KV “NUMERIK und OPTIMIERUNG” FÜR MECHATRONIKER
- ARBEITSBLATT 2 -

WS 2019/2020

AUSGABETERMIN: Donnerstag, 19.12.2019

ABGABETERMIN: **Freitag, 21.2.2020, 12:00 Uhr**

NAME (**N-Z**):

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Arbeitssblatt zusammen !

---

2 Numerische Lösung von 1D RWA mit der FEM

2.1 Variationsformulierung (15 Punkte)

Schreiben Sie die Variationsformulierung der eindimensionalen (1D) Randwertaufgabe (RWA)

$$-(\lambda u'(x))' + c\rho w u'(x) + \alpha u(x) = f(x), \;\; x \in (a,b), \tag{1}$$

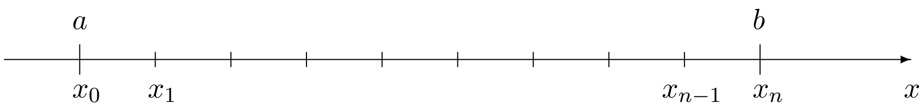
mit den Randbedingungen (RB) $\lambda(a)u'(a) = \alpha_a(u(a) - g_a)$ und $u(b) = g_b$ in der Form

$$\begin{aligned} &\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u,v) = < F, v > \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0, \\ &\text{d.h.} \;\; \mathbf{V}_g = ? \;\; \mathbf{V}_0 = ? \;\; a(u,v) = ? \;\; < F, v > = ? \end{aligned} \tag{2}$$

auf, wobei λ, c, ρ gegebene positive Konstanten sind, α eine nichtnegative Konstante ist, w, g_a, g_b ebenfalls gegebene, aber beliebige Konstanten sind und $f \in L_2(a,b)$ die gegebene rechte Seite der Differentialgleichung (1) ist.

2.2 Programmierbeispiel (20 Punkte)

Schreiben und implementieren Sie ein FE–Programm zur numerischen Lösung von (2) mit konstanten Koeffizienten λ, c, ρ, w, α unter Verwendung linearer Elemente auf einer gleichmäßigen Vernetzung mit n Elementen.



Eingangsdaten: λ, c, ρ, w, α, $f(x)$ und RB (1., 2., 3. Art) für $x = a$ und $x = b$.

Ausgabedaten: Tabelle: x_i, u_i ($\approx u(x_i)$) oder Grafik !

Verwenden Sie zur Implementierung des FE-Programms die im Abschnitt 2.6 der Vorlesung behandelte FEM-Technologie (Schleife über alle Elemente) !

2.3 Testbeispiele (15 Punkte)

Lösen Sie mit Ihrem FE–Programm die 1D RWA (2) mit folgenden Daten:

$$\begin{aligned}
&a = 0,\ \ b = 1,\\
&\lambda = 1,\\
&c = 1,\ \ \rho = 1,\\
&w = -(k+1)\cdot 10,\ \text{ wobei } k := \text{letzte Ziffer der Matrikelnummer},\\
&\alpha = 0,\\
&f = 0,\\
&g_a = 0,\ \ g_b = 1, \alpha_a = 10^6.
\end{aligned}$$

Testen Sie mit verschiedenen n, und vergrößern Sie n so lange, bis Sie eine „zufriedenstellende“ Lösung erhalten ! Finden Sie das kleinste n, das physikalisch sinnvolle Lösungen liefert !

2.4 Diskretisierungsfehler (20 Zusatzpunkte)

Lösen Sie die RWA aus Punkt 2.3 analytisch ! Berechnen Sie den relativen Fehler

$$e_{\text{rel}} := \frac{\max\limits_{i=\overline{0,n}} |u(x_i) - u_h(x_i)|}{\max\limits_{j=\overline{0,n}} |u(x_i)|}\ ,$$

in der (diskreten) Maximumnorm, wobei $u(x)$ die analytisch berechnete exakte Lösung der RWA und $u_i = u_h(x_i),\ \ i = \overline{0,n}$ die mit dem FE–Programm berechnete FE–Näherungslösung sind. Stellen Sie den relativen Fehler e_{rel} in Abhängigkeit von n (bzw. $h = (b-a)/n = 1/n$) in einer Tabelle oder grafisch dar !

3 Numerische Lösung eines Optimierungsproblems

Wir betrachten das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem

$$\min_{\substack{u\in L_2(0,1)\ \text{und}\ y\in V_g\\ \text{s.t.}\ \int_0^1 y'(x)v'(x)\,dx+\alpha y(0)v(0)=\int_0^1 u(x)v(x)\,dx+\alpha y_d(0)v(0)\ \forall v\in V_0}} \frac{1}{2}\int_0^1 (y(x)-y_d(x))^2\,dx + \frac{\gamma}{2}\int_0^1 (u(x))^2\,dx \tag{3}$$

mit dem gegebenen, stückweise konstanten Temperaturprofil $y_d \in L_2(0,1)$, der gegebenen Wärmeübergangszahl $\alpha = 2^k$, und dem Regularisierungsparameter (= Parameter zur Bewertung der Kosten der Steuerung) γ, wobei k die letzte Ziffer der Matrikelnummer ist,

$$V_g := \{y \in V = H^1(0,1) : \ y(1) = y_d(1)\} \text{ und } V_0 := \{v \in V = H^1(0,1) : \ v(1) = 0\}.$$

3.1 Klassische Formulierung (5 Zusatzpunkte)

Geben Sie die klassische Formulierung der RWA (Zustandsgleichung)

$$\text{Ges. } y \in V_g : \int_0^1 y'(x)v'(x)\,dx + \alpha y(0)v(0) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx + \alpha y_d(0)v(0)\ \forall v \in V_0 \qquad (4)$$

an !

3.2 FEM - Diskretisierung (10 Punkte)

Diskretisieren Sie das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem (3) mit linearen finiten Elementen und geben Sie das endlichdimensionale (diskretisierte), restringierte Optimierungsproblem an !

3.3 KKT - System (10 Punkte)

Schreiben Sie die Lagrange-Funktion und das KKT - System (= hier ein lineares Gleichungssystem !) auf !

3.4 Programm (20 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm zur Generierung und Lösung des KKT-Systems (Eingabedaten: $y_d(.)$, γ, $h = 1/n$); Ausgabedaten: y_h und u_h) !

3.5 Test (10 Punkte)

Testen Sie Ihr Programm für das gewünschte Temperaturprofil (desired state) $y_d(x) = 43$ für $x \in [0.4, 0.6]$ und $y_d(x) = 37$ sonst. Stellen Sie die berechnete optimale Steuerung $u_h(x)$ und den dazugehörigen Temperaturverlauf $y_h(x)$ sowie das gewünschte Temperaturprofil $y_d(x)$ in einer Abbildung grafisch dar ! Wählen Sie den Regularisierungsparameter γ geeignet !