Prüfungsfragen

1. Modellieren Sie ein örtlich eindimensionales, instationäres Wärmeleitproblem und lösen Sie es numerisch mit dem Differenzenverfahren ! Was können Sie über Approximation, Stabilität und Konvergenz aussagen ?

2. Wie würden Sie das folgende örtlich eindimensionale Schwingungsproblem numerisch lösen ? Gesucht ist *u(x,t):*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \tag{1}$$

   unter den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \in (0,T) \tag{2}$$

   und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in [0,1]. \tag{3}$$

3. Man löse die Zweipunkterandwertaufgabe

$$-u''(x) + a(x)u(x) = f(x) \;\; \forall x \in (0,1), \quad u(0) = 1 \text{ und } u'(1) = 1$$

   mit der Methode der finiten Elemente ! Was wissen Sie über den Diskretisierungsfehler ?

4. In der Praxis werden Integrale der Form

$$\int_a^b g(x)dx$$

   numerisch berechnet. Erklären Sie die Gauß-Formeln Gauß-k und leiten Sie eine Fehlerabschätzung für die Mittelpunktsregel (= Gauß-1 = einfachste Gauß-Formel (k=1)) her !

5. Was verstehen Sie unter einem Lagrangschen Interpolationspolynom und wie kann man es zur numerischen Integration nutzen ? Erläutern Sie die Newton-Cotes-Formeln !

6. Wie würden Sie ein Gleichungssystem mit einer tridiagonalen Systemmatrix auflösen? Unter welchen Bedingungen können Sie die Durchführbarkeit und die Stabilität des Algorithmus garantieren ?

7. Geben Sie die Variationsformulierung des vom Prüfer ad hoc gegebenen 1D stationären Wärmeleitproblems an und lösen Sie es numerisch mit der Methode der finiten Elemente !

8. Erklären Sie die FEM-Technologie (elementweiser Aufbau der Steifigkeitsmatrix K_h und des Lastvektors $\underline{f}_h$ + Einbau der Randbedingungen) zur Generierung das FEM-Gleichungssystems $K_h\underline{u}_h = \underline{f}_h$ an Hand des Beispiels

$$-u''(x) = f(x),\, x \in (a,b),\ u(a) = g_a,\ -u'(b) = \alpha_b(u(b) - g_b) \qquad (4)$$

aus der Vorlesung.

9. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem

$$\text{Ges. } u \in V_g :\ a(u,v) = \langle F, v\rangle\ \forall v \in V_0 \qquad (5)$$

äquivalent zum Energieminimierungsproblem

$$\text{Ges. } u \in V_g :\ J(u) = \min_{w \in V_g} J(w) := \frac{1}{2}a(w,w) - \langle F, v\rangle \qquad (6)$$

ist, falls die Bilinearform $a(.,.)$ symmetrisch und positiv ist. Was verstehen Sie unter dem Galerkin- und dem Ritz-Verfahren ?

10. Was verstehen Sie unter einer Triangularisierung eines Rechengebietes Ω ? Welche Informationen zur Representation eines Netzes werden durch einen Netzgenerator generiert ?

11. Erklären Sie die FEM-Technologie (elementweiser Aufbau der Steifigkeitsmatrix K_h und des Lastvektors $\underline{f}_h$ + Einbau der Randbedingungen) zur Generierung das FEM-Gleichungssystems $K_h\underline{u}_h = \underline{f}_h$ an Hand des 2D Beispiels

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}(\lambda_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\lambda_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)) + a(x)u(x) = f(x),\ \ x = (x_1, x_2) \in \Omega \quad (7)$$

mit Randbedingungen 1., 2. und 3. Art auf den Randstücken Γ_1, Γ_2 und Γ_3 von $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ aus der Vorlesung.

12. Geben Sie die Variationsformulierung eines vom Prüfer ad hoc gegebenen 2D stationären Wärmeleitproblems an und lösen Sie es numerisch mit der Methode der finiten Elemente unter Benutzung der FEM-Technologie, vgl. Aufgabe 11 !

13. Bei der Diskretisierung von elliptischen Randwertaufgaben zweiter Ordnung durch die FEM entstehen Gleichungssysteme der Art $K_h\underline{u}_h = \underline{f}_h$ zur Bestimmung des Vektors der Knotenwerte $\underline{u}_h$, wobei K_h die Steifigkeitsmatrix und $\underline{f}_h$ den Lastvektor bezeichnen. Welche Eigenschaften haben diese Gleichungssysteme ? Wie würden Sie diese Gleichungssysteme auflösen ?

14. Erklären Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren ! Zeigen Sie, dass das Gaußsche Eliminationsverfahren zur LU-Zerlegung äquivalent ist ! Wieviele arithmetische Operationen benötigt das Gaußsche Eliminationsverfahren für eine vollbesetzte Matrix und wieviele arithmetische Operationen für eine Bandmatrix mit der Bandweite m ?

15. Welche Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ kennen Sie ? Erklären Sie diese Iterationsverfahren !

16. Erklären Sie das (vorkonditionierte) Richardson-Verfahren ? Wie können Sie die klassischen Iterationsverfahren als vorkonditionierte Richardson-Verfahren interpretieren ? Was wissen Sie über die Konvergenz des Richardson-Verfahrens ?

17. Erklären Sie das Gradientenverfahren und das konjungierte Gradientenverfahren ! Was verstehen Sie unter einer Vorkonditionierung ?

18. Diskretisieren Sie das parabolische Anfangsrandwertproblem: Gesucht ist $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q = (a,b) \times (0,T) \tag{8}$$

unter den Randbedingungen

$$u(a,t) = u_a(t) \text{ und } u(b,t) = u_b(t) \quad \forall t \in (0,T) \tag{9}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in [a,b], \tag{10}$$

mit dem expliziten Differenzenschema (2. Differenzenquotient im Ort und expliziter Euler in der Zeit) aus Pkt. 1.2.1 bzw. Pkt. 4.1 der Vorlesung und analysieren Sie den Diskertisierungsfehler (Approximation, Stabilität, diskrete Konvergenz) !

19. Diskretisieren Sie das parabolische Anfangsrandwertproblem (8)–(10) mit dem impliziten Differenzenschema (2. Differenzenquotient im Ort und impliziter Euler in der Zeit) aus Pkt. 4.2 der Vorlesung und analysieren Sie den Diskertisierungsfehler (Approximation, Stabilität, diskrete Konvergenz) !

20. Wie würden Sie zeitabhängige Probleme, d.h. Anfangsrandwertaufgaben für parabolische und hyperbolische partielle Differentialgleichungen diskretisieren, wenn Sie zur Ortsdiskretisierung die FEM verwenden wollen ?

21. Diskretisieren Sie das hyperbolische Anfangsrandwertproblem: Gesucht ist *u(x,t):*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T) \tag{11}$$

unter den Randbedingungen

$$u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \tag{12}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ und } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{13}$$

zuerst im Raum (Ort) mit der FEM und dann in der Zeit mit dem Newmark-Verfahren !

22. Klassifizieren Sie die Optimierungsprobleme und erläutern Sie die theoretischen Grundlagen zu den freien Optimierungsproblemen !

23. Erklären Sie Abstiegsverfahren, Newton-Verfahren und Quasi-Newtonverfahren zur Lösung freier Optimierungsprobleme der Form: Gesucht ist $x^* \in R^n$:

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x) \; ! \tag{14}$$

24. Was wissen Sie über die Konvergenz und die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme der Form: Gesucht ist $x^* \in R^n$: $F(x^*) = 0$ in R^n ?

25. Klassifizieren Sie die Optimierungsprobleme und erläutern Sie die theoretischen Grundlagen zu den restringierten Optimierungsproblemen !

26. Wie würden Sie ein restringierten Optimierungsproblem der Form

$$\min_{x \in R^n} f(x) \tag{15}$$

$$\text{s.t. } c_i(x) = 0, \; i = 1, 2, ..., m \tag{16}$$

mit Nebenbedingungen in Gleichungsform lösen ?

27. Wir betrachten das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem

$$\min_{\substack{y \in H_0^1(\Omega) \text{ und } u \in L_2(\Omega), \\ \text{s.t. } \int_\Omega \lambda \nabla y(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx, \; \forall v \in H_0^1(\Omega)}} \int_\Omega |y(x) - y_d(x)|^2 \, dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega (u(x))^2 \, dx \tag{17}$$

mit dem beschränkten Rechengebiet $\Omega \subset R^2$, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$, dem gegebenen Temperaturprofil $y_d \in L_2(\Omega)$ und dem positiven Regularisierungsparameter (= Parameter zur Bewertung der Kosten der Steuerung) α. Die Zustandsgleichung ist nichts anders als die Variationformulierung des Wärmeleitproblems

$$\begin{aligned} -\text{div}(\lambda \nabla y(x)) &= u(x), \; x \in \Omega, \\ y(x) &= 0, \; x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit der gegebenen (positiven) Wärmeleitzahl λ. Diskretisieren Sie das unendlichdimensionale Optimalsteuerproblem (17) mit linearen finiten Elementen und geben Sie das endlichdimensionale (diskretisierte), restringierte Optimierungsproblem an ! Schreiben Sie die Lagrange-Funktion und das KKT - System (= hier ein lineares Gleichungssystem !) auf !

28. Wie würden Sie ein allgemeines restringierten Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen in Gleichungs- und Ungleichungsform lösen ?