{array}{c} N_{C_s} \\ \\ N_{I_s} \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \end{matrix} & \boldsymbol{O} \\ \hline \boldsymbol{O} & \begin{matrix} & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{matrix} \end{array}\right]_{N_s \times N} \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} A_{C_s} & \boldsymbol{O} \\ \hline \boldsymbol{O} & A_{I_s} \end{array}\right]$$

= Teilgebiete ($\bar{\Omega}_s$) – Zusammenhangsmatrix (Boolean–Matrix)

$$A_s^T = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} N_C \\ \\ N_I \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{matrix} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \begin{matrix} 0 & & & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 11 & \\ & & & 0 \end{matrix} \end{array}\right]_{N \times N_s} \end{array}$$

$$(K_s\underline{u}_s, \underline{v}_s) = a_s(u_s, v_s) \qquad \underset{\in\, \mathbb{R}^{N_s}}{\forall\ \underline{u}_s, \underline{v}_s} \ \ \longleftrightarrow\ u_s, v_s \in \mathbf{V}_s$$

Ähnlich wird die RS $\underline{f} = [\underline{f}_s]_{s=\overline{1,p}}$ teilassembliert:

$$\boxed{\underline{f} = \sum_{s=1}^{p} A_s^T \underline{f}_s} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\boxed{\underline{f}_s = \begin{bmatrix} \underline{f}_{C_s} \\ \underline{f}_{I_s} \end{bmatrix}}_{s=\overline{1,p}}}_{\bar{\Omega}_s}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\left(\underline{f}_{C_s}, \underline{v}_{C_s}\right) &= \; < F, v > \quad \forall\, \underline{v}_{C_s} \leftrightarrow v = \operatorname{span}\{\varphi_i : i \in \partial\,\omega_s\}, \\
\left(\underline{f}_{I_s}, \underline{v}_{I_s}\right) &= \; < F, v > \quad \forall\, \underline{v}_{I_s} \leftrightarrow v \in \mathbf{V}_{I_s} = \mathbf{V}_{I,s} \\
\left(\underline{f}_{s}, \underline{v}_{s}\right) &= \; < F, v > \quad \forall\, \underline{v}_{s} \leftrightarrow v \in \mathbf{V}_{s}
\end{aligned}$$

■ Darstellung von $\mathbf{K}\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{f}}$ und $\mathbf{S_C}\underline{\mathbf{u}}_\mathbf{C} = \underline{\mathbf{f}}_\mathbf{C}$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc}
\sum\limits_{s=1}^{p} A_{C_s}^T K_{C_s} A_{C_s} & A_{C_1}^T K_{C_1 I_1} & A_{C_2}^T K_{C_2 I_2} & \dots & A_{C_p}^T K_{C_p I_p} \\
\hline
K_{I_1 C_1} A_{C_1} & K_{I_1} & & \mathbf{O} & \\
K_{I_2 C_2} A_{C_2} & & K_{I_2} & & \\
\vdots & \mathbf{O} & & \ddots & \\
K_{I_p C_p} A_{C_p} & & & & K_{I_p}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\underline{u}_C \\
\hline
\underline{u}_{I_1} \\
\underline{u}_{I_2} \\
\vdots \\
\underline{u}_{I_p}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\sum\limits_{s=1}^{p} A_{C_s}^T \underline{f}_{C_s} \\
\hline
\underline{f}_{I_1} \\
\underline{f}_{I_2} \\
\vdots \\
\underline{f}_{I_p}
\end{array}\right]$$

$$\underline{u}_{I_s} = K_{I_s}^{-1} \underline{f}_{I_s} - K_{I_s}^{-1} K_{I_s C_s} A_{C_s} \underline{u}_C$$

$$\underbrace{\sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T \underbrace{\left(K_{C_s} - K_{C_s I_s} K_{I_s}^{-1} K_{I_s C_s}\right)}_{S_{C_s}} A_{C_s}}_{S_C} \underline{u}_C = \underbrace{\sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T \underbrace{\left(\underline{f}_{C_s} - K_{C_s I_s} K_{I_s}^{-1} \underline{f}_s\right)}_{\underline{g}_{C_s}}}_{\underline{g}_C := \underline{f}_C - K_{CI} K_I^{-1} \underline{f}_I}$$

3.2 Drei verschiedene parallele Lösungsstrategien

3.2.1 Substrukturtechnik mit Assemblierung des Schur–Komplements (= klassische Technik)

■ **Algorithmus 1:**

1. FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL

   - Generiere $K_{C_s}, K_{I_s}, K_{C_sI_s}$ $(K_{I_sC_s}), \underline{f}_{C_s}, \underline{f}_{I_s}$
   - Bestimme $W_{I_sC_s} = K_{I_s}^{-1} K_{I_sC_s}$ durch Lösen der N_{C_s} GS

     $$K_{I_s} W_{I_sC_s} = K_{I_sC_s} \longleftarrow \begin{cases} \text{a)} & \text{direkt: o.k.} \\ \text{b)} & \text{iterativ: ? (Genauigkeit)} \end{cases}$$

     mit der gleichen Systemmatrix K_{I_s} (1× faktorisieren !) und N_{C_s} rechten Seiten, analog, $\underline{w}_{I_s} = K_{I_s}^{-1} \underline{f}_{I_s}$,

     $$K_{I_s} \underline{w}_{I_s} = \underline{f}_{I_s} \longleftarrow \begin{cases} \text{a)} & \text{direkt} \\ \text{b)} & \text{iterativ} \end{cases}$$

   - Berechne
     $$\begin{aligned} S_{C_s} &= K_{C_s} - K_{C_sI_s} W_{I_sC_s} \\ \underline{g}_{C_s} &= \underline{f}_{C_s} - K_{C_sI_s} \underline{w}_{I_s} \end{aligned}$$

2. Assembliere (mit Kommunikation):

   $$S_C = \sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T S_{C_s} A_{C_s} \quad \text{und} \quad \underline{g}_C = \sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T \underline{g}_{C_s}$$

3. Löse (Parallelisierung ??)

   $$S_C \underline{u}_C = \underline{g}_C \longleftarrow \begin{cases} \text{a)} & \text{direkt} \\ \text{b)} & \text{iterativ: } \curvearrowright \text{ Pkt. 3.2.2 !} \end{cases}$$

4. FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL

   - $\underline{u}_{C_s} = A_{C_s} \underline{u}_C$ (Wähle $\underline{u}_{C_s}$ aus $\underline{u}_C$)
   - Bestimme $\underline{u}_{I_s}$ als Lösung des GS

     $$K_{I_s} \underline{u}_{I_s} = \underline{f}_{I_s} - K_{I_sC_s} \underline{u}_{C_s} \longleftarrow \begin{cases} \text{a)} & \text{direkt} \\ \text{b)} & \text{iterativ} \end{cases}$$

■ Nachteile des Algorithmus 1:

1. Hohe Komplexität der arithmetischen Operationen und des Speicherplatzbedarfs !

   $\longmapsto$ (Asympt.) optimaler Algorithmus:

   - Q_s = Anzahl der arithm. Operationen pro Prozessor $= O(N_s)$,
   - M_s = Speicherplatzbedarf pro Prozessor $= O(N_s)$,

   wobei $N_s = O(h_s^{-d}) = \left\{ \begin{array}{l} O(h_s^{-2}),\ \text{2D} \\ O(h_s^{-3}),\ \text{3D} \end{array} \right\}$ Unbekannte pro Prozessor !

   $\longmapsto$ Hier ($\curvearrowright$ Q_s):

   (a) direkt: $Q_s = \left\{ \begin{array}{lll} O(h_s^{-4}) & \text{für} \quad d=2 & \text{(2D)} \\ O(h_s^{-7}) & \text{für} \quad d=3 & \text{(3D)} \end{array} \right.$

   (b) iterativ: $Q_s = \left\{ \begin{array}{ll} O(h_s^{-3} \ln \varepsilon^{-1}) & \text{für} \quad d=2 \\ O(h_s^{-5} \ln \varepsilon^{-1}) & \text{für} \quad d=3 \end{array} \right.$,

   falls optimale Iterationsverfahren (z.B. Multigrid-Methoden) benutzt werden, wobei $\varepsilon = O(\text{Diskretisierungsfehler})$

   + Aufwand zum Lösen (?) des Schur–Komplement–Problems $S_C \underline{u}_C = \underline{g}_C$!

   $$\begin{array}{ccc} \text{2D} & & \text{3D} \\ O(h^{-3}) & \text{bzw.} & O(h^{-6}) \\ & \text{direkt} & \end{array}$$

2. Hoher Kommunikationsaufwand !
   - $S_C = \sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T S_{C_s} A_{C_s}$ (Schur–Komplement–Assemblierung !)
   - $S_C \underline{u}_C = \underline{g}_C$ (Schur–Komplement–Solver ?)

■ Vorteile des Algorithmus 1:

$\longrightarrow$ Robustheit !

$\longrightarrow$ Sofort auf nichtsymmetrische Probleme übertragbar !

3.2.2 Substrukturtechnik ohne Assemblierung des Schur–Komplements (In der Praxis: Schur–Komplement–CG)

- **<u>Idee:</u>** Löse

$$S_C \, \underline{u}_C \;=\; \underline{g}_C$$

iterativ, z.B. mittels <u>Richardson–Iteration</u> oder mittels CG–Verfahren (in der Praxis !) !
→ siehe Pkt. 3.3

- **<u>Vorteile:</u>**

1. Man benötigt nur die Operation

$$\begin{aligned} S_C \, * \, \underline{u}_C \;&=\; \sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T S_{C_s} \underbrace{A_{C_s} \underline{u}_C}_{= \underline{u}_{C_s}} \\ &=\; \sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T (K_{C_s} - K_{C_s I_s} K_{I_s}^{-1} K_{I_s C_s}) \, \underline{u}_{C_s} \\ &=\; \sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T (K_{C_s} \underline{u}_{C_s} - K_{C_s I_s} \underline{K_{I_s}^{-1} K_{I_s C_s} \underline{u}_{C_s}}) \end{aligned}$$

   - Keine Assemblierung des Schur–Komplements S_C nötig !
   - Nur (völlig parallele) Assemblierung der Teilgebietsmatrizen:
     → $K_{C_s}, K_{I_s}, K_{I_s C_s}, K_{C_s I_s}, \ldots$
   - Lösung der p Systeme
     $K_{I_s} \underline{w}_{I_s} = K_{I_s C_s} \underline{u}_{C_s} \in I\!R^{N_s}, \quad s = \overline{1,p}$
     kann völlig parallel durchgeführt werden (bei iterativer Lösung muß Genauigkeit in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers liegen !)
   - Assembliert werden muß nur der verteilt vorliegende Vektor $(S_{C_s} \underline{u}_{C_s})$, d.h.
     $\sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T (\underline{\text{Vektor}}_{\,C_s})$
     → "Nearst–Neighbour (NN)" Kommunikation !

2. $\kappa(S_C) := \dfrac{\lambda_{\max}(S_C)}{\lambda_{\min}(S_C)} \ll \kappa(K)$

   d.h. die Elimination der inneren Unbekannten $\underline{u}_I$ hat selbst schon einen starken Vorkonditionierungseffekt ! (vgl. auch $\boxed{\text{Ü 3.3}}$).

   Im Falle PDgl. 2. Ordnung gilt:
   $\kappa(S_C) = O(h^{-1})$, während $\kappa(K) = O(h^{-2})$!
   (vgl. [38] und NuII [27])

■ $\boxed{\textbf{Ü 3.3}}$ Man zeige:

a) $\lambda_{\max}(S_C) \leq \lambda_{\max}(K)$
b) $\lambda_{\min}(S_C) \geq \lambda_{\min}(K)$

Tatsächlich,

$$\text{a)}\quad \underline{\lambda_{\max}(S_C)} = \max_{\substack{\underline{v}_C \in \mathbb{R}^{N_C} \\ \underline{v}_C \neq \mathbf{O}}} \frac{(S_C \underline{v}_C, \underline{v}_C)}{(\underline{v}_C, \underline{v}_C)} \overset{!}{=}$$

$$\overset{!}{=} \max_{\underline{v} \in \mathbb{D}} \frac{(K\underline{v}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underset{\underline{\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N}}{\underset{\uparrow}{\leq}} \max_{\underline{v} \in \mathbb{R}^N} \frac{(K\underline{v}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} = \lambda_{\max}(K),$$

$$\text{b)}\quad \lambda_{\min}(S_C) = \min_{\substack{\underline{v}_C \in \mathbb{R}^{N_C} \\ \underline{v}_C \neq \mathbf{O}}} \frac{(S_C \underline{v}_C, \underline{v}_C)}{(\underline{v}_C, \underline{v}_C)} \overset{!}{=}$$

$$\overset{!}{=} \min_{\underline{v} \in \mathbb{D}} \frac{(K\underline{v}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underset{\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^N}{\underset{\uparrow}{\geq}} \min_{\underline{v} \in \mathbb{R}^N} \frac{(K\underline{v}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} = \lambda_{\min}(K),$$

wobei $\mathbb{D} := \left\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^N : \underline{v}_I = -K_I^{-1} K_{IC} \underline{v}_C, \underline{v}_C \in \mathbb{R}^{N_C} \right\} \subset \mathbb{R}^N.$
– Raum der diskret harmonischen Vektoren !

■ **Algorithmus 2:** (Iterationsmethode = Richardson–Iteration, aber in der Praxis: CG–Iteration !): $\tau^{-1} C_C(\underline{u}_C^{n+1} - \underline{u}_C^n) + S_C \underline{u}_C^n = \underline{g}_C$

1. FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL
   - Generiere $K_{C_s}, K_{I_s}, K_{C_s I_s}$ $(K_{I_s C_s}), \underline{f}_{C_s}, \underline{f}_{I_s}$;
   - Faktorisiere $\mathbf{K_{I_s}} = L_{I_s} D_{I_s} L_{I_s}^T$ (oder Cholesky-Fakor.);
   - Bestimme $\underline{g}_{C_s} = \underline{f}_{C_s} - K_{C_s I_s} \mathbf{K_{I_s}^{-1}} \underline{f}_{I_s}$;
2. Wähle Anfangsnäherung $\underline{u}_C^0 : \underline{u}_{C_s}^0 = A_{C_s} \underline{u}_C^0, \quad s = \overline{1, p}$;
3. FOR $n = 0$ STEP 1 TO Convergence DO
   – FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL
   - Berechne $\underline{v}_{C_s}^n = K_{C_s} \underline{u}_{C_s}^n - K_{C_s I_s} \mathbf{K_{I_s}^{-1}} K_{I_s C_s} \underline{u}_{C_s}^n$;
   - Berechne den Defekt
     $\underline{d}_{C_s}^n = \underline{g}_{C_s} - \underline{v}_{C_s}^n$;

– Assembliere den Defekt

$$\underline{d}_C^n = \sum_{s=1}^{p} A_{C_s}^T \underline{d}_{C_s}^n \qquad \text{(NN–Kommunikation !);}$$

– Löse die Vorkonditionierungsgleichung für das Schur–Komplement

$$\mathbf{C_C} \underline{w}_C^n = \underline{d}_C^n \qquad \text{("Cross-Point (CP)"–Kommunikation ?);}$$

– FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL

$$\underline{w}_{C_s}^n = A_{C_s} \underline{w}_C^n, \;\; \underline{u}_{C_s}^{n+1} = \underline{u}_{C_s}^n + \tau_n \underline{w}_{C_s}^n;$$

4. FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL

$$\underline{u}_{I_s} = \mathbf{K_{I_s}^{-1}} (\underline{f}_{I_s} - K_{I_s C_s} \underbrace{\underline{u}_{C_s}^{n_*}}_{\uparrow})$$

letzte Iterierende !

Bemerkung 3.1:

1. Aufwand
   - vor der Iteration:

	2D	3D
$\mathbf{K_{I_s}} = L_{I_s} D_{I_s} L_{I_s}^T$	$O(h_s^{-4})$	$O(h_s^{-7})$
$\underline{g}_{C_s} = \underline{f}_{C_s} - K_{C_s I_s} \mathbf{K_{I_s}^{-1}} \underline{f}_{I_s}$	$O(h_s^{-3})$	$O(h_s^{-5})$

   - nach der Iteration:

$\underline{u}_{I_s} = \mathbf{K_{I_s}^{-1}} (\underline{f}_{C_s} - K_{I_s C_s} \underline{u}_{C_s}^{n_*})$	$O(h_s^{-3})$	$O(h_s^{-5})$

2. Aufwand in jedem Iterationsschritt:
   (a) $K_{C_s I_s} \mathbf{K_{I_s}^{-1}} K_{I_s C_s} \underline{u}_{C_s}^{n_*} \longrightarrow$ direkt: $O(h_s^{-3})$ $O(h_s^{-5})$
   $\longrightarrow$ iterativ ? Genauigkeit ?
   (b) $\mathbf{C_C} \underline{w}_C^n = \underline{d}_C^n$ (siehe Bemerkung 3.1.4)

3. Konvergenz: $C_C = C_C^T$ p.d., $\exists\, \underline{\gamma}_C, \bar{\gamma}_C = \text{const.} > 0$:

$$\underline{\gamma}_C C_C \le S_C \le \bar{\gamma}_C C_C$$

   - Richardson–Iteration: $\|\underline{u}_C - \underline{u}_C^n\|_{S_C} \le q^n \, \|\underline{u}_C - \underline{u}_C^0\|_{S_C}$,

$$q = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \;\; \xi = \underline{\gamma}_c / \bar{\gamma}_C,$$

   für $\tau_n = \tau_{\text{opt}} = 2/(\underline{\gamma}_C + \bar{\gamma}_C)$.

   - PCG: $\|\underline{u}_C - \underline{u}_C^n\|_{S_C} \le q_n \, \|\underline{u}_C - \underline{u}_C^0\|_{S_C}$,

$$q_n = \frac{2\rho^n}{1+\rho^{2n}}, \;\; \rho = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}$$

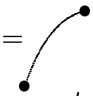
4. <u>Schur–Komplement–Präkonditionierer C_C:</u>
   - $C_C = I_C$ (keine Präkonditionierung):

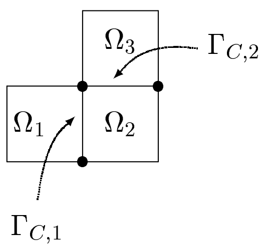
     $$\underline{c}hI_C \le S_C \le \bar{c}I_C,$$

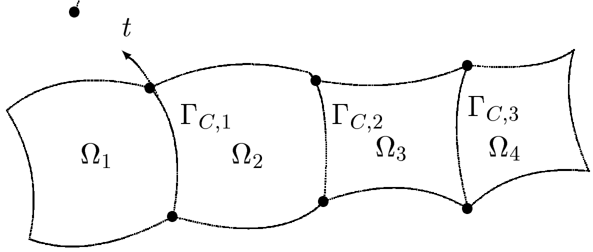
     d.h. $\underline{\gamma}_C = \underline{c}h,\ \ \bar{\gamma}_C = \bar{c} \ \curvearrowright\ \xi = O(h)$.

     CG: $I(\varepsilon) = O(h^{-0.5}\ln\varepsilon^{-1})$ Iterationen (Vgl. $\boxed{\text{Ü 3.3}}$).

   - Dryja–Präkonditionierer für eine <u>„streifenartige“</u> Gebietszerlegung mit nicht zu vielen Streifen (p klein):

     z.B.: 2D: $\Gamma_C = \bigcup\limits_{j=1}^{q} \Gamma_{C,j}$, $\qquad \Gamma_{C,j} =$  offen !

     $$C_C = \operatorname{diag}\,[C_{C,j}]_{j=\overline{1,q}}$$

     $$C_{C,j} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \mathbf{O} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{O} & & & -1 & 2 \end{bmatrix}^{0.5} \approx \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-\dfrac{d^2u}{dt^2}} \text{ auf } \Gamma_{C,j} \\ u(t) = 0 \text{ in } t \in \partial\Gamma_{C,j} \end{array} \right.$$

     <u>Es gilt:</u> $\underline{\gamma}_C = \underline{c},\ \ \bar{\gamma}_C = \bar{c}$, mit $\underline{c}, \bar{c} \ne c(h)$
     (aber $\underline{c}, \bar{c} = c(p)$!) $\ \curvearrowright\ \xi = O(1)$ [7, 8].

     <u>PCG:</u> $I(\varepsilon) = O(\ln\varepsilon^{-1})$ Iterationen.

   - BPS für „boxartige“ Zerlegung [3],
     Hierarchische Schur–Komplement–Präkonditionierer [39, 16, 17],
     BPX–Schur–Komplement–Präkonditionierer [41] etc.

3.2.3 Substrukturtechnik und iterative Lösung des Ausgangsproblems

- **Idee:** Iteriere (mit Richardson–Iteration oder CG) das Ausgangsproblem $K\underline{u} = \underline{f}$, und benutze die Substrukturtechnik zur Datenaufteilung (data partitioning) und zur Konstruktion des Präkonditionierers (DD–Preconditioner).

- **Algorithmus 3:** (hier: Richardson–Iteration; Pkt. 3.3: CG)

1. FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL
   - Generiere $K_{C_s}, K_{I_s}, K_{C_sI_s}\ (K_{I_sC_s}), \underline{f}_{C_s}, \underline{f}_{I_s}$;
2. Wähle Anfangsnäherung $\underline{u}^0 = \begin{bmatrix} \underline{u}_C^0 \\ \underline{u}_I^0 \end{bmatrix}$: $\left.\begin{array}{lcl} \underline{u}_{C_s}^0 & = & A_{C_s}\underline{u}_C^0 \\ \underline{u}_{I_s}^0 & = & A_{I_s}\underline{u}_I^0 \end{array}\right\}\ s = \overline{1, p}$;
3. FOR $n = 0$ STEP 1 TO Convergence DO
   - FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL

     Berechne den „Teilgebietsdefekt“

     $$\underline{d}_s^n \equiv \begin{bmatrix} \underline{d}_{C_s}^n \\ \underline{d}_{I_s}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{f}_{C_s} \\ \underline{f}_{I_s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{C_s} & K_{C_sI_s} \\ K_{I_sC_s} & K_{I_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{C_s}^n \\ \underline{u}_{I_s}^n \end{bmatrix};$$

   - Assembliere den Defekt:

     ? $\quad \underline{d}^n = \sum_{s=1}^{p} A_s^T \underline{d}_s^n$ (NN–Kommunikation !);

   - Löse das Vorkonditionierungsproblem: $C\underline{w}^n = \underline{d}^n$ (CP–Kommunikation)
   - FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL

     $$\underline{w}_s^n = A_s \underline{w}^n; \quad \underline{u}_s^{n+1} \equiv \begin{bmatrix} \underline{u}_{C_s}^{n+1} \\ \underline{u}_{I_s}^{n+1} \end{bmatrix} = \underline{u}_s^n + \tau_n \underline{w}_s^n$$

- **Hauptproblem:** Konstruktion eines Präkonditionierers $C = C^T$ p.d.:

1. $\underline{\gamma} C \leq K \leq \bar{\gamma} C : \kappa(C^{-1}K) \ll \kappa(K)$

   Ziel: $\kappa(C^{-1}K) \leq \bar{\gamma}/\underline{\gamma} = \xi^{-1} = O(1)$ klein !

   PCG: $\|\underline{u} - \underline{u}^n\|_K \leq q_n \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_K$

   $$q_n = \frac{2\rho^n}{1+\rho^{2n}}, \quad \rho = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}$$

2. $C\underline{w}^n = \underline{d}^n$ bzw. $\underline{w}^n = C^{-1} * \underline{d}^n$ sollte
   - schnell (Ziel: $O(h^{-d})$ Operationen) und
   - parallel (zusätzlich nur CP–Kommunikation !)

   lösbar bzw. ausführbar sein.

■ Erste Vorschläge zur Konstruktion von DD–Präkonditionierern *C*:

1.

$$C = \begin{bmatrix} I_C & K_{CI}K_I^{-1} \\ \mathbf{O} & I_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C & \mathbf{O} \\ K_I^{-1}K_{CI} & I_I \end{bmatrix} = K \tag{3.3}$$

- $\curvearrowright$ $\underline{\gamma} = \bar{\gamma} = 1$ $\curvearrowright$ 1 Iteration = klassische Substrukturtechnik, d.h. Technik von Pkt. 3.2.1 für die Defektgleichung ($\curvearrowright$ $\underline{u}^0 = \mathbf{O}$ o.k.) = **Algorithmus 1**
- $\curvearrowright$ $S_C \rightsquigarrow C_C$ $\curvearrowright$ = Technik von Pkt. 3.2.2 ! = **Algorithmus 2**

$\Longrightarrow$ Einheitlicher Zugang !

2. Der einfache DD–Präkonditionierer:

   Ersetzen in (3.3) die Blöcke S_C und K_I durch geeignete Blockpräkonditionierer, d.h.

   (a) S_C durch $C_C = C_C^T$ p.d.: $\underline{\gamma}_C C_C \leq S_C \leq \bar{\gamma}_C C_C$,

   (b) K_I durch $C_I = C_I^T$ p.d.: $\underline{\gamma}_I C_I \leq K_I \leq \bar{\gamma}_I C_I$,
   $\downarrow$
   $C_I = \text{diag}\,[C_{I_s}]_{s=\overline{1,p}}$

   sodaß

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} I_C & K_{CI}C_I^{-1} \\ \mathbf{O} & I_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C & \mathbf{O} \\ C_I^{-1}K_{IC} & I_I \end{bmatrix}} \tag{3.4}$$

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} \underline{w}_C \\ \underline{w}_I \end{bmatrix} = C^{-1}\underline{d} = \begin{bmatrix} I_C & \mathbf{O} \\ -C_I^{-1}K_{IC} & I_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_C^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_I^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C & -K_{CI}C_I^{-1} \\ \mathbf{O} & I_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_C \\ \underline{d}_I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_C^{-1}(\underline{d}_C - K_{CI}C_I^{-1}\underline{d}_I) \\ C_I^{-1}(\underline{d}_I - K_{IC}\underline{w}_C) \end{bmatrix}$$

(3.5)	$\underline{w}^n = C^{-1}\underline{d}^n$	$\underline{w}_C^n = C_C^{-1} \sum\limits_{s=1}^{p} A_{C_s}^T \left(\underline{d}_{C_s}^n - K_{C_s I_s} C_{I_s}^{-1} \underline{d}_{I_s}^n\right)$ $\underline{w}_{I_s}^n = C_{I_s}^{-1} \left(\underline{d}_{I_s}^n - K_{I_s C_s} \underline{w}_{C_s}^n\right), \ \ \underline{w}_{C_s}^n = A_{C_s} \underline{w}_C^n$ $s = \overline{1,p}$

Spektraläquivalenzungleichungen: $\underline{\gamma} C \le K \le \bar{\gamma} C$,

$$\underline{\gamma} = \min\{\underline{\gamma}_C, \underline{\gamma}_I\}\left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\mu}\right)\right),$$

$$\bar{\gamma} = \max\{\bar{\gamma}_C, \bar{\gamma}_I\}\left(1 + \tfrac{1}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\mu}\right)\right),$$

wobei

$$\underbrace{\mu = \rho(S_C^{-1} T_C)}_{\text{Spektralradius}} = \sup_{\substack{\underline{u}_C \in I\!R^{N_C} \\ \underline{u}_C \neq \mathbf{O}}} \frac{(T_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}{(S_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)},$$

mit

$$T_C = K_{CI}(C_I^{-1} - K_I^{-1})\, K_I\, (C_I^{-1} - K_I^{-1})\, K_{IC}, \ \ S_C = K_C - K_{CI} K_I^{-1} K_{IC}.$$

Abschätzungen der relativen Konditionszahl:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\min\{\underline{\gamma}_C, \underline{\gamma}_I\}}{\max\{\bar{\gamma}_C, \bar{\gamma}_I\}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\mu}\right)\right]^2 &\le \kappa(C^{-1}K) \le \\ &\le \frac{\max\{\bar{\gamma}_C, \bar{\gamma}_I\}}{\min\{\underline{\gamma}_C, \underline{\gamma}_I\}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\mu}\right)\right]^2 \end{aligned}}$$

Beweis siehe [18] Haase G., Langer U., Meyer A.:
Domain Decomposition Preconditioners with inexact Subdomain Solvers.
J. Num. Lin. Alg. Appl., 1991, v. 1, Nr. 1, 27 – 41.

Problem: Wahl der Blockpräkonditionierer C_C und C_I für spezielle Anwendungen, z.B. für PDgl. 2. Ordnung und „Streifenzerlegung“ $\Gamma_C = \bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_{C,j}$, $\Gamma_{C,j} =$ offen :

- $C_C = \text{diag}\,[C_{C,j}]_{j=\overline{1,q}}$, $C_{C,j} = [-1, 2, -1]^{0.5} = \text{Dryja}$

  $\Rightarrow$ $\underline{\gamma}_C, \bar{\gamma}_C = O(1)$, aber $\bar{\gamma}_C / \underline{\gamma}_C = O(q^2) \approx (\text{Streifenanzahl})^2$!

- $C_I = K_I (I_I - M_I^k)^{-1}$ = Multigrid–Präkonditionierer:

  $\Rightarrow$ $\underline{\gamma}_I = 1 - \eta_I^k$, $\bar{\gamma}_I = 1$, wobei $\|M_I\|_{K_I} \le \eta_I < 1$ – MG–Rate.

- $\mu \le \eta_I^{2k} \left(\frac{c}{h} - 1\right) = O(1)$ für $\eta_I^k \le \sqrt{h}$, d.h. $k = O(\ln h^{-1})$.

3. In der Praxis: CG–Beschleunigung ! (→ siehe Pkt. 3.3).

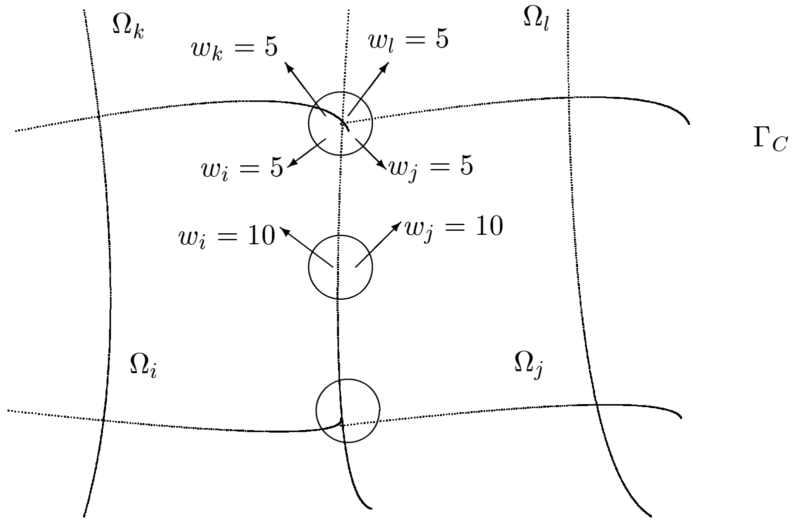
3.3 Parallelisierung der konjugierten Gradientenmethode (CG–Verfahren) durch nichtüberlappende Gebietszerlegung

■ **Verteilung der Daten zu den Prozessoren P_i, $i = \overline{1,p}$:**

Wir nutzen zwei Typen der Verteilung der Daten (Vektoren, Matrizen), die im CG benötigt werden, auf die Prozessoren:

Typ I: Überlappend:

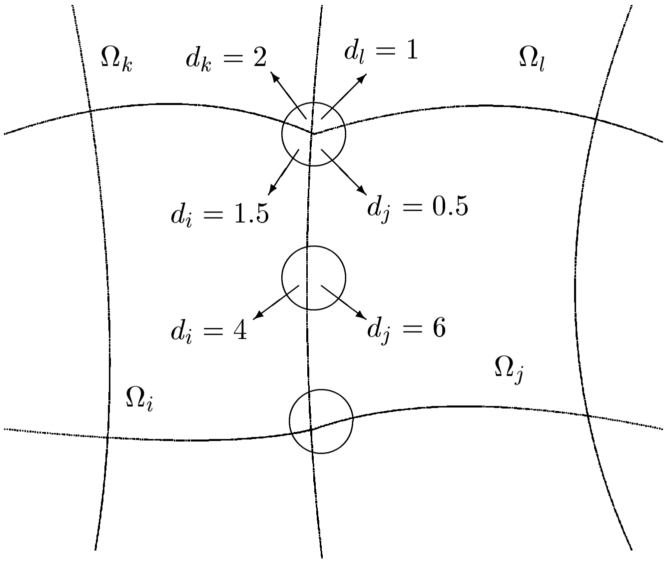
$\underline{u}$, $\underline{w}$, $\underline{s}$ werden im Prozessor P_i ($\widehat{=}\ \bar{\Omega}_i$) als $\underline{u}_i = A_i \underline{u}$, $\underline{w}_i = A_i \underline{w}$, $\underline{s}_i = A_i \underline{s} \in I\!R^{N_i}$ gespeichert ($\Rightarrow$ Überlappung in den C–Komponenten),



Typ II: Nichtassembliert:

$\underline{\mathbf{d}}$, $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{f}}$ werden im Prozessor P_i ($\widehat{=}\, \bar{\Omega}_i$) als $\underline{\mathbf{d}}_i$, $\underline{\mathbf{x}}_i$, $\underline{\mathbf{f}}_i$ gespeichert, sodaß gilt:

$$\underline{d} = \sum_{i=1}^{p} A_i^T \, \underline{d}_i,$$
$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{p} A_i^T \, \underline{x}_i,$$
$$\underline{f} = \sum_{i=1}^{p} A_i^T \, \underline{f}_i$$



Steifigkeitsmatrix: $\mathbf{K}_{C_i}$: $K_C = \sum_{i=1}^{p} A_{C_i}^T \, K_{C_i} \, A_{C_i}$

wobei $A_i = \begin{bmatrix} A_{C_i} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_{I_i} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N_i} =$ Teilgebiets $(\bar{\Omega}_i)$ – Zusammenhangsmatrix,

$$K = \sum_{i=1}^{p} A_i^T \, K_i \, A_i \quad \text{FE-Teilgebiets–Assemblierung,}$$
$$\downarrow$$
$$K_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{C_i} & K_{C_i I_i} \\ K_{I_i C_i} & K_{I_i} \end{bmatrix} = \text{Teilgebietssteifigkeitsmatrix}$$

■ PCG und DD ParPCG:

(P)CG		DD Par(P)CG
serial		FOR ALL $s = 1, p$ DO IN PARALLEL
$\underline{u} = \mathbf{O}$ $\underline{x} = K\,\underline{u}$ $\underline{d} = \underline{f} - \underline{x}$	0. Start- schritt	Define $\underline{u}_s$, z.B. $\underline{u}_s = \mathbf{O}$ or otherwise $\underline{\boldsymbol{x}}_s = \boldsymbol{K}_s\ \underline{u}_s$ $\underline{\boldsymbol{d}}_s = \underline{\boldsymbol{f}}_s - \underline{\boldsymbol{x}}_s$
$\underline{w} = C^{-1}\,\underline{d}$		$\underline{w}_C = \sum A^T_{C_s}\,\underline{\boldsymbol{d}}_{C_s}$ $\underline{w}_{I_s} = \underline{d}_{I_s}$ $= C^{-1}\begin{bmatrix} \underline{d}_{C_s} \\ \underline{d}_{I_s} \end{bmatrix}$
$\underline{s} = \underline{w}$ $\beta = \underline{w}^T\,\underline{d}$ $\beta\emptyset = \beta$		$\underline{s}_s = \underline{w}_s$ $\beta_s = \underline{w}_s^T\,\underline{\boldsymbol{d}}_s$ $\beta 1 = \sum \beta_s\,;\ \beta\emptyset = \beta 1$
$\underline{x} = K\,\underline{s}$ $\alpha = \dfrac{\underline{w}^T\,\underline{d}}{\underline{x}^T\,\underline{s}}$	Iteration 1.	$\underline{\boldsymbol{x}}_s = \boldsymbol{K}_s\ \underline{s}_s$ $\alpha_s = \underline{\boldsymbol{x}}_s^T\ \underline{s}_s$ $\alpha 1 = \sum \alpha_s$ $\alpha = \beta 1/\alpha 1$
$\underline{\widehat{u}} = \underline{u} + \alpha\underline{s}$ $\underline{\widehat{d}} = \underline{d} - \alpha\underline{x}$	2.	$\underline{\widehat{u}}_s = \underline{u}_s + \alpha\underline{s}_s$ $\underline{\widehat{\boldsymbol{d}}}_s = \underline{\boldsymbol{d}}_s - \alpha\,\underline{\boldsymbol{x}}_s$
$\underline{\widehat{w}} = C^{-1}\,\underline{\widehat{d}}$	3.	$\underline{\widehat{w}}_C = \sum A^T_{C_s}\,\underline{\widehat{\boldsymbol{d}}}_{C_s}$ $\underline{\widehat{w}}_{I_s} = \underline{\widehat{d}}_{I_s}$ $= C^{-1}\begin{bmatrix} \underline{d}_{C_s} \\ \underline{d}_{I_s} \end{bmatrix}$
$\beta = \dfrac{\underline{\widehat{w}}^T\,\underline{\widehat{d}}}{\underline{w}^T\,\underline{d}}$ $\underline{\widehat{s}} = \underline{\widehat{w}} + \beta\underline{s}$ $\left(\underline{\widehat{w}}, \underline{\widehat{d}}\right) \le \varepsilon^2 * \beta\emptyset$?	4.	$\beta_s = \underline{\widehat{w}}_s^T\,\underline{\widehat{\boldsymbol{d}}}_s$ $\beta 2 = \sum \beta_s$ $\beta = \beta 2/\beta 1;\ \beta 1 = \beta 2$ $\underline{\widehat{s}}_s = \underline{\widehat{w}}_s + \beta\underline{s}_s$ $\beta 2 \le \varepsilon^2 * \beta\emptyset$?
no yes STOP		no yes STOP

wobei $\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{d}}, \ldots$ – neue Iterierende, $\sum$ = Kommunikation + Aufsummierung.

- **Konvergenz:** $\|\underline{u} - \underline{u}^n\|_K \leq q_n \, \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_K,$

  $C = I$ mit

  $\|\cdot\|_K^2 = (\cdot,\cdot)_K := (K\,\cdot,\cdot),$

  $$q_n = \frac{2\rho^n}{1+\rho^{2n}},$$

  $$\rho = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \underline{\gamma}/\bar{\gamma} \leq 1/\sqrt{\kappa(K)}$$

$\underline{\gamma}\, I \leq K \leq \bar{\gamma}\, I$
$\underline{\gamma}\,(I\underline{v},\underline{v}) \leq (K\underline{v},\underline{v}) \leq \bar{\gamma}\,(I\underline{v},\underline{v}) \quad \forall\, \underline{v} \in I\!R^N$
$\underline{\gamma}\,\lambda_{\min} \leq \; \lambda\,(I^{-1}K) = \lambda\,(K) \leq \lambda_{\max} \leq \bar{\gamma}$ $K\,\underline{v} = \lambda\,\underline{v}$

$$I(\varepsilon) = \text{Anzahl der Iterationen } (q_{I(\varepsilon)} \leq \varepsilon) =$$

$$= O\left(\sqrt{\kappa(K)}\ln\varepsilon^{-1}\right) = O\,(\xi^{-0.5}\ln\varepsilon^{-1}) = O\,(h^{-1}\ln\varepsilon^{-1})$$

$$\kappa(K) = \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)} \qquad \text{PDgl. 2. Ordnung}$$

$\varepsilon \in (0,1)$ – relative Genauigkeit: $q_{I(\varepsilon)} \leq \varepsilon$.

- **Kommunikation:** $(C = I)$

  1. $\sum$ = Skalarproduktkommunikation (SP-Kommunikation)
  2. Typ I = $\sum A_{C_s}^T$ **Typ II** = "nearst neighbour communication" (NN-Kommunikation)

- **Präkonditionierer:** $C = C^T$ p.d. (spd)

  1. $\kappa(C^{-1}K) \ll \kappa(K)$,
     möglichst: $\kappa(C^{-1}K) = O(1)$ für $h \to 0$ (und $p \to \infty$)

     Spektraläquivalenzungleichungen:

     $$\underline{\gamma}\,C \;\leq\; K \;\leq\; \bar{\gamma}\,C \;\Rightarrow\; \begin{array}{rcl} \kappa(C^{-1}K) & \leq & \bar{\gamma}/\underline{\gamma} \\ & \simeq & \\ O(\kappa(C^{-1}K)) & = & O(\bar{\gamma}/\underline{\gamma}) \end{array}$$

     $$K\underline{v} = \lambda C\underline{v} \;:\; \underset{\simeq}{\underline{\gamma} \leq} \lambda_{\min} \;\leq\; \lambda_{\mathrm{EW}} \;\leq\; \lambda_{\max} \underset{\simeq}{\leq \bar{\gamma}}$$

2. $\underline{\hat{w}} = C^{-1}\,\underline{\hat{d}}$ $\;\hookrightarrow\;$ <u>schnell</u>, d.h. $O\,(h^{-d}(\ln\, h^{-1})^r)$
arithmetische Operationen,
möglichst $r = 0$.

3. Kommunikation in 2. $\quad \underline{\hat{w}} = C^{-1}\,\underline{\hat{d}}$:
   (a) Typ I = $\sum A_{C_s}^T$ $\quad$ **Typ II**, d.h. nur 1 NN–Kommunikation,
   (b) + "Cross-point–Communication" (CP–Kommunikation)

■ **<u>Ein erster Kandidat</u>** = **<u>Einfacher DD–Präkonditionierer</u>**

CP–Kommunikation

NN–Kommunikation (auch für $C = I$ nötig)

i.a.

$\underline{\widehat{w}} = C^{-1}\underline{\hat{d}}$	$\underline{\widehat{w}}_C = C_C^{-1} \sum\limits_{s=1}^{p} A_{C_s}^T \,(\underline{\hat{d}}_{C_s} - K_{C_s I_s} C_{I_s}^{-1} \underline{\hat{d}}_{I_s})$ $\underline{\widehat{w}}_{I_s} = C_{I_s}^{-1}\,(\underline{\hat{d}}_{I_s} - K_{I_s C_s}\underline{\widehat{w}}_{C_s}),\;\; \underline{\widehat{w}}_{C_s} = A_{C_s}\underline{w}_C^n$ $s = \overline{1,p}$

<u>Bsp.:</u> PDgl. 2. Ordnung, 2D, Streifenzerlegung:
$\hookrightarrow$ Fast optimales Verfahren, d.h. $Q = O(\underbrace{h^{-2}\ln h^{-1}}_{\text{Aufwand pro Iterations-schritt}}\;\underbrace{\ln \varepsilon^{-1}}_{\text{Iterationen}})$!

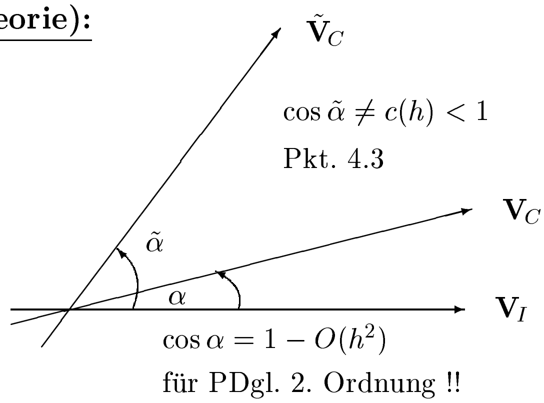
■ **<u>Später:</u>** 1. Weitere DD-Präkonditionierer: Kap. 4
2. Globale Präkonditionierer: MG [22], HB [43], BPX [4] etc.
$\rightarrow$ Datenpartitionierung !

Kapitel 4

ASM– und MSM–Präkonditionierer im Spezialfall $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 : \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{O}\}$

■ **Motivation (für abstrakte Theorie):**

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{V}_1 & = & \tilde{\mathbf{V}}_C \\ + & & \\ \mathbf{V}_2 & = & \mathbf{V}_I = \mathbf{V}_{I_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{V}_{I_p} \\ \| & & \\ \mathbf{V} & = & \text{FE–Raum} \end{array}$$



(siehe Pkt. 4.1.4 !)

4.1 ASM–Präkonditionierer

4.1.1 ASM–Algorithmus und seine Matrix–Darstellung

■ **Btr. wieder symmetrisches, $\mathbf{V}_0$–elliptisches und $\mathbf{V}_0$–beschränktes Variationsproblem** (siehe auch Pkt. 3.1)

(4.1)
$$\boxed{\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_0 : a\,(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0}$$

und das entsprechende FE–Schema $\stackrel{\Phi}{\longleftrightarrow}$ FE–Gleichungssystem:

$$
(4.1)_h \quad \boxed{\begin{array}{llcl}
\text{Ges.} \; u_{\not h} \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_{0\not h} & : \; a\,(u_{\not h}, v_{\not h}) & = & < F, v_{\not h} > \quad \forall\, v_{\not h} \in \mathbf{V}_{0\not h} \\
\qquad \updownarrow \longleftarrow \Phi = [\varphi_1, \ldots, \varphi_N] - \text{„Knotenbasis“}: \mathbf{V} = \operatorname{span} \Phi & & & \\
\text{Ges.} \; \underline{u}_{\not h} \in I\!R^{N_{\not h}} & : \; K_{\not h}\, \underline{u}_{\not h} & = & \underline{f}_{\not h}
\end{array}}
$$

Index h wird im folgenden wieder weggelassen !

- **Sei**

(4.2) $\qquad \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ mit $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{\mathbf{O}\}$

eine Darstellung von $\mathbf{V}$ als (echte) direkte Summe der Unterräume $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$:

(4.3)
$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{V}_s & = & \operatorname{span} \Phi \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Basistransformationsmatrix der} \\ \text{Dimension } N \times N_s}}{V_s} \subset \mathbf{V} \\
\big\downarrow & & \\
N_s & = & \dim \mathbf{V}_s = \operatorname{rang} V_s, \quad s = 1, 2.
\end{array}
$$

Folglich gilt (mms)

(4.4) $\qquad N \;=\; N_1 \;+\; N_2.$

- **Definieren die Ritzprojektoren**

(4.5) $\quad P_s : \; \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}_s -$ Orthoprojektor bzgl. des energetischen Skalarproduktes $a(\cdot, \cdot)$:

$$
a(\underbrace{P_s u}_{= u_s = \Phi V_s \underline{u}_s \in \mathbf{V}_s,\; v_s = \Phi V_s \underline{v}_s}, v_s) = a(u, v_s) \quad \forall\, v_s \in \mathbf{V}_s \quad \forall\, u \in \mathbf{V}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
a(\Phi V_s \underline{u}_s, \Phi V_s \underline{v}_s) & = & a(\Phi \underline{u}, \Phi V_s, \underline{v}_s) \\
V_s^T K V_s \underline{u}_s & = & V_s^T K \underline{u} \\
\text{d.h. } \underline{u}_s = (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T K \underline{u} & &
\end{array}
$$

- **Die ASM für die Dekomposition (4.2) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$** kann nun in der folgenden Form geschrieben werden (vgl. Pkt. 2.1):

<u>Anfangsnäherung:</u> $u^0 = \Phi \underline{u}^0 \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$

<u>Iteration:</u>

<u>FOR</u> $n = 0$ <u>STEP</u> 1 <u>UNTIL</u> Convergence <u>DO</u>

<u>BEGIN</u> <u>FOR</u> <u>ALL</u> $s = 1, 2$ <u>DO</u> <u>IN</u> <u>PARALLEL</u>

$$w_s^n = \Phi V_s \underline{w}_s^n \in \mathbf{V}_s : a(w_s^n, v_s) = < F, v_s > - \, a(u^n, v_s) \quad \forall \; v_s \in \mathbf{V}_s, \quad v_s = \Phi V_s \underline{v}_s$$

$$\updownarrow$$

$$\underline{w}_s^n \in I\!R^{N_s} \quad : V_s^T K V_s \underline{w}_s^n = V_s^T \underline{d}^n, \;\; \underline{d}^n = \underline{f} - K\underline{u}^n = K(\underline{u} - \underline{u}^n),$$

mit $\underline{u}^n \leftrightarrow u^n = \Phi \underline{u}^n$.

<u>ENDFOR</u>

$$u^{n+1} = u^n + \tau \sum_{s=1}^{2} w_s^n = u^n + \tau \sum_{s=1}^{2} P_s \underbrace{(u - u^n)}_{=: z^n}$$

$$\updownarrow$$

$$\underline{u}^{n+1} = u^n + \tau \sum_{s=1}^{2} V_s \underline{w}_s^n$$

<u>END</u>

- **Matrix–Darstellung der ASM:**

$$\begin{aligned}
(4.6) \qquad \underline{u}^{n+1} &= \underline{u}^n + \tau \sum_{s=1}^{2} V_s \; \underline{w}_s^n \\
&\qquad\qquad \downarrow \\
&\qquad\qquad \underline{w}_s^n = (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T \overbrace{K \underbrace{(\underline{u} - \underline{u}^n)}_{= \underline{z}^n}}^{= \underline{d}^n} \\
\underline{u}^{n+1} &= \underline{u}^n + \tau \sum_{s=1}^{2} V_s (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T K \, (\underline{u} - \underline{u}^n) \\
&\updownarrow \Phi \\
u^{n+1} &= u^n + \tau \underbrace{\sum_{s=1}^{2}}_{=: P} P_s (u - u^n) = u^n + \tau \, P \, (u - u^n) \\
\underline{u}^{n+1} &= \underline{u}^n + \tau \underbrace{\sum_{s=1}^{2} V_s (V_s^T K V_s)^{-1} V_s^T}_{=: C^{-1}} \; \underbrace{K \, (\underline{u} - \underline{u}^n)}_{=: \underline{d}^n = \underline{f} - K \underline{u}^n}
\end{aligned}$$

(4.6)
$$\boxed{C\,\frac{\underline{u}^{n+1}-\underline{u}^{n}}{\tau} + K\,\underline{u}^{n} = \underline{f}}$$

d.h. ASM = Richardson–Methode (= Methode der einfachen Iteration) mit dem ASM–Präkonditionierer

(4.7)
$$\boxed{\begin{array}{rcl} C^{-1} & = & V_1(V_1^T K V_1)^{-1} V_1^T + V_2(V_2^T K V_2)^{-1} V_2^T \\ & = & \underbrace{[V_1\; V_2]}_{V} \begin{bmatrix} (V_1^T K V_1)^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & (V_2^T K V_2)^{-1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}}_{V^T} \\ C & = & \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1^T K V_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & V_2^T K V_2 \end{bmatrix} [V_1\; V_2]^{-1} \end{array}}$$

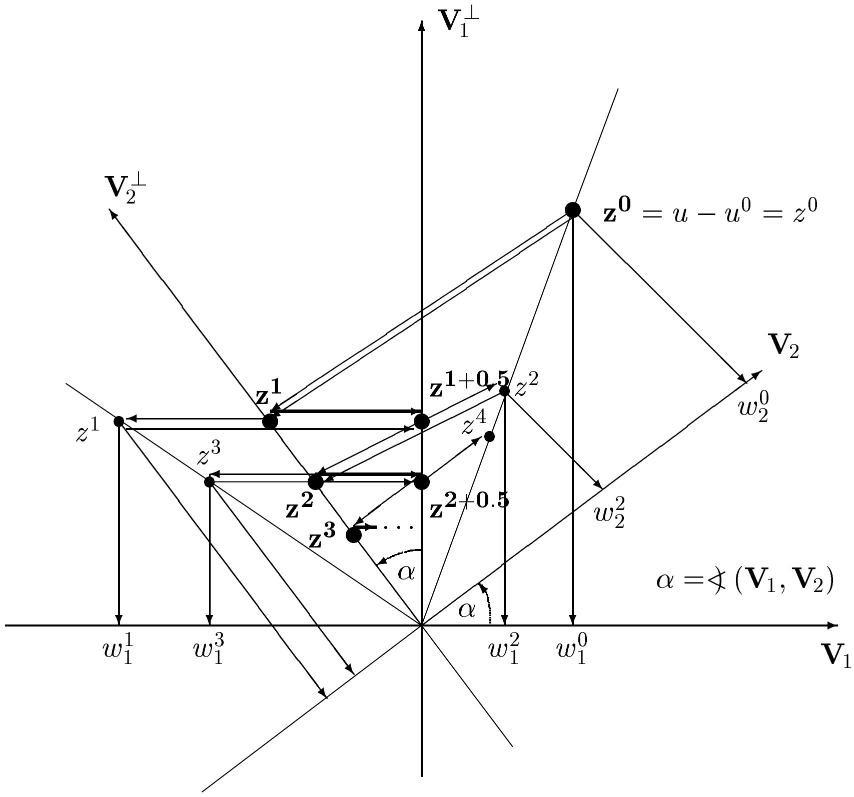
■ <u>**In der Praxis**</u> nutzt man natürlich CG–Beschleunigung, d.h. PCG mit der Vorkonditionierungsgleichung

$$\underline{w}^n = C^{-1}\underline{d}^n \qquad \text{(siehe Pkt. 3.3)}$$

! Wir betrachten die <u>ASM</u> als eine Methode zur <u>Konstruktion</u> und <u>Analyse</u> (siehe Pkt. 4.1.2 und 4.1.3) von <u>Präkonditionierern</u> !

■ **Illustration:**

ASM und **MSM** mit exakter Orthoprojektion



<u>Konvergenz:</u> **MSM:** $|||u - u^{n+1}||| \le q^2\, |||u - u^n|||.$

ASM: $|||u - u^{n+1}||| \le q\, |||u - u^n|||,$

mit $q = \gamma = \cos\alpha = \cos \sphericalangle(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \cos \sphericalangle(\mathbf{V}_1^\perp, \mathbf{V}_2^\perp),$

$|||\cdot||| = \sqrt{a(\cdot,\cdot)}$ – Energienorm.

4.1.2 Spektraläquivalenzabschätzung

■ **Hauptproblem:** Bestimme $\underline{\gamma}, \bar{\gamma} = \text{const.} > 0$:

(4.8) $$\underline{\gamma} C \le K \le \bar{\gamma} C, \text{ d.h.}$$

$$\underset{!}{\underline{\gamma} \underset{=}{\le}} \lambda_{\min}(C^{-1}K) \le \lambda_{\max}(C^{-1}K) \underset{!}{\underset{=}{\le}} \bar{\gamma}$$

■ **Konvergenz der ASM–Iteration (4.6):**

(4.9)
$$\tau = \tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\underline{\gamma} + \bar{\gamma}}, \quad q = q_{\text{opt}} = \frac{\bar{\gamma} - \underline{\gamma}}{\bar{\gamma} + \underline{\gamma}} = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \quad \xi = \underline{\gamma}/\bar{\gamma},$$

$$\begin{array}{l} \|\underline{u} - \underline{u}^n\|_K \leq q^n \, \|\underline{u} - \underline{u}^0\|_K, \\ \quad \| \qquad\qquad\quad \| \\ |||u - u^n||| \leq q^n \, |||u - u^0|||, \end{array}$$

$$\text{mit } \|\cdot\|_K^2 := (K\,\cdot,\cdot), \quad |||\cdot|||^2 = a\,(\cdot,\cdot),$$

$$\begin{array}{ll} \|\underline{v}\|_K = |||v||| \quad \forall\ v & = \Phi\,\underline{v}\ \in V \\ \qquad\qquad\qquad\quad \updownarrow & \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{v} & \qquad \in I\!R^N \end{array}$$

■ **Sei**

(4.10)
$$0 \leq \gamma = \cos \sphericalangle (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) := \sup_{\substack{v_1 \in \mathbf{V}_1 \setminus \{\mathbf{O}\} \\ v_2 \in \mathbf{V}_2 \setminus \{\mathbf{O}\}}} \frac{a\,(v_1, v_2)}{|||v_1||| \cdot |||v_2|||} < 1,$$

d.h. für $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ gilt eine verschärfte Cauchy-Ungleichung

(4.11)
$$|a\,(v_1, v_2)| \leq \gamma\, |||v_1|||\, |||v_2||| \quad \forall\, v_1 \in \mathbf{V}_1 \quad \forall\, v_2 \in \mathbf{V}_2,$$

wobei $\gamma \in [0,1)$ nicht verbesserbar ist, falls durch (4.10) definiert.

■ **Satz 4.1:** (Spektraläquivalenzsatz für exakten ASM–Präkonditionierer)

Vor.: Es gelte die verschärfte Cauchy-Ungleichung (4.11) mit $\gamma \in [0,1)$.

Bh.: Dann gelten die Spektraläquivalenzungleichungen

(4.8) $\underline{\gamma} C \leq K \leq \bar{\gamma} C$

mit $\underline{\gamma} = 1 - \gamma$ und $\bar{\gamma} = 1 + \gamma$.
Falls $\gamma = \cos \sphericalangle (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$, dann sind diese Abschätzungen scharf, d.h.

$$\lambda_{\min}(C^{-1}K) = \lambda_{\min}(P) = 1 - \gamma,$$
$$\lambda_{\max}(C^{-1}K) = \lambda_{\max}(P) = 1 + \gamma.$$

Beweis:

- $$(4.12)\ (K\underline{v},\underline{v}) = a(v,v) = a(\Phi\underline{v},\Phi\underline{v}) = a(\Phi V\underline{w},\Phi V\underline{w}) =$$

$$v = \Phi\underline{v} = \Phi V\underline{w} = \underbrace{\Phi V_1\underline{w}_1}_{=:v_1\in\mathbf{V}_1} + \underbrace{\Phi V_2\underline{w}_2}_{=:v_2\in\mathbf{V}_2} \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \quad \text{(eind.)}$$

$$= a(v_1+v_2, v_1+v_2) = |||v_1|||^2 + 2a(v_1,v_2) + |||v_2|||^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2ab\le a^2+b^2 \\ \forall\ a,b\ge 0 \\ \quad \in I\!R^1 \end{array}} \qquad \overset{(4.11)}{\substack{\le\\ \ge}} \quad |||v_1|||^2 \pm 2\gamma\,|||v_1|||\,|||v_2||| + |||v_2|||^2$$

$$\substack{\le\\ \ge} \quad (1\pm\gamma)\,(|||v_1|||^2 + |||v_2|||^2) = (1\pm\gamma)\,(C\underline{v},\underline{v}),$$

da $\qquad |||v_1|||^2 + |||v_2|||^2 = (C\underline{v},\underline{v}).$

- Tatsächlich,

$$|||v_1|||^2 + |||v_2|||^2 = a(\Phi\underbrace{V_1\underline{w}_1}_{=:\underline{v}_1}, \Phi V_1\underline{w}_1) + a(\underbrace{\Phi V_2\underline{w}_2}_{=:v_2}, \Phi V_2\underline{w}_2) \overset{\underline{w} = \binom{\underline{w}_1}{\underline{w}_2}}{=}$$

$$= \underline{w}_1^T V_1^T K V_1 \underline{w}_1 + \underline{w}_2^T V_2^T K V_2 \underline{w}_2 \overset{\underline{w} = V^{-1}\underline{v}}{=}$$

$$= \underline{w}^T \begin{bmatrix} V_1^T K V_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & V_2^T K V_2 \end{bmatrix} \underline{w} =$$

$$= \underline{v}^T V^{-T} \begin{bmatrix} V_1^T K V_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & V_2^T K V_2 \end{bmatrix} V^{-1}\underline{v} = (C\,\underline{v},\underline{v}) \quad \#$$

- Falls $\gamma = \cos\sphericalangle(\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2) \in [0,1)$, dann

$$(4.13) \qquad \begin{array}{lcrcl} \exists\ v_1\in\mathbf{V}_1,\ v_2\in\mathbf{V}_2 & : & 2a(v_1,v_2) & = & \gamma\,(|||v_1|||^2 + |||v_2|||^2) \\ \downarrow \qquad -''- & : & 2a(v_1,v_2) & = & -\gamma\,(|||v_1|||^2 + |||v_2|||^2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{z.B. } v_1 \to -v_1}$$

und folglich ist (4.12) scharf. Die Aussage (4.13) folgt sofort aus der Beziehung

$$(4.14) \qquad \gamma \equiv \max_{\substack{v_1\in\mathbf{V}_1\setminus\{\mathbf{O}\}\\ v_2\in\mathbf{V}_2\setminus\{\mathbf{O}\}}} \frac{a(v_1,v_2)}{|||v_1|||\,|||v_2|||} \underset{\uparrow\ (\text{mms})}{\overset{!}{=}} \max_{\substack{v_1\in\mathbf{V}_1\setminus\{\mathbf{O}\}\\ v_2\in\mathbf{V}_2\setminus\{\mathbf{O}\}}} \frac{2a(v_1,v_2)}{|||v_1|||^2 + |||v_2|||^2}\,.$$

q.e.d.

4.1.3 Inexakte Lösung der ASM–Teilprobleme

- **Ersetzen**

Exakte Teilprobleme	durch	präkonditionierte Teilprobleme
(exakte Orthoprojektion)		(inexakte Orthoprojektion)
$V_s^T K V_s \underline{w}_s^n = V_s^T \underline{d}^n$		$C_s \underline{w}_s^n = V_s^T \underline{d}^n$
$(s = 1, 2)$		$(s = 1, 2)$

mit den ASM–Teilproblem–Präkonditionierern $C_s = C_s^T$ p.d.:

(4.15)
$$\begin{aligned} &\underline{\gamma}_s C_s \le V_s^T K V_s \le \bar{\gamma}_s C_s, \\ &\underline{\gamma}_s (V_s^T K V_s)^{-1} \le C_s^{-1} \le \bar{\gamma}_s (V_s^T K V_s)^{-1}, \end{aligned}$$

mit positiven Spektraläquivalenzkonstanten $\underline{\gamma}_s,\ \bar{\gamma}_s,\ s = 1, 2.$

- **Dann ergibt sich der inexakte ASM–Präkonditionierer $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{C}}^{\mathbf{T}}$ p.d.** sofort aus (4.7), indem man $V_s^T K V_s$ durch C_s ersetzt:

(4.16)
$$\begin{aligned} \tilde{C}^{-1} &= V_1 C_1^{-1} V_1^T + V_2 C_2^{-1} V_2^T \\ &= [V_1\, V_2] \begin{bmatrix} C_1^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bzw.

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_2 \end{bmatrix} [V_1\, V_2]^{-1}.$$

- **Satz 4.2:** (Spektraläquivalenzsatz für inexakte ASM–Präkonditionierer)

Vor.: 1) Es gelte die verschärfte Cauchy–Ungleichung (4.11) mit $\gamma \in [0, 1)$.
2) Für die ASM–Teilproblem–Präkonditionierer $C_s = C_s^T$ p.d. gelten die Spektraläquivalenzungleichungen (4.15).

Bh.: Dann gelten die Spektraläquivalenzungleichungen

(4.17)
$$\underline{\gamma} \tilde{C} \le K \le \bar{\gamma} \tilde{C}$$

mit $\underline{\gamma} = \min\{\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2\}(1 - \gamma)$ und $\bar{\gamma} = \max\{\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2\}(1 + \gamma)$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\left(\tilde{C}^{-1}\underline{v},\underline{v}\right) \;&\underset{(4.16)}{\overset{\uparrow}{=}}\; \sum_{s=1}^{2}(C_s^{-1}V_s^T\underline{v},V_s^T\underline{v}) \\
&\underset{(4.15)}{\overset{\leq}{\geq}}\; \sum_{s=1}^{2}\frac{\bar{\gamma}_s}{\underline{\gamma}_s}\left((V_s^TKV_s)^{-1}\,V_s^T\underline{v},V_s^T\underline{v}\right) \\
&\overset{\leq}{\geq}\; \frac{\max\{\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2\}}{\min\{\underline{\gamma}_1,\underline{\gamma}_2\}}\left(\underbrace{\sum_{s=1}^{2}V_s(V_s^TKV_s)^{-1}V_s^T}_{=C^{-1}}\underline{v},\underline{v}\right) \\
&\underset{\leq}{\overset{\text{Satz 4.1}}{\overset{\downarrow}{\geq}}}\; \frac{\max\{\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2\}(1+\gamma)}{\min\{\underline{\gamma}_1,\underline{\gamma}_2\}(1-\gamma)}\;(K^{-1}\underline{v},\underline{v}).
\end{aligned}
$$

q.e.d.

■ **Bemerkung 4.3:** Skalierungsproblem (!)

1. $\kappa\left(\tilde{C}^{-1}K\right) \leq \dfrac{\max\{\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2\}}{\min\{\underline{\gamma}_1,\underline{\gamma}_2\}}\,\dfrac{(1+\gamma)}{(1-\gamma)}$

2. Übertragung auf Fall von mehr als zwei Teilräumen: siehe [27], Kap. 6 bzw. [34] !

4.1.4 Die näherungsweise diskret harmonische Basis und der ASM–DD–Präkonditionierer

■ **Btr. wieder die Situation aus Kapitel 3:**
Wir transformieren jetzt die Knotenbasis (= standarde FE–Basis)

$$
\Phi = [\underbrace{\varphi_1,\ldots,\varphi_{N_C}}_{\Gamma_C},\underbrace{\varphi_{N_C+1},\ldots,\varphi_{N_C+N_{I_1}}}_{\Omega_1},\underbrace{\cdots\qquad}_{\Omega_2}\;\underbrace{\qquad\varphi_{N=N_C+N_I}}_{\Omega_p}]
$$

in die sogenannte „näherungsweise diskret harmonische Basis“

$$
\begin{array}{llllll}
\tilde{\Phi} = [\underline{\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_{N_C}}, & \tilde{\varphi}_{N_C+1} & ,\ldots, & \tilde{\varphi}_{N_C+N_{I_1}} & ,\ldots, & \tilde{\varphi}_N\ ] \\
 & \| & & \| & & \| \\
 & \varphi_{N_C+1} & & \varphi_{N_C+N_{I_1}} & & \varphi_N
\end{array}
$$

durch die Transformation

(4.18) $$\tilde{\Phi} = \Phi\,\tilde{V},$$

wobei die Basistransformationsmatrix $\tilde{V}$ durch die Beziehungen

$$\tilde{V} = \left[\tilde{V}_C\, \tilde{V}_I\right] = \left[\tilde{V}_C \middle| \tilde{V}_{I_1}\, \tilde{V}_{I_2} \ldots \tilde{V}_{I_p}\right], \tag{4.19}$$

$$\tilde{V}_C = \begin{bmatrix} I_C \\ -B_I^{-1} K_{IC} \end{bmatrix}_{N \times N_C} : B_I = \operatorname{diag}\left[B_{I_s}\right]_{s=\overline{1,p}} \text{ – regulär,}$$

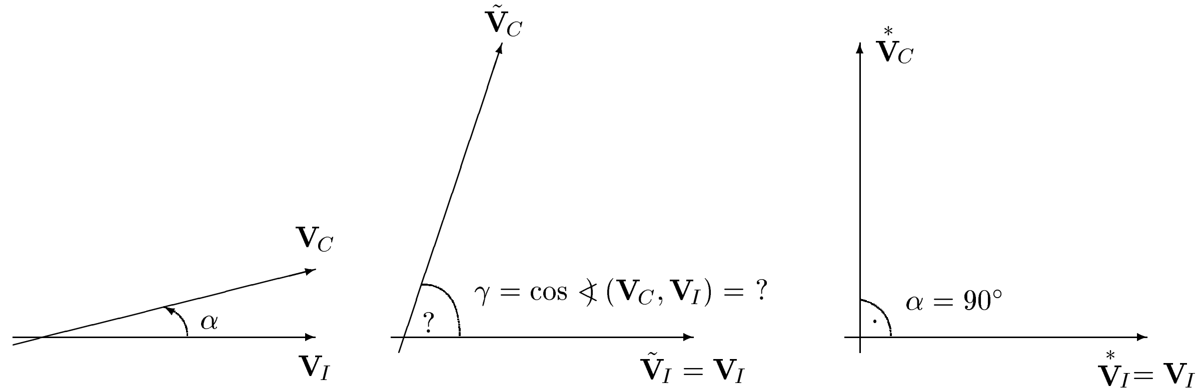
$$\tilde{V}_I = V_I = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ I_I \end{bmatrix}_{N \times N_I} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \tilde{V}_{I_1} & \tilde{V}_{I_2} & \quad & \tilde{V}_{I_p} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \hline I_{I_1} & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \\ & I_{I_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & & I_{I_p} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} V_{I_1} & V_{I_2} & \quad & V_{I_p} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} N_C \\ N_{I_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ N_{I_p} \end{array}$$

■ Darstellung des FE–Raums V:

$$\mathbf{V} = \underset{\mathbf{V}_1}{\underset{\|}{\tilde{\mathbf{V}}_C}} + \underset{\mathbf{V}_2\ (\uparrow)}{\underset{\|}{\tilde{\mathbf{V}}_I}} = \tilde{\mathbf{V}}_C + \left\{\tilde{\mathbf{V}}_{I_1} \oplus \ldots \oplus \tilde{\mathbf{V}}_{I_p}\right\} \tag{4.20}$$

mit $\tilde{\mathbf{V}}_C = \operatorname{span} \Phi \tilde{V}_C$ – Teilraum der näherungsweise diskret harmonischen Funktionen,
$\tilde{\mathbf{V}}_I = \operatorname{span} \Phi \tilde{V}_I = \tilde{\mathbf{V}}_{I_1} \oplus \ldots \oplus \tilde{\mathbf{V}}_{I_p}$, wobei $\tilde{\mathbf{V}}_{I_s} = \operatorname{span} \Phi \tilde{V}_{I_s} = \operatorname{span} \Phi V_{I_s} = \mathbf{V}_{I_s}$.

- **Illustration:** bzgl. des energetischen Skalarproduktes $a(\cdot,\cdot)$:



„$B_I^{-1} = \mathbf{O}$“ (formal)	$B_I \neq K_I$	$B_I = K_I$
Knotenbasis	näherungsw. diskr. harm. Basis zumindestens: $\gamma < 1,\ \gamma \neq \gamma(h)$ $\downarrow$	diskret harmon. Basis
$\gamma = \cos \sphericalangle (\mathbf{V}_C, \mathbf{V}_I) =$ $= 1 - O(h^2)$ $\uparrow$	$\gamma = \cos \sphericalangle \left(\tilde{\mathbf{V}}_C, \tilde{\mathbf{V}}_I\right) \searrow 0$ $\uparrow$	$\gamma = \cos 90° = 0$
mms für PDgl. 2. Ordnung $\curvearrowright C_{\mathrm{ASM}} = \begin{bmatrix} K_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & K_I \end{bmatrix}$!	? $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ B_I = \mathrm{diag}\,[B_{I_s}]:\ \text{regulär} \\ \bullet\ Q(B_{I_s}^{-1} \underline{d}_{I_s}) = O(N_{I_s}) \end{array}}$	$\widehat{=}$ Algorithmus 1 (siehe Pkt. 3.2.1)

- **Lemma 4.4:**

$$\boxed{\begin{array}{l}
(4.21) \qquad \gamma = \cos \sphericalangle \left(\tilde{\mathbf{V}}_C, \tilde{\mathbf{V}}_I\right) = \sqrt{\dfrac{\mu}{1+\mu}}\,, \\[2ex]
\text{mit} \quad \mu = \mu(B_I) = \underset{\text{Spektralradius}}{\rho(S_C^{-1} T_C)} = \max\limits_{\substack{\underline{u}_C \in \mathbb{R}^{N_C} \\ \underline{u}_C \neq \mathbf{O}}} \dfrac{(T_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}{(S_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}\,, \\[2ex]
\qquad S_C = K_C - K_{CI} K_I^{-1} K_{IC} \text{ – Schur–Komplement,} \\
\qquad T_C \equiv T_C(B_I) = K_{CI}(K_I^{-1} - B_I^{-T})\, K_I\, (K_I^{-1} - B_I^{-1})\, K_{IC}.
\end{array}}$$

Beweis:

- Wir haben zu zeigen, daß

$$\gamma := \sup_{\substack{u_C \in \tilde{\mathbf{V}}_C \setminus \{\mathbf{O}\} \\ v_I \in \tilde{\mathbf{V}}_I \setminus \{\mathbf{O}\}}} \frac{a\,(u_C, v_I)}{|||u_C|||\; |||v_I|||} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}\,.$$

  Dazu rechnen wir zunächst die Matrixdarstellung der Größen $a\,(u_C, v_I)$, $|||u_C|||^2$ und $|||v_I|||^2$ aus:

- $u_C = \Phi \tilde{V}_C \underline{u}_C \in \tilde{\mathbf{V}}_C, \;\; v_I = \Phi \tilde{V}_I \underline{v}_I \in \tilde{\mathbf{V}}_I$

$$\begin{aligned} a\,(u_C, v_I) &= a\left(\Phi \tilde{V}_C \underline{u}_C, \Phi \tilde{V}_I \underline{v}_I\right) = \left(\tilde{V}_I^T K \tilde{V}_C \underline{u}_C, \underline{v}_I\right) = \\ &= \left(\left(K_{IC} - K_I B_I^{-1} K_{IC}\right) \underline{u}_C, \underline{v}_I\right) \\ &\uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_I^T K \tilde{V}_C &= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} N_C & N_I \end{array} \\ N_I & [\,\mathbf{O}, I_I] \end{array} \begin{bmatrix} K_C & K_{CI} \\ K_{IC} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C \\ -B_I^{-1} K_{IC} \end{bmatrix}_{N \times N_C} = \\ &= [\mathbf{O}\; I_I] \begin{bmatrix} K_C - K_{CI} B_I^{-1} K_{IC} \\ K_{IC} - K_I B_I^{-1} K_{IC} \end{bmatrix} = K_{IC} - K_I B_I^{-1} K_{IC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |||u_C|||^2 &= a\left(\Phi \tilde{V}_C \underline{u}_C, \Phi \tilde{V}_C \underline{u}_C\right) = \left(\tilde{V}_C^T K \tilde{V}_C \underline{u}_C, \underline{u}_C\right) = \\ &= \left((S_C + T_C)\, \underline{u}_C, \underline{u}_C\right) \\ &\uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_C^T K \tilde{V}_C &= \left[I_C, -K_{CI} B_I^{-T}\right] \begin{bmatrix} K_C & K_{CI} \\ K_{IC} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C \\ -B_I^{-1} K_{IC} \end{bmatrix} = \\ &= \left[I_C, -K_{CI} B_I^{-T}\right] \begin{bmatrix} K_C - K_{CI} B_I^{-1} K_{IC} \\ K_{IC} - K_I B_I^{-1} K_{IC} \end{bmatrix} = \\ &= K_C - K_{CI} B_I^{-1} K_{IC} - K_{CI} B_I^{-T} K_{IC} + K_{CI} B_I^{-T} K_I B_I^{-1} K_{IC} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{K_C - K_{CI} K_I^{-1} K_{IC}}_{= S_C} + \underbrace{K_{CI} \underbrace{\left(K_I^{-1} - B_I^{-1} - B_I^{-T} + B_I^{-T} K_I B_I^{-1}\right)}_{(K_I^{-1} - B_I^{-T}) K_I (K_I^{-1} - B_I^{-1})} K_{IC}}_{= T_C}$$

$$\begin{aligned} |||v_I|||^2 &= a\left(\Phi \tilde{V}_I \underline{v}_I, \Phi \tilde{V}_I \underline{v}_I\right) = \left(\tilde{V}_I^T K \tilde{V}_I \underline{v}_I, \underline{v}_I\right) = \\ &= (K_I \underline{v}_I, \underline{v}_I) \\ &\uparrow \end{aligned}$$

$$\tilde{V}_I^T K \tilde{V}_I = [\mathbf{O}, I_I] \begin{bmatrix} K_C & K_{IC} \\ K_{CI} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ I_I \end{bmatrix} = K_I.$$

- Folglich gilt:

$$\gamma^2 = \sup_{\substack{u_C = \Phi \tilde{V}_C \underline{u}_C \\ v_I = \Phi \tilde{V}_I \underline{u}_I}} \frac{a^2(u_C, v_I)}{|||u_C|||^2 \, |||v_I|||^2} =$$

$$= \sup_{\substack{\underline{u}_C \in I\!R^{N_C} \setminus \{\mathbf{O}\} \\ \underline{v}_I \in I\!R^{N_I} \setminus \{\mathbf{O}\}}} \frac{(\overbrace{(K_{IC} - K_I B_I^{-1} K_{IC})}^{= K_I (K_I^{-1} - B_I^{-1}) K_{IC}} \underline{u}_C, \underline{v}_I)}{((S_C + T_C)\, \underline{u}_C, \underline{u}_C)\, (K_I \underline{v}_I, \underline{v}_I)}$$

- Unter Benutzung der Beziehung (siehe $\boxed{\text{Ü 4.1}}$):

(4.22)
$$\sup_{\substack{\underline{u} \in I\!R^n \setminus \ker A \\ \underline{v} \in I\!R^m \setminus \{\mathbf{O}\}}} \frac{(B\underline{u}, \underline{v})^2}{(A\underline{u}, \underline{u})\, (C\underline{v}, \underline{v})} = \sup_{\underline{u} \in I\!R^n \setminus \ker A} \frac{(B^T C^{-1} B \underline{u}, \underline{u})}{(A\underline{u}, \underline{u})} ,$$

wobei $C = C^T$ p.d., $m \times m$ Matrix,
$A = A^T$ nichtnegative, $n \times n$ Matrix: $\ker A \subset \ker B$,
B – $m \times n$ Matrix.

erhalten wir mit $B = K_I \left(K_I^{-1} - B_I^{-1}\right) K_{IC}$, $A \overset{\text{spd}}{=} S_C + T_C$, $C \overset{\text{spd}}{=} K_I$

$$\gamma^2 = \sup_{\underline{u}_C \in I\!R^{N_C} \setminus \{\mathbf{O}\}} \frac{\left(K_{CI} \left(K_I^{-1} - B_I^{-T}\right) K_I K_I^{-1} K_I \left(K_I^{-1} - B_I^{-1}\right) K_{IC} \underline{u}_C, \underline{u}_C\right)}{((S_C + T_C)\, \underline{u}_C, \underline{u}_C)}$$

$$= \sup_{\underline{u}_C \in I\!R^{N_C} \setminus \{\mathbf{O}\}} \frac{(T_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}{((S_C + T_C)\, \underline{u}_C, \underline{u}_C)} =$$

$$= \sup_{\underline{u}_C \in I\!R^{N_C} \setminus \{\mathbf{O}\}} \frac{\frac{(T_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}{(S_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}}{1 + \frac{(T_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}{(S_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}} =$$

$\left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

$\frac{x}{1+x} \nearrow$ in $[0,\infty)$

$$= \frac{\sup_{\underline{u}_C} \frac{(T_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}{(S_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}}{1 + \sup_{\underline{u}_C} \frac{(T_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}{(S_C \underline{u}_C, \underline{u}_C)}} = \frac{\mu}{1+\mu} .$$

q.e.d.

■ $\boxed{\textbf{Ü 4.1}}$ Man beweise die Beziehung (4.22) !

■ **Da**

(4.23)
$$\tilde{V}_C^T K \tilde{V}_C = S_C + T_C \quad \text{und} \quad \tilde{V}_I^T K \tilde{V}_I = K_I,$$

erhalten wir aus den Sätzen 4.1 und 4.2 und aus Lemma 4.4 sofort den folgenden Satz:

__Satz 4.5:__ (Spektraläquivalenzsatz)

1. Der <u>exakte</u> (vgl. Pkt. 4.1.2) <u>ASM–DD–Präkonditionierer</u>

$$C = \begin{bmatrix} I_C & K_{CI}B_I^{-T} \\ \mathbf{O} & I_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_C + T_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C & \mathbf{O} \\ B_I^{-1}K_{IC} & I_I \end{bmatrix}$$

ist spektral äquivalent zu K, d.h.

$$(1-\gamma)\, C \le K \le (1+\gamma)\, C,$$

mit den <u>nicht verbesserbaren</u> Spektraläquivalenzkonstanten

$$\underline{\gamma} = \lambda_{\min}(C^{-1}K) = 1-\gamma \text{ und } \bar{\gamma} = \lambda_{\max}(C^{-1}K) = 1+\gamma,$$

wobei $\gamma = \sqrt{\mu/(1+\mu)}$ und $\mu \equiv \mu(B_I) = \rho\,(S_C^{-1}T_C(B_I))$.

Folglich gilt:

$$\kappa(C^{-1}K) = \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{\sqrt{1+\mu}+\sqrt{\mu}}{\sqrt{1+\mu}-\sqrt{\mu}} = (\sqrt{\mu}+\sqrt{1+\mu})^2.$$

2. Falls

(4.24) $\qquad C_C = C_C^T$ p.d.: $\underline{\gamma}_C C_C \le S_C + T_C \le \bar{\gamma}_C C_C,$

(4.25) $\qquad C_I = C_I^T$ p.d.: $\underline{\gamma}_I C_I \le K_I \le \bar{\gamma}_I C_I,$

dann ist der <u>inexakte</u> (vgl. Pkt. 4.1.3) <u>ASM–DD–Präkonditionierer</u>

$$C = \tilde{C} = \begin{bmatrix} I_C & K_{CI}B_I^{-T} \\ \mathbf{O} & I_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C & \mathbf{O} \\ B_I^{-1}K_{IC} & I_I \end{bmatrix}$$

spektral äquivalent zu K, d.h.

(4.26) $$\underbrace{\min\{\underline{\gamma}_C, \underline{\gamma}_I\}\left(1-\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)}_{=:\,\underline{\gamma}} C \le K \le \underbrace{\max\{\bar{\gamma}_C, \bar{\gamma}_I\}\left(1+\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)}_{=:\,\bar{\gamma}} C$$

mit $\mu \equiv \mu(B_I) = \rho\left(S_C^{-1}T_C\right)$. Folglich gilt die folgende zweiseitige Abschätzung von $\kappa\,(C^{-1}K)$:

$$\frac{\min\{\underline{\gamma}_C, \underline{\gamma}_I\}}{\max\{\bar{\gamma}_C, \bar{\gamma}_I\}}\,(\sqrt{\mu}+\sqrt{1+\mu})^2 \le \kappa\,(C^{-1}K) \le \frac{\max\{\bar{\gamma}_C, \bar{\gamma}_I\}}{\min\{\underline{\gamma}_C, \underline{\gamma}_I\}}\,(\sqrt{\mu}+\sqrt{1+\mu})^2$$

- Damit ergibt sich für den (inexakten) **ASM–DD–Präkonditionierer** folgende **Präkonditionierungsgleichung** im DD–ParPCG–Algorithmus aus Pkt. 3.3:

$\underline{\hat{w}} = C^{-1}\underline{\hat{d}}$	$\underline{\hat{w}}_C = C_C^{-1} \sum\limits_{s=1}^{p} A_{C_s}^T (\underline{\hat{d}}_{C_s} \underbrace{-K_{C_s I_S} B_{I_s}^{-T}}_{=E_{C_s I_s} \equiv E_{I_s C_s}^T\ (\downarrow)} \underline{\hat{d}}_{I_s})$ $\underline{\hat{w}}_{C_s} = A_{C_s}\underline{\hat{w}}_C$ $\underline{\hat{w}}_{I_s} = C_{I_s}^{-1}\underline{\hat{d}}_{I_s} \underbrace{-B_{I_s}^{-1} K_{I_s C_s}}_{\substack{=E_{I_s C_s}\ (\downarrow) \\ =B_{I_s C_s}}} \underline{\hat{w}}_{C_s}$ $s = \overline{1,p}$

- **Lemma 4.6:**

> Vor.: Für $C_C = C_C^T$ p.d. $\exists\ \underline{\delta}_C, \bar{\delta}_C = \text{const.} > 0$:
>
> (4.27) $\qquad \underline{\delta}_C C_C \leq S_C \leq \bar{\delta}_C C_C$
>
> Bh.: Dann gelten für C_C die Ungleichungen
>
> (4.24) $\qquad \underline{\gamma}_C C_C \leq S_C + T_C \leq \bar{\gamma}_C C_C.$
>
> mit
>
> (4.28) $\qquad \underline{\gamma}_C = \underline{\delta}_C$ und $\bar{\gamma}_C = (1+\mu)\,\bar{\delta}_C$

Beweis: (mms)
(4.27) und $S_C \leq S_C + T_C \leq (1+\mu)\,S_C \Rightarrow$ (4.28). **q.e.d.**

Bemerkung:
Ein guter Schur-Komplement–Präkonditionierer ist auch ein guter Präkonditionierer für S_C+T_C, falls μ klein ist !

■ **Lemma 4.7:** (μ–Abschätzung)

Vor.: Es existiere eine positive Konstante c_E = const. > 0 (≥ 1 wegen Ü 4.2) derart, daß für $E_{IC} := -B_I^{-1} K_{IC} : I\!R^{N_C} \to I\!R^{N_I}$ die Ungleichung

$$(4.29) \qquad \left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K \leq c_E \, \|\underline{v}_C\|_{S_C} \quad \forall\, \underline{v}_C \in I\!R^{N_C}$$

gilt, wobei $\|\cdot\|_K^2 := (K\,\cdot,\cdot)$ und $\|\cdot\|_{S_C}^2 = (S_C\,\cdot,\cdot)$.

Bh.: Dann gilt die (scharfe) Abschätzung

$$(4.30) \qquad \mu \equiv \rho\,(S_C^{-1} T_C) \leq c_E^2 - 1.$$

Beweis:

Unter Benutzung der Identität

$$\left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1} K_{IC} \underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K^2 =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} K_C & K_{CI} \\ K_{IC} & K_I \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1} K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1} K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\} \right)$$

$$= \|E_{IC}\underline{v}_C + K_I^{-1} K_{IC}\underline{v}_C\|_{K_I}^2 \quad \forall\, \underline{v}_C \in I\!R^{N_C},$$

erhalten wir die folgende μ–Darstellung:

$$(4.31) \qquad \mu = \max_{\underline{v}_C \in I\!R^{N_C} \setminus \{\mathbf{O}\}} \frac{(T_C\underline{v}_C, \underline{v}_C)}{(S_C\underline{v}_C, \underline{v}_C)} =$$

$$= \max_{\underline{v}_C} \frac{\left(K_{CI}\left(K_I^{-1} - B_I^{-T}\right) K_I \left(K_I^{-1} - B_I^{-1}\right) K_{IC}\underline{v}_C, \underline{v}_C\right)}{(S_C\underline{v}_C, \underline{v}_C)} =$$

$$= \max_{\underline{v}_C} \frac{\left\|K_I^{-1} K_{IC}\underline{v}_C - B_I^{-1} K_{IC}\underline{v}_C\right\|_{K_I}^2}{\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2} =$$

$$= \max_{\underline{v}_C} \frac{\left\|E_{IC}\underline{v}_C + K_I^{-1} K_{IC}\underline{v}_C\right\|_{K_I}^2}{\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2} =$$

$$= \max_{\underline{v}_C} \frac{\left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1} K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K^2}{\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2}$$

Aus den Beziehungen

$$\left(\begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right)_K =$$

$$= \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} K_C & K_{CI} \\ K_{IC} & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix} (K_C - K_{CI}K_I^{-1}K_{IC})\underline{v}_C \\ (K_{IC} - K_I K_I^{-1}K_{IC})\underline{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_C\underline{v}_C \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \Bigg) =$$

$$= (S_C\underline{v}_C, \underline{v}_C) = \|\underline{v}_C\|_{S_C}^2$$

und

$$\left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K^2 = (S_C\underline{v}_C, \underline{v}_C) = \|\underline{v}_C\|_{S_C}^2$$

erhalten wir zusammen mit der Voraussetzung (4.29) die Abschätzung

$$\left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K^2 =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K^2 - 2 \left(\begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right)_K + \left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ -K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K^2 =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K^2 - 2\,\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2 + \|\underline{v}_C\|_{S_C}^2 \le$$

$$\le c_E^2\,\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2 - \|\underline{v}_C\|_{S_C}^2 = (c_E^2 - 1)\,\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2 .$$

q.e.d.

■ $\boxed{\textbf{Ü 4.2}}$ Man beweise die Ungleichung $\|\underline{v}_C\|_{S_C} \le \left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K \quad \forall\, \underline{v}_C \in I\!\!R^{N_C}$.

■ **Folgerung 4.8:**

Vor.: 1. Es sei $E_{IC} : \mathbb{R}^{N_C} \to \mathbb{R}^{N_I}$ eine lineare Abbildung ($N_I \times N_C$–Matrix): (4.29), d.h. E_{IC} ist ein „energieerhaltender" Fortsetzungsoperator.

2. Es gelten weiter die Spektraläquivalenzungleichungen (4.24) und (4.25).

Bh.: Dann ist der DD–Präkonditionierer

(4.32) $$C = \begin{bmatrix} I_C & -E_{CI} \\ \mathbf{O} & I_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C & \mathbf{O} \\ -E_{IC} & I_I \end{bmatrix}$$

spektraläquivalent zu K, und es gelten die Spektraläquivalenzungleichungen (4.26) mit μ ersetzt durch $c_E^2 - 1$, wobei $E_{CI} = E_{IC}^T$.

4.1.5 Zur Wahl der Komponenten C_I, C_C, B_I bzw. B_{IC} (E_{IC}) im ASM–DD–Präkonditionierer

■ **Wahl von $\mathbf{C_I = C_I^T}$ p.d.: $\underline{\gamma}_\mathbf{I}\mathbf{C_I} \le \mathbf{K_I} \le \bar{\gamma}_\mathbf{I}\mathbf{C_I}$ (4.25):**

- $$\begin{array}{ccc} C_I & = & \operatorname{diag}\,[C_{I_s}]_{s=\overline{1,p}} \\ |\wr & & |\wr \\ K_I & = & \operatorname{diag}\,[K_{I_s}]_{s=\overline{1,p}} \end{array} \quad \text{, d.h. } \underline{\gamma}_{I_s} C_{I_s} \le K_{I_s} \le \bar{\gamma}_{I_s} C_{I_s}$$

  $\Rightarrow$ $\underline{\gamma}_I = \min\{\underline{\gamma}_{I_s}\}$, $\bar{\gamma}_I = \max\{\bar{\gamma}_{I_s}\}$

  $\Rightarrow$ Jeder gute Präkonditionierer C_{I_s} für die FE–Dirichlet–Teilgebietssteifigkeitsmatrix K_{I_s} ($\simeq$ PDgl. in Ω_s mit homog. Dirichletschen RB auf $\partial\,\Omega_s$) ist verwendbar (z.B. MG, BPX, MFK, ...) !

- $C_I \equiv C_{I_s} = K_I(I_I - M_I^k)^{-1}$ (Index s wird weggelassen ($\uparrow$)):

  Definieren C_I implizit durch ein stationäres, reguläres Iterationsverfahren (z.B. Multigrid–Verfahren) angewandt auf

  (4.33) $$K_I \underline{w}_I = \underline{d}_I$$

mit Iterationsmatrix M_I und Startnäherung $\underline{w}_I^0 = \mathbf{O}$:

(4.34)

$\underline{w}_I := C_I^{-1} \underline{d}_I$	$\underline{w}_I^0 = \mathbf{O}$ $n = 0, 1, \ldots, k-1$ $\underline{w}_I^{n+1} = M_I \underline{w}_I^n + (I_I - M_I)\, K_I^{-1} \underline{d}_I$ $\underline{w}_I = \underline{w}_I^k$

<u>Offenbar gilt (mms bzw. siehe [25]):</u>

(4.35) $$\boxed{C_I^{-1} = (I_I - M_I^k)\, K_I^{-1}}$$

<u>**Lemma 4.9:**</u>

<u>Vor.:</u> 1. $M_I = (M_I)^{*K_I}$ sei selbstadjungiert bzgl. des K_I–energetischen Skalarproduktes, d.h.

(4.36) $$(M_I \underline{u}_I, \underline{v}_I)_{K_I} = (\underline{u}_I, M_I \underline{v}_I)_{K_I} \quad \forall\, \underline{u}_I, \underline{v}_I \in I\!R^{N_I}.$$

2. $\rho\,(M_I) :=$ Spektralradius $(M_I) \equiv \|M_I\|_{K_I} \le \eta_I < 1$.

<u>Bh.:</u> Dann ist der Präkonditionierer (z.B. MG–Präkonditionierer)

(4.35) $$C_I = K_I\,(I_I - M_I^k)^{-1}$$

symmetrisch, p.d., und es gelten die Spektraläquivalenzungleichungen

(4.25) $$\underline{\gamma}_I C_I \le K_I \le \bar{\gamma}_I C_I$$

mit $\underline{\gamma}_I = 1 - \eta_I^k$ und $\bar{\gamma}_I = 1 + \eta_I^k$.
Falls

(4.37) $$(M_I \underline{u}_I, \underline{u}_I)_{K_I} \ge 0 \quad \forall\, \underline{u}_I \in I\!R^{N_I},$$

dann ist $\bar{\gamma}_I = 1$.

<u>Beweis:</u> siehe [25] Multigrid–Methoden.

■ Wahl von $\mathbf{B_I}$ bzw. $\mathbf{B_{IC}}$ („=“ $-\mathbf{B_I^{-1}K_{IC}}$):

- $B_I = \operatorname{diag}\,[B_{I_s}]_{s=\overline{1,p}}$ „ $\simeq$ “ K_I: 1) $\mu = \rho(S_C^{-1}T_C(B_I)) \searrow 0$

  $\downarrow$
  - regulär
  - nichtnotwendig spd

  2) $\left.\begin{array}{l} \text{a) } B_I^{-T} * \underline{d}_I \\ \text{b) } B_I^{-1} * \underline{v}_I \end{array}\right\}$ schnell, d.h. $O(N_I)$ Op.

  $\downarrow$ eigentlich

  a) $-K_{CI}B_I^{-T} * \underline{d}_I \equiv B_{CI} * \underline{d}_I$

  b) $-B_I^{-1}K_{IC}\underline{w}_C \equiv B_{CI} * \underline{w}_C$

  schnell ($O(N_I)$) durchführbar !

- Implizite Def. durch Iterationsverfahren (z.B. MG) mit Startnäherung = **O**:

$$B_I = K_I\left(I_I - \bar{M}_I^s\right)^{-1}, \quad B_I^T = K_I\left(I_I - \overset{*}{\bar{M}}{}_I^s\right)^{-1} \quad \text{(mms)}, \tag{4.38}$$

mit $\overset{*}{\bar{M}}{}_I^s = (M_I)^{*K_I}$, d.h.

$$\left(\bar{M}_I\underline{u}_I, \underline{v}_I\right)_{K_I} = \left(\underline{u}_I, \overset{*}{\bar{M}}_I\,\underline{v}_I\right)_{K_I} \qquad \forall\, \underline{u}_I, \underline{v}_I \in \mathbb{R}^{N_I}. \tag{4.39}$$

Lemma 4.10:

Vor.: $\|\bar{M}_I\|_{K_I} \leq \bar{\eta}_I < 1$.

Bh.:

$$\mu := \rho\left(S_C^{-1}T_C\right) \leq \bar{\eta}^{2s}\left(\lambda_{\max}\left(S_C^{-1}K_C\right) - 1\right), \tag{4.40}$$

mit $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}\left(S_C^{-1}K_C\right)$ ist maximaler Eigenwert des verallgemeinerten EWP

$$K_C\underline{v}_C = \lambda\, S_C\underline{v}_C.$$

<u>Beweis:</u>

$$\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bew. Lemma 4.7}}}{=} \max_{\underline{v}_C \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{O}\}} \frac{\|K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C - B_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C\|^2_{K_I}}{\|\underline{v}_C\|^2_{S_C}} \overset{\substack{(4.38) \\ \downarrow}}{=}$$

$$= \max_{\underline{v}_C} \frac{\left\|K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C - (I_I - \bar{M}_I^s)\, K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C\right\|^2_{K_I}}{\|\underline{v}_C\|^2_{S_C}} \le$$

$$\le \|\bar{M}_I\|^{2s}_{K_I} \max_{\underline{v}_C} \frac{\|K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C\|^2_{K_I}}{\|\underline{v}_C\|^2_{S_C}} \le$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ K_{CI}K_I^{-1}K_{IC}=K_C-S_C}}{\le} \bar{\eta}_I^{2s}\left(\max_{\underline{v}_C} \frac{(K_C\underline{v}_C, \underline{v}_C)}{(S_C\underline{v}_C, \underline{v}_C)} - 1\right) =$$

$$= \bar{\eta}_I^{2s}\left(\lambda_{\max}\left(S_C^{-1}K_C\right) - 1\right).$$

q.e.d.

<u>**Bemerkung 4.11:**</u>

1. Für PDgl. 2. Ordnung, d.h. $\mathbf{V}_0 \subset W_2^1(\Omega)$ (skalarer Fall) bzw. $\mathbf{V}_0 \subset \left[W_2^1(\Omega)\right]^l$ (Systeme) in (4.1), gilt:

   (4.41) $$\boxed{\lambda_{\max}\left(S_C^{-1}K_C\right) = \frac{1}{\lambda_{\min}(K_C^{-1}S_C)} = O(h^{-1}) \le ch^{-1},}$$

   (mms)
   $\lambda_{\min}(S_C) = O(h^{d-1}),\ \ \lambda_{\max}(S_C) = O(h^{d-2}),\ \ \kappa\,(S_C) = O(h^{-1}),$
   $\lambda_{\min}(K_C) = O(h^{d-2}),\ \ \lambda_{\max}(K_C) = O(h^{d-2}),\ \ \kappa\,(K_C) = O(1),\ $ (mms).

2. Aus (4.40) und (4.41) folgt dann unmittelbar die Abschätzung

   (4.42) $$\mu \le \bar{\eta}_I^{2s}\left(\frac{c}{h} - 1\right),$$

   d.h. $\mu \le$ const. $\ne c(h)$ bedeutet

   $$\boxed{\bar{\eta}_I^s \lesssim \sqrt{h} \ \text{ oder } \ s = O(\ln h^{-1}).}$$

3. Btr. Bed. (4.42) für $s = 1$ (z.B. 1 MG–Schritt):

$$\boxed{\bar{\eta}_I \leq \sqrt{h}}$$

MG-V-Zyklus

$\uparrow\downarrow$ $\boxed{\text{V11}}$	$\boxed{\text{V22}}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\bar{\eta}_I = \frac{1}{10} \leq \sqrt{\frac{1}{100}}$	$\bar{\eta}_I = \frac{1}{16} \leq \sqrt{\frac{1}{256}}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$h = 10^{-2}$	$h = \frac{1}{256}$
(?) 2D: $N_i \approx h^{-2} = 10^4$	$N_i \approx h^{-2} = 65536$
$\surd$ 3D: $N_i \approx h^{-3} = 10^6$	$N_i \approx h^{-3} = 16.8$ Mill.

$\underbrace{\hspace{10em}}$ Unbekannte pro Teilgebiet $\bar{\Omega}_i$!!

- Implizite Def. durch Iterationsverfahren (z.B. MG) mit Startnäherung $\neq \mathbf{O}$:

Definieren Operator

(4.43) $$B_{IC} = „ - B_I^{-1} K_{IC}“$$

implizit durch ein stationäres, reguläres Iterationsverfahren (z.B. MGM) angewandt auf

(4.44) $$K_I \, \underline{w}_I = -K_{IC} \, \underline{\hat{w}}_C$$

mit der Iterationsmatrix $\bar{M}_I$ und der Startnäherung

(4.45) $$\underline{w}_I^0 = E_{IC} \, \underline{\hat{w}}_C,$$

wobei $E_{IC} : I\!R^{N_C} \to I\!R^{N_I}$ ein energieerhaltender Fortsetzungsoperator i. S. von (4.29) ist:

(4.46)

$\underline{w}_I := B_{IC}\underline{\hat{w}}_C$	$\underline{w}_I^0 = E_{IC}\underline{\hat{w}}_C$ $n = 0, 1, \ldots, s-1$ $\underline{w}_I^{n+1} = \bar{M}_I \underline{w}_I^n + (I_I - \bar{M}_I) \; K_I^{-1} (-K_{IC}\underline{\hat{w}}_C)$ $\underline{w}_I = \underline{w}_I^s$

Offenbar gilt:

(4.47) $$\boxed{B_{IC} = \bar{M}_I^s E_{IC} + (I_I - \bar{M}_I^s) \, K_I^{-1}(-K_{IC})}$$

Tatsächlich,

$$\begin{aligned}\underline{w}_I^s &= \bar{M}_I\underline{w}_I^{s-1} + (I_I - \bar{M}_I)\,K_I^{-1}\overbrace{(-K_{IC}\underline{\hat{w}}_C)}^{=\underline{v}_I} = \\ &= \bar{M}_I\left[\bar{M}_I\underline{w}_I^{s-2} + (I_I - \bar{M}_I)\,K_I^{-1}\underline{v}_I\right] + (I_I - \bar{M}_I)\,K_I^{-1}\underline{v}_I = \\ &= \ldots = \bar{M}_I^s\underline{w}_I^0 + (I_I - \bar{M}_I^s)\,K_I^{-1}\underline{v}_I \qquad \#\end{aligned}$$

Ü 4.3 Man zeige, daß die zu (4.47) gehörende transponierte Matrix $B_{CI} = B_{IC}^T$ die Form $B_{CI} = E_{CI}\left(\bar{M}_I^T\right)^s + (-K_{CI})\left(I_I - \overset{*}{\bar{M}}{}_I^s\right)K_I^{-1}$ hat, wobei $E_{CI} = E_{IC}^T$ und $\overset{*}{\bar{M}}{}_I^s = (\bar{M}_I)^{*K_I}$.
Schreiben Sie analog zu (4.46) den zur Operation $\underline{\hat{w}}_C^s = B_{CI}\underline{\hat{d}}_I$ gehörenden Algorithmus auf !

Der DD–Präkonditionierer C mit den Komponenten B_{IC} und $B_{CI} = B_{IC}^T$ hat dann analog zu (4.33) offenbar die Form

$$C = \begin{bmatrix} I_C & -B_{CI} \\ \mathbf{O} & I_I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_C & \mathbf{O} \\ -B_{IC} & I_I \end{bmatrix}. \tag{4.48}$$

Folgendes Lemma gibt eine Abschätzung der Größe $\mu = \rho\left(S_C^{-1}T_C\right)$:

Lemma 4.12:

Vor.: 1. $\|\bar{M}_I\|_{K_I} \le \bar{\eta}_I < 1$,

2. $\left\|\begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix}\right\|_K \le c_E\,\|\underline{v}_C\|_{S_C} \quad \forall\,\underline{v}_C \in I\!R^{N_C}.$ (4.29)

Bh.: $\mu = \rho\left(S_C^{-1}T_C\right) \le \bar{\eta}_I^{2s}\,(c_E^2 - 1).$

Beweis: (vgl. Beweis Lemma 4.7 und Lemma 4.10).

$$\begin{aligned}\mu &= \rho\left(S_C^{-1}T_C\right) = \max_{\underline{v}_C}\frac{\left\|K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C + B_{IC}\underline{v}_C\right\|_{K_I}^2}{\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2} = \\ &= \max_{\underline{v}_C}\frac{\left\|K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C + \bar{M}_I^sE_{IC}\underline{v}_C - (I_I - \bar{M}_I^s)\,K_I^{-1}K_{IC}\right\|_{K_I}^2}{\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2} \le \\ &\le \bar{\eta}_I^{2s}\max_{\underline{v}_C}\frac{\left\|E_{IC}\underline{v}_C + K_I^{-1}K_{IC}\underline{v}_C\right\|_{K_I}^2}{\|\underline{v}_C\|_{S_C}^2} \underset{\text{Lemma 4.7}}{\underset{\uparrow}{\le}} \bar{\eta}_I^{2s}(c_E^2 - 1).\end{aligned}$$

q.e.d.

- Energieerhaltender Fortsetzungsoperator $E_{IC} : \mathbb{R}^{N_C} \to \mathbb{R}^{N_I}$: (4.29)
  $\left\| \begin{smallmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{smallmatrix} \right\|_K \le c_E \, \|\underline{v}_C\|_{S_C}$:

  1. Mittlungsfortsetzung [32]:
     - 2D und 3D, kompliziert zu realisieren, $O(N)$–Operationen.
     - $c_E = O(1)$
     - Motivation: $\left\| \Phi \begin{pmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{pmatrix} \right\|_{H^1(\Omega)} \le \tilde{c}_E \, \|\Phi \underline{v}_C\|_{H^{1/2}(\Gamma_C)} \overset{\text{(mms)}}{\Longrightarrow} \text{(4.29) } c_E = c_E(\tilde{c}_E)$

  2. Hierarchische Fortsetzung [19] (siehe auch [13]): $(\downarrow)$
     - 2D, leicht zu realisieren und billig, $O(N)$–Op.
     - $c_E = O(l)$, mit $l = \ln(H/h)$ – Anzahl der Level.

  3. BPX–Fortsetzung [33, 20]:
     - 2D und 3D, leicht zu realisieren und billig, $O(N)$–Operationen.
     - $c_E = O(1)$

- Bemerkung zur hierarchischen Fortsetzung:

(4.49) $$\hat{\Phi} = \Phi \hat{H} \text{ mit } \hat{H} = \begin{bmatrix} H_C & \mathbf{O} \\ H_{IC} & H_I \end{bmatrix}, \quad \hat{H}^{-1} = \begin{bmatrix} H_C^{-1} & \mathbf{O} \\ -H_I^{-1} H_{IC} H_C^{-1} & H_I^{-1} \end{bmatrix}$$

Knotenbasis Φ $\quad \xrightarrow{\hat{H}} \quad$ hierarchische Basis $\hat{\Phi}$

(4.50) $$E_{IC} = H_{IC} H_C^{-1}$$

Tatsächlich,

$$v(x) = \Phi \begin{bmatrix} H_C \\ H_{IC} \end{bmatrix} \underline{\hat{v}}_C = \Phi_C H_C \underline{\hat{v}}_C + \Phi_I H_{IC} \underline{\hat{v}}_C$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v}_C = [v(x^{(i)})]_{i \in \omega_C} = H_C \underline{\hat{v}}_C$$

$$\underline{v}_I = [v(x^{(i)})]_{i \in \omega_I} = H_{IC} \underline{\hat{v}}_C = \underbrace{H_{IC} H_C^{-1}}_{= E_{IC}} \underline{v}_C = E_{IC} \underline{v}_C \qquad \#$$

■ **<u>Wahl von $\mathbf{C_C = C_C^T}$ p.d.:</u>** $\underline{\gamma}_{\mathbf{C}}\mathbf{C_C} \le \mathbf{S_C} + \mathbf{T_C} \le \bar{\gamma}_{\mathbf{C}}\mathbf{C_C}$**:**

1. <u>$(S_C + T_C)$–Präkonditionierer:</u> ?

   <u>Aber:</u>
   $$\begin{aligned} S_C + T_C &= K_C - K_{CI}B_I^{-1}K_{IC} - K_{CI}B_I^{-T}K_{IC} + K_{CI}B_I^{-T}K_IB_I^{-1}K_{IC} \\ &= \underline{\underline{K_C + K_{CI}B_{IC}}} + B_{CI}K_{IC} + B_{CI}K_IB_{IC} \end{aligned}$$

   $\curvearrowright$ $(S_C + T_C) * \underline{v}_C$ ist <u>schnell</u> ausführbar !

   ? Wie kann das ausgenutzt werden ?

2. **<u>Lemma 4.6:</u>** $\underline{\delta}_C C_C \le S_C \le \bar{\delta}_C C_C$ $\curvearrowright$ $\underline{\gamma}_C = \underline{\delta}_C$ und $\bar{\gamma}_C = \bar{\delta}_C\,(1+\mu)$:

   $\rightarrow$ Schur–Komplement–Präkonditionierer !

   - <u>BPS–Präkonditionierer (1986):</u> [3]:

     $C_C = \delta\,(J_C^T * \mathrm{BPS} * J_C)$, $J_C = D_C^{-1/2}$, $D_C = [\ \backslash\ ]$,
     δ – Skalierungsparameter.

     <u>Resultat:</u> (2D–Fall, 2. Ordnung PDgl.)

     $$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\gamma}_C = \delta\,\underline{c}\,(1 + \ln^2(H/h))^{-1}, \ \ \bar{\gamma}_C = \delta\,\bar{c}\,(1+\mu) \\ Q(C_C^{-1} * \underline{v}_C) = O(h_l^{-1}\ln h_l^{-1} + H^{-4}), \ \ h_l = h/H, \ \ H = O\left(p^{-1/2}\right). \end{array}} \tag{4.51}$$

   - <u>BPX–Schur–Komplement–Präkonditionierer (1991):</u> [41]

     $$C_C^{-1} = \frac{1}{\delta}\, M_C D_C^{-1} M_C^T, \tag{4.52}$$

     wobei δ – Skalierungsparameter,
     M_C – „Multilevelbasis“–Transformationsmatrix der Dim. $N_C \times \bar{N}_C$ mit $\bar{N}_C > N_C$,
     $D_C = \left[\begin{array}{c|c} \backslash & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & K_H \end{array}\right]$ – $(\bar{N}_C \times \bar{N}_C)$–Skalierungsmatrix.

     <u>Resultat:</u>

     $$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\gamma}_C = O(1), \ \ \bar{\gamma}_C = O(1) \qquad \text{(2D, 3D)} \\ Q\,(C_C^{-1} * \underline{v}_C) = \left\{ \begin{array}{ll} O(h^{-1}), & \text{2D} \\ O(h^{-2}), & \text{3D} \end{array} \right. \end{array}}$$

- Hierarchische Schur–Komplement–Präkonditionierer (1990): [39, 16, 17]

(4.53) $$C_C = \delta\, H_C^{-T} D_C H_C^{-1}$$

wobei δ – Skalierungsparameter,
H_C – $(N_C \times N_C)$–Basistransformationsmatrix (vgl. (4.49),
D_C – $(N_C \times N_C)$–Skalierungsmatrix.

Resultat: (2D–Fall; 2. Ordnung PDgl.)

(4.54) $$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\gamma}_C = \delta\, \underline{c}\, (1 + \ln^2(H/h))^{-1}, \quad \bar{\gamma}_C = \delta\, \bar{c}\, (1+\mu), \quad H = h_0 \\ Q\,(C_C^{-1} * \underline{v}_C) = O\,(h^{-1}) \end{array}}$$

Zeigen, daß aus dem Yserantantschen Resultat (1986)

(4.55) $$\underline{c}\,(1 + \ln^2 h^{-1})^{-1} \le \lambda_{\min}\left(\hat{K}\right) \le \lambda_{\max}\left(\hat{K}\right) \le \bar{c} \qquad (h_0 \cong 1),$$

mit $\hat{K} = \hat{H}^T K \hat{H}$ – Steifigkeitsmatrix bzgl. der hierarchischen Basis,
die Ungleichungen

(4.56) $$\lambda_{\min}\left(\hat{K}\right) \hat{H}_C^{-T} \hat{H}_C^{-1} \le S_C \le \lambda_{\max}\left(\hat{K}\right) \hat{H}_C^{-T} \hat{H}_C^{-1}$$

folgen. Aus (4.55), (4.56) und Lemma 4.6 erhalten wir dann sofort (4.54) für $D_C = I_C$.

Tatsächlich, sei

(4.57) $$\hat{S}_C = \hat{K}_C - \hat{K}_{CI} \hat{K}_I \hat{K}_{IC}$$

das Schur–Komplement der hierarchischen Steifigkeitsmatrix $\hat{K}$. Dann gilt (mms):

(4.58) $$\hat{S}_C = H_C^T S_C H_C \text{ mit } S_C = K_C - K_{CI} K_I^{-1} K_{IC}.$$

Schätzen nun $\left(\hat{S}_C \underline{u}_C, \underline{u}_C\right)$ a) $\ge$ und b) $\le$ ab:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad \left(\hat{S}_C \underline{u}_C, \underline{u}_C\right) &= \inf_{\underline{u}_I} \left(\hat{K}\underline{u}, \underline{u}\right) \ge \\
&\ge \lambda_{\min}\left(\hat{K}\right) \inf_{\underline{u}_I} (\underline{u}, \underline{u}) = \lambda_{\min}\left(\hat{K}\right) (\underline{u}_C, \underline{u}_C) \\
\text{b)} \quad \left(\hat{S}_C \underline{u}_C, \underline{u}_C\right) &= \left(\hat{K}_C \underline{u}_C, \underline{u}_C\right) - \left(\hat{K}_{CI} \hat{K}_I \hat{K}_{IC} \underline{u}_C, \underline{u}_C\right) \le \\
&\le \left(\hat{K}_C \underline{u}_C, \underline{u}_C\right) \le \lambda_{\max}\left(\hat{K}_C\right) (\underline{u}_C, \underline{u}_C) \le \\
&\le \lambda_{\max}\left(\hat{K}\right) (\underline{u}_C, \underline{u}_C)
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\lambda_{\min}(\hat{K})\,(\underline{u}_C,\underline{u}_C) \le (\underbrace{H_C^T S_C H_C}_{=\hat{S}_C}\underline{u}_C,\underline{u}_C) \le \lambda_{\max}(\hat{K})\,(\underline{u}_C,\underline{u}_C)$$

$$\underline{v}_C = H_C\underline{u}_C$$

$$\lambda_{\min}\left(\hat{K}\right)\left(H_C^{-T}H_C^{-1}\underline{v}_C,\underline{v}_C\right) \le (S_C\underline{v}_C,\underline{v}_C) \le \lambda_{\max}\left(\hat{K}\right)\left(H_C^{-T}H_C^{-1}\underline{v}_C,\underline{v}_C\right) \qquad \#$$

4.2 Der MSM–DD–Präkonditionierer

- **Btr. den DD–Präkonditionierer (4.48)**

$$C = \begin{bmatrix} I_C & -B_{CI} \\ \mathbf{O} & I_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_C & \mathbf{O} \\ -B_{IC} & I_I \end{bmatrix}$$

mit den Komponenten

$$\begin{cases} C_I &= K_I\left(I_I - \overset{*}{\tilde{M}}{}_I^k\,\tilde{M}_I^k\right)^{-1}, \quad \overset{*}{\tilde{M}}_I = \left(\tilde{M}_I\right)^{*K_I}; \\ B_{IC} &= \tilde{M}_I^k\bar{M}_I^s E_{IC} + \left(I_I - \tilde{M}_I^k\bar{M}_I^s\right)K_I^{-1}(-K_{IC}); \\ E_{IC} &: \mathbb{R}^{N_C} \to \mathbb{R}^{N_I} - \text{ energieerhaltender Fortsetzungsoperator: (4.29) } (\uparrow); \\ B_{CI} &= B_{IC}^T = \qquad \text{(mms)}; \\ C_C &= C_C^T \text{ p.d.: } \underline{\gamma}_C C_C \le S_C + T_C \le \bar{\gamma}_C C_C \quad (\uparrow). \end{cases}$$

In [15] wird dieser Präkonditionierer aus der MSM hergeleitet.

- **Man löse folgende Aufgaben:**

1. Man schreibe den Präkonditionierungsalgorithmus

$\underline{\hat{w}} = C^{-1}\underline{\hat{d}}$	(mms)

detailiert auf, und zeige, daß man mit k $\tilde{M}_I$-, k $\overset{*}{\tilde{M}}_I$-, s $\bar{M}_I$- und s $\overset{*}{\bar{M}}_I$-Iterationen auskommt !

2. Man zeige, daß unter den Voraussetzungen
   - $\|\tilde{M}_I\|_{K_I} \leq \tilde{\eta}_I < 1$,
   - $\|\bar{M}_I\|_{K_I} \leq \tilde{\eta}_I < 1$,
   - $$\left\| \begin{bmatrix} \underline{v}_C \\ E_{IC}\underline{v}_C \end{bmatrix} \right\|_K \leq c_E \, \|\underline{v}_C\|_{S_C} \quad \forall \, \underline{v}_C \in \mathbb{R}^{N_C} \tag{4.29}$$

   die folgenden Abschätzungen gelten:
   - $\underline{\gamma}_I = 1 - \bar{\eta}_I^{2k}, \;\; \bar{\gamma}_I = 1$,
   - $\mu = \rho\,(S_C^{-1}T_C) \leq \bar{\eta}_I^{2s}\, \tilde{\eta}_I^{2k}(c_E^2 - 1)$.

■ In der Praxis führen dann offenbar die folgenden Komponenten zu einem **„optimalen“ Präkonditionierer:**

- $k = 1, \; \tilde{M}_I = V20, \; \overset{*}{\tilde{M}}_I = V02$;
- $s = 0$;
- E_{IC} = BPX–Fortsetzung;
- C_C = BPX–Schur–Komplement–Präkonditionierer.

Im Programm (2D) verwenden wir bislang anstelle der BPX–Fortsetzung die billigere hierarchische Fortsetzung:

$\curvearrowright \quad \mu \leq \bar{\eta}_I^{2s}\, \tilde{\eta}_I^{2k}(c^2 l^2 - 1), \quad l = \ln(H/h) + 1.$

Für $s = 0$ und $k = 1$ $\curvearrowright$

$$\mu \leq \tilde{\eta}_I^2(c^2 l^2 - 1) < c^2, \text{ falls } \tilde{\eta}_I \leq 1/l.$$

Angenommen: $\tilde{\eta}_I = \frac{1}{4}$ $\curvearrowright$ $l = 4$ Levels sind möglich !

Literaturverzeichnis

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, San Francisco, 1975.

[2] O. Axelsson and V. Barker. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems.* Academic Press, New York, 1984.

[3] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and A. H. Schatz. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. I-IV. *Math. Comput.*, 47, 49, 51, 53(175, 179):103–234, 1–16, 415–430, 1–24, 1986, 1987, 1988, 1989.

[4] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and J. Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comput.*, 55:1–22, 1990.

[5] T. F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, and O. B. Widlund, editors. *Second International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, 1989. SIAM. Los Angeles, California, January 14-16, 1988.

[6] T. F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, and O. B. Widlund, editors. *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, 1990. SIAM. Houston, March 20-22, 1989.

[7] M. Dryja. A capacitance matrix method for Dirichlet problems on polygonal regions. *Numer. Math.*, 39(1):51–64, 1982.

[8] M. Dryja. A finite element-capacitance matrix method for elliptic problems on regions partitioned into substructures. *Numer. Math.*, 34:153–168, 1984.

[9] M. Dryja and O. B. Widlund. An additive variant of Schwarz alternating method for the case of many subregions. Technical Report 339, Department of Computer Science, Courant Institute, New York, 1987. also Ultracomputer Note 131.

[10] R. Glowinski, G. H. Golub, G. A. Meurant, and J. Périaux, editors. *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, 1988. SIAM. Paris, January 1987.

[11] R. Glowinski, Y. Kuznetsov, G. Meurant, J. Périaux, and O. B. Widlund, editors. *Fourth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, 1991. SIAM. Moscow, May 21-25, 1990.

[12] C. Grossmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[13] G. Haase. Hierarchical extension operators plus smoothing in domain decomposition preconditioners. *Appl. Num. Math.*, 23:327–346, 1997.

[14] G. Haase. *Skriptum zur Vorlesung „Parallelisierung und Vektorisierung numerischer Algorithmen“).* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1997.

[15] G. Haase and U. Langer. The non-overlapping domain decomposition multiplicative Schwarz method. *International Journal of Computer Mathematics*, 44:223–242, 1992.

[16] G. Haase, U. Langer, and A. Meyer. A new approach to the Dirichlet decomposition method. In S. Hengst, editor, *Proceedings of the "5-th Multigrid Seminar" held at Eberswalde, GDR, May 14-18, 1990*, pages 1–59, Berlin, 1990. Academy of Science. Report-Nr. R-MATH-09/90.

[17] G. Haase, U. Langer, and A. Meyer. The approximate dirichlet decomposition method. part II: Application to 2nd-order elliptic B.V.P.s. *Computing*, 47:153–167, 1991.

[18] G. Haase, U. Langer, and A. Meyer. Domain decomposition preconditioners with inexact subdomain solvers. *J. of Num. Lin. Alg. with Appl.*, 1:27–42, 1992.

[19] G. Haase, U. Langer, A. Meyer, and S. Nepomnyaschikh. Hierarchical extension operators and local multigrid methods in domain decomposition preconditioners. *East-West Journal of Numerical Mathematics*, 2:173–193, 1994.

[20] G. Haase and S. Nepomnyaschikh. Explicit extension operators on hierarchical grids. Institutsbericht 524, Johannes Kepler University Linz, Institute for Mathematics, 1997.

[21] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[22] M. Jung, U. Langer, A. Meyer, W. Queck, and M. Schneider. Multigrid preconditioners and their applications. In G. Telschow, editor, *Third Multigrid Seminar, Biesenthal 1988*, pages 11–52, Berlin, 1989. Karl–Weierstrass–Institut. Report R–MATH–03/89.

[23] D. Keyes, T. Chan, G. Meurant, J. Scroggs, and R. Voigt, editors. *Fifth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Philadelphia, 1992. SIAM. Norfolk, May 6-8, 1991.

[24] D. Keyes and J. Xu, editors. *Seventh International Conference on Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, Providence, Rhode Island, 1995. AMS, Contemporary Mathematics. The Pennsylvania State University, October 27-30, 1993.

[25] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung MULTIGRID–METHODEN.* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[26] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK I (Operatorgleichungen).* Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[27] U. Langer. *Skriptum zur Vorlesung NUMERIK II (RWA)*. Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik, Linz, 1996.

[28] U. Langer. *Lectures on "Domain Decomposition Methods"*. Workshop "Industria y Matematicas", Cocoyoc, Mexico, 1997.

[29] P. LeTallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 1(2):1–220, 1994.

[30] P. L. Lions. On the Schwarz alternating method I,II,III. In *[10], [5], [6]*, pages 1–42, 47–70, 202–223. SIAM, Philadelphia, 1988, 1989, 1990.

[31] A. M. Matsokin and S. V. Nepomnyaschikh. A Schwarz alternating method in a subspace. *Soviet Mathematics*, 29(10):78–84, 1985.

[32] S. Nepomnyaschikh. *Domain decomposition and Schwarz method in subspace for approximate solution of elliptic boundary value problems*. PhD thesis, Academy of Science, Novosibirsk, 1986. (in Russian).

[33] S. Nepomnyaschikh. Optimal multilevel extension operators. Technical Report 3, TU Chemnitz-Zwickau, Faculty for Mathematics, Cemnitz, 1995.

[34] P. Oswald. *Multilevel Finite Element Approximation*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.

[35] J. S. Przemieniecki. Matrix structural analysis of substructures. *AIAA J.*, 1:138–147, 1963.

[36] A. Quarteroni, J. Periaux, Y. Kuznetsov, and O. B. Widlund, editors. *Sixth International Conference on Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, Providence, Rhode Island, 1994. AMS, Contemporary Mathematics. Como, June 15-19, 1992.

[37] H. A. Schwarz. *Über einige Abbildungsaufgaben. Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, volume 2. Springer, Bonn, 1890. First published in „Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich“, 1870, v.15, pp 272-286.

[38] B. Smith, P. Bjorstad, and W. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic PDEs*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[39] B. Smith and O. Widlund. A domain decomposition algorithm using a hierarchical basis. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 11:1212–1220, 1990.

[40] S. L. Sobolev. The Schwarz algorithm in the theory of elasticity. *Dokl. Acad. Nauk USSR*, 4:243–246, 1936.

[41] C. Tong, T. Chan, and C. Kuo. A decomposition preconditioner based on a change to a multilevel nodal basis. *J. Sci. Stat. Comput.*, 12(6):1486–1495, Nov. 1991.

[42] J. Xu. Iterative methods by space decomposition and subspace correction: A unifying approach. Technical Report AM67, Department of Mathematics, Penn State University, 1990.

[43] H. Yserentant. On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49(4):379–412, 1986.