

Vorlesungsskript

zu

MATHEMATISCHE MODELLE IN DER  
TECHNIK

Wintersemester 2018/2019

Jörg Willems

*überarbeitet von*  
Clemens Hofreither

Institut für Numerische Mathematik  
Johannes Kepler Universität



## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Physikalische Grundlagen und Erhaltungssätze	1
1.1. Gegenstand der Vorlesung	1
1.2. Physikalische Größen und ihre Einheiten	1
1.3. Flüsse und Dichten	2
1.4. Was ist ein mathematisches Modell?	3
1.5. Erhaltungssätze	3
1.6. Ein erstes Beispiel – Die barometrische Höhenformel	5
Kapitel 2. Wärmeleitung	9
2.1. Die instationäre Wärmeleitungsgleichung in 3D	9
2.2. Anfangs- und Randbedingungen der Wärmeleitungsgleichung in 3D	10
2.3. Der Fall springender Materialkoeffizienten	12
2.4. Energiebetrachtungen	14
2.5. Modellreduktion – die 1D-Wärmeleitungsgleichung	14
Kapitel 3. Elastizität	17
3.1. Kinematik und der Verzerrungstensor	17
3.2. Der Spannungstensor	19
3.3. Hyperelastische Materialien	22
3.4. Linear elastisches Material	24
3.5. Isotropes linear elastisches Material	26
3.6. Variationsformulierung und Anfangs- und Randbedingungen	27
3.7. Beispiel: lineare Elastostatik	28
3.8. Ebener Spannungs- und ebener Verzerrungszustand	30
Kapitel 4. Strömungsdynamik	33
4.1. Das Reynoldssche Transporttheorem	34
4.2. Erhaltungssätze in Eulerkoordinaten	34
4.3. Materialgesetze in der Strömungsdynamik	37
4.4. Die Eulerschen Gleichungen der Gasdynamik	38
4.5. Die Navier-Stokes Gleichungen für viskose Flüssigkeiten	39
4.6. Beispiele	44
Kapitel 5. Elektromagnetismus	47
5.1. Das elektrische Feld	47
5.2. Das magnetische Feld	53
5.3. Die Maxwell-Gleichungen	57
Anhang A. Rechenregeln	61
Literaturverzeichnis	63
Index	65



## KAPITEL 1

# Physikalische Grundlagen und Erhaltungssätze

### 1.1. Gegenstand der Vorlesung

Grundlegendes Ziel der Vorlesung ist die Herleitung einiger der wichtigsten mathematischen Modelle, die in Anwendungen in Physik und Technik vorkommen. Insbesondere werden wir als Problemstellungen Wärmeleitung, elastische Festkörper, Strömungsdynamik und Elektromagnetismus betrachten.

Die folgende Auflistung gibt einen groben Überblick über die Vorgehensweise, wie ein konkretes Problem zuerst mathematisch modelliert und schließlich am Computer simuliert wird. Die Vorlesung beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Übergang von (2) auf (3) mit einigen Ausblicken auf (4). Spätere Vorlesungen in der numerischen Mathematik beschäftigen sich eingehend mit den Punkten (4)–(6).

- (1) **Physikalisch-technisches Problem**
  - konkrete Anwendung in Industrie oder Technik
- (2) **Physikalisches Modell**
  - Erhaltungssätze
  - Materialgesetze
- (3) **Mathematisches Modell**
  - gewöhnliche Differentialgleichung
  - partielle Differentialgleichung
  - Variationsformulierung
- (4) **Mathematische Untersuchung des Modells**
  - Existenz und Eindeutigkeit der Lösung
  - Ermittlung weiterer Eigenschaften des Modells und der Lösung
- (5) **Numerische Methoden**
  - Diskretisierung (Finite-Differenzen-Methode, Finite-Elemente-Methode, Randelementmethode...)
  - numerische Untersuchungen (Konvergenz, Fehleranalyse...)
  - effiziente Auflösung (schnelle Löser, Parallelisierung...)
- (6) **Implementierung am Computer**
  - Wahl der Programmiersprache (C, C++, Fortran, Matlab, Python...)
  - Wahl der verwendeten Softwarepakete
  - Parallele Implementierung
- (7) **Computereperimente**
- (8) **Interpretation der Resultate**

### 1.2. Physikalische Größen und ihre Einheiten

In der Physik gibt es die in Tabelle 1 aufgeführten sieben Basisgrößen mit ihren SI-Einheiten (*Système international d'unités*). Um eine Größe mit ihrer Einheit in Bezug zu setzen, schreiben wir  $[\text{Größe}] = \text{Einheit}$ , also z.B.  $[r] = m$ . Mithilfe dieser

physikalischen Basisgrößen können alle weiteren physikalischen Größen sowie deren dazugehörigen Einheiten definiert werden.

TABELLE 1. Physikalische Basisgrößen und Einheiten

Größe	SI-Einheit
Länge ( $r$ )	Meter (m)
Zeit ( $t$ )	Sekunde (s)
Masse ( $m$ )	Kilogramm (kg)
Stoffmenge ( $n$ )	Mol (mol)
Temperatur ( $T$ )	Kelvin (K)
Stromstärke ( $I$ )	Ampère (A)
Lichtstärke ( $I_V$ )	Candela (cd)

Tabelle 2 zeigt einige der wichtigsten abgeleiteten Größen, die wir in dieser Vorlesung verwenden werden. Die Unterscheidung zwischen Basis- und abgeleiteten Größen ist nicht zwingend physikalisch gegeben, sondern vom SI festgesetzt. In früheren Systemen war beispielsweise das Gewicht (also eine Kraft) statt der Masse als Basisgröße enthalten.

TABELLE 2. Abgeleitete physikalische Größen und Einheiten

Größe	SI-Einheit
Geschwindigkeit ( $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{T}$ )	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Impuls ( $\vec{p} = m \vec{v}$ )	$\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$
Kraft ( $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ )	Newton ( $\text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ )
Arbeit, Energie, Wärmemenge ( $W, E = \vec{F} \cdot \vec{r}$ )	Joule ( $\text{J} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = \text{N m}$ )
Drehimpuls ( $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ )	$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$
Drehmoment ( $\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$ )	N m
Druck (Kraft per Fläche)	Pascal ( $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ )

### 1.3. Flüsse und Dichten

Wir werden häufig Flüsse von Größen durch Oberflächen betrachten. Ein **Fluss** bezogen auf eine Größe beschreibt, wie viel von dieser Größe pro Zeit durch eine Fläche fließt. Wir bezeichnen Flüsse mit  $\vec{q}_\square$ , wobei das Symbol der betrachteten Größe als Subskript verwendet wird. Für die Einheit eines Flusses gilt  $[\vec{q}_\square] = \frac{[\square]}{\text{m}^2 \text{s}}$ . Beispielsweise gibt der Energie-/Wärmemengenfluss  $\vec{q}_E$  an, wieviel Energie ein Körper per Oberflächen- und Zeiteinheit verliert oder aufnimmt und hat die Einheit  $[\vec{q}_E] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}}$ . Analog beschreibt der Massenfluss  $\vec{q}_m$  einen Verlust oder Zugewinn an Masse durch eine Oberfläche und hat die Einheit  $[\vec{q}_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ .

Weiters benötigen wir das Konzept von **Dichten**  $\rho_\square$ , die angeben, wie viel von einer bestimmten Größe pro Volumen, Fläche oder Masse vorliegt. Genauer gesagt sind beispielsweise die (volumenbezogene) Massen- und Impulsdichte definiert als

$$\rho_m(\vec{x}) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(B_r(\vec{x}))}{|B_r(\vec{x})|} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\rho}_p(\vec{x}) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\vec{p}(B_r(\vec{x}))}{|B_r(\vec{x})|}$$

wobei  $B_r(\vec{x})$  die Kugel mit Radius  $r$  um den Punkt  $\vec{x}$ ,  $|B_r(\vec{x})|$  das Kugelvolumen und  $m(B_r(\vec{x}))$  bzw.  $\vec{p}(B_r(\vec{x}))$  die Gesamtmasse bzw. der Gesamtimpuls in dieser Kugel ist. Generall gilt für eine volumenbezogene Dichte  $[\rho_{\square}] = \frac{[\square]}{\text{m}^3}$ .

Wir beobachten, dass

$$\frac{m(B_r(\vec{x}))}{|B_r(\vec{x})|} \min_{\vec{\xi} \in B_r(\vec{x})} \vec{v}_i(\vec{\xi}) \leq \frac{p_i(B_r(\vec{x}))}{|B_r(\vec{x})|} \leq \frac{m(B_r(\vec{x}))}{|B_r(\vec{x})|} \max_{\vec{\xi} \in B_r(\vec{x})} \vec{v}_i(\vec{\xi}), \quad \forall i = 1, \dots, 3.$$

Unter der Annahme, dass  $\vec{v}$  stetig in  $\vec{x}$  ist, folgt nun mit  $r \rightarrow 0^+$  die Gleichung

$$\vec{\rho}_p(\vec{x}) = \rho_m(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}).$$

Somit gilt für ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\vec{p}(\Omega) = \int_{\Omega} \vec{\rho}_p(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} \rho_m(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}) d\vec{x},$$

unter der Voraussetzung, dass  $\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig ist.

#### 1.4. Was ist ein mathematisches Modell?

Ein mathematisches Modell setzt die untersuchten physikalischen Größen in Form von Gleichungen miteinander in Bezug. Ziel ist es, diese Gleichungen zu lösen, um die Größe(n) von Interesse ausschließlich in Abhängigkeit von den freien Variablen (für gewöhnlich Zeit- und Ortsvariablen, das heißt  $t$  und  $\vec{x}$ ) zu erhalten. Um die zu lösenden Gleichungen aufzustellen, geht man meist von (allgemein gültigen) **Erhaltungssätzen** aus.

Da diese für gewöhnlich zu Gleichungssystemen mit mehr Unbekannten als Gleichungen führen, benötigt man des Weiteren **Materialgesetze**. Dabei handelt es sich um weitere Gleichungen, die die physikalischen Eigenschaften eines konkreten Materials beschreiben und es uns so erlauben, weitere Unbekannte miteinander in Bezug zu setzen. Auf diese Weise erhält man im Idealfall schließlich eine Gleichung oder ein Gleichungssystem, das (unter bestimmten Anfangs- und Randbedingungen) eine eindeutige Lösung hat.

In den meisten Fällen in dieser Vorlesung gehen wir also nach dem folgenden Schema vor:

$$\text{“Erhaltungssätze + Materialgesetze} \Rightarrow \text{Modell”}.$$

Wir beschränken uns meist auf das Herleiten eines bestimmten Modells und überlassen Betrachtungen zur eindeutigen Lösbarkeit späteren Vorlesungen.

#### 1.5. Erhaltungssätze

Im folgenden sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein glattes beschränktes Gebiet.  $\partial\Omega$  bezeichne den Rand von  $\Omega$  und  $\vec{n}$  den äußeren Normalenvektor. Bevor wir nun die grundlegenden Erhaltungssätze einführen, beweisen wir das folgende Lemma, das wir im Verlauf der Vorlesung häufig verwenden werden.

LEMMA 1.1. *Sei  $\vec{x}_0 \in \Omega$  und sei  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $\vec{x}_0$ . Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B_r(\vec{x}_0)|} \int_{B_r(\vec{x}_0)} \phi(\vec{x}) d\vec{x} = \phi(\vec{x}_0).$$

BEWEIS. Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Da  $\phi$  stetig in  $\vec{x}_0$  ist, gilt für hinreichend kleine  $r > 0$ , dass

$$|\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}_0)| < \epsilon \text{ für alle } \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0).$$

Damit gilt

$$\phi(\vec{x}_0) - \epsilon < \frac{1}{|B_r(\vec{x}_0)|} \int_{B_r(\vec{x}_0)} \phi(\vec{x}) d\vec{x} < \phi(\vec{x}_0) + \epsilon,$$

woraus die Behauptung folgt, da  $\epsilon$  beliebig gewählt war.  $\square$

Wir betrachten im Folgenden vier wichtige Erhaltungssätze.

**1.5.1. Massenerhaltung.** Der Massenerhaltungssatz (MES) besagt, dass die Änderung der Masse in  $\Omega$  im Zeitintervall  $(t_1, t_2)$  durch die im selben Zeitintervall in  $\Omega$  hinzugefügte (Quelle) bzw. weggenommene (Senke) Masse und dem gesamten Massenfluss durch  $\partial\Omega$  gegeben ist, d.h.

$$\int_{\Omega} \rho_m(\vec{x}, t_2) d\vec{x} - \int_{\Omega} \rho_m(\vec{x}, t_1) d\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} f_m(\vec{x}, t) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} \vec{q}_m(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) \right] dt,$$

wobei  $f_m(\vec{x}, t)$  die Quelledichte mit  $[f_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}}$  ist. Somit gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\rho_m(\vec{x}, t_2) - \rho_m(\vec{x}, t_1)}{t_2 - t_1} d\vec{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} f_m(\vec{x}, t) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} \vec{q}_m(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) \right] dt.$$

Unter der Annahme, dass  $\rho_m$  stetig differenzierbar in  $t$  ist und  $f_m$  und  $\vec{q}_m$  stetig in  $t$  sind, folgt unter Verwendung von Lemma 1.1 mit  $t_2 \rightarrow t_1$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{\Omega} f_m(\vec{x}, t) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} \vec{q}_m(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}),$$

wobei wir aus Gründen der besseren Notation  $t_1$  durch  $t$  ersetzt haben. Mit dem Satz von Gauss folgt unter der Annahme, dass  $\vec{q}_m$  in der Variablen  $\vec{x}$  stetig differenzierbar ist,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{\Omega} (f_m(\vec{x}, t) - \nabla \cdot \vec{q}_m(\vec{x}, t)) d\vec{x}.$$

Da  $\Omega$  beliebig gewählt war, folgt mit Lemma 1.1

$$(MES) \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{q}_m(\vec{x}, t) = f_m(\vec{x}, t).$$

(MES) ist der Massenerhaltungssatz in seiner differenziellen Form. Im Fall  $f_m \equiv 0$  wird (MES) auch Kontinuitätsgleichung genannt.

**1.5.2. Energieerhaltung.** Analog zum (MES) besagt der Energieerhaltungssatz (EES), dass die Änderung der Energie/Wärmemenge in  $\Omega$  im Zeitintervall  $(t_1, t_2)$  durch die im selben Zeitintervall in  $\Omega$  hinzugefügte (Quelle) bzw. weggenommene (Senke) Energie und den gesamten Energiefluss durch  $\partial\Omega$  gegeben ist, also

$$\int_{\Omega} \rho_E(\vec{x}, t_2) d\vec{x} - \int_{\Omega} \rho_E(\vec{x}, t_1) d\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} f_E(\vec{x}, t) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} \vec{q}_E(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) \right] dt.$$

Wir verfahren völlig analog zur Herleitung des (MES) und erhalten den (EES) in seiner differenziellen Form

$$(EES) \quad \frac{\partial \rho_E}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{q}_E(\vec{x}, t) = f_E(\vec{x}, t).$$

**1.5.3. Impulserhaltung.** Der Impulserhaltungssatz (2. Newtonsches Axiom) besagt, dass die Änderung des Gesamtimpulses in  $\Omega$  im Zeitintervall  $(t_1, t_2)$  gleich der gesamten auf  $\Omega$  im selben Zeitintervall wirkenden Kraft ist. Wir unterscheiden hierbei Volumenkräfte mit einer Dichte  $\vec{\rho}_{F_v} = \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t)$  und  $[\vec{\rho}_{F_v}] = \frac{N}{m^3}$  sowie Oberflächenkräfte mit einer Dichte  $\vec{\rho}_{F_s} = \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t)$  und  $[\vec{\rho}_{F_s}] = \frac{N}{m^2}$ . Die Volumenkräfte wirken in ganz  $\Omega$ , während die Oberflächenkräfte nur an  $\partial\Omega$  angreifen. Ein Beispiel für eine Volumenkraft ist die Schwerkraft, und Beispiele für Oberflächenkräfte sind eine mechanische Belastung durch eine Last oder der Luftdruck. Es ist wichtig zu beachten, dass die Oberflächenkräfte neben der Zeit  $t$  und dem Raumpunkt  $\vec{x}$  auch von der Flächennormale  $\vec{n}$  im Punkt  $\vec{x}$  abhängen.

Insgesamt lautet der Impulserhaltungssatz in integraler Form (IES)

$$\int_{\Omega} [(\rho_m \vec{v})(\vec{x}, t_2) - (\rho_m \vec{v})(\vec{x}, t_1)] d\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) dS(\vec{x}) \right] dt.$$

Wir werden (IES) in den Kapiteln 3 und 4 weiter analysieren und schließlich eine differenzielle Formulierung finden.

**1.5.4. Drehimpulserhaltung.** Der Drehimpulserhaltungssatz besagt, dass die Änderung des Gesamtdrehimpulses in  $\Omega$  im Zeitintervall  $(t_1, t_2)$  gleich dem gesamten auf  $\Omega$  im selben Zeitintervall wirkenden Drehmoments ist. In integraler Form lautet er

$$\begin{aligned} \text{(DES)} \quad & \int_{\Omega} [\vec{x} \times (\rho_m \vec{v})(\vec{x}, t_2) - \vec{x} \times (\rho_m \vec{v})(\vec{x}, t_1)] d\vec{x} \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} \vec{x} \times \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \vec{x} \times \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) dS(\vec{x}) \right] dt. \end{aligned}$$

Wie den (IES) werden wir auch den (DES) in späteren Kapiteln genauer untersuchen.

## 1.6. Ein erstes Beispiel – Die barometrische Höhenformel

Gesucht ist eine Formel, die den Luftdruck  $p$  ( $[p] = \text{Pa} = \frac{N}{m^2}$ ) in Abhängigkeit von der Höhe  $x_3$  angibt. Da der Luftdruck ursächlich mit der Anziehungskraft der Erde zusammenhängt, ist es naheliegend, bei der Herleitung des Modells vom (IES) auszugehen. Die grundlegende Modellannahme ist, dass alle Größen in dieser Situation nur von der Höhe  $x_3$  abhängen und somit weder vom Ort  $(x_1, x_2)$  noch, da wir einen statischen Zustand ohne zeitliche Änderungen voraussetzen, von der Zeit  $t$ .

Sei  $\Omega$  ein Zylinder der Höhe  $h$  mit einer Kreisfläche  $A$ , dessen Basis sich in Höhe  $x_3 = z$  befindet. Wegen des statischen Zustandes vereinfacht sich der (IES) zu

$$0 = \int_{\Omega} \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}) dS(\vec{x}).$$

D.h. alle Kräfte sind im Gleichgewicht – sie heben sich gegenseitig auf. Die Kräfte, die auf  $\Omega$  wirken, sind Oberflächenkräfte an der oberen und unteren Kreisfläche, die durch den dort herrschenden Druck verursacht werden; am Mantel des Zylinders sind sie null. Außerdem wirkt die Gravitation als Volumenkraft in  $\Omega$  in negativer  $x_3$ -Richtung mit der Erdbeschleunigung  $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ , also

$$\vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}) = -\rho_m(\vec{x})g\vec{e}_3.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$0 = -\rho_m(z + \theta h)|A|hg\vec{e}_3 + (p(z) - p(z + h))|A|\vec{e}_3,$$

wobei  $\rho_m = \rho_m(x_3)$  die Massendichte der Luft ist. Hier ist  $\theta \in [0, 1]$  nach dem Mittelwertsatz geeignet gewählt. Dividieren durch  $|A|h$  und  $h \rightarrow 0$  liefert

$$(1.1) \quad \rho_m(x_3)g = -\frac{\partial p}{\partial x_3}(x_3),$$

wobei wir statt  $z$  wieder allgemein  $x_3$  schreiben, da der Zylinder beliebig gewählt war. Wir haben nun eine skalare Gleichung mit zwei Unbekannten ( $\rho_m$  und  $p$ ) und somit ein unterbestimmtes Modell. An dieser Stelle bedienen wir uns des folgenden **Materialgesetzes**, das für ideale Gase (und somit näherungsweise für die Luft in der Atmosphäre) gilt:

$$\frac{p(x_3)}{\rho_m(x_3)} = \text{const.} = \frac{p_0}{\rho_{m,0}} = \frac{101\,325 \text{ Pa}}{1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}},$$

wobei  $p_0$  und  $\rho_{m,0}$  der Druck bzw. die Dichte auf Meereshöhe sind. Für ideale Gase stehen also der Druck und die Dichte in linearem Zusammenhang. Damit erhalten wir schließlich

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}(x_3) = -g \frac{\rho_{m,0}}{p_0} p(x_3), \quad p(0) = p_0.$$

Dies ist eine sehr einfache gewöhnliche Differentialgleichung, die genau eine Lösung besitzt, die zugleich die Anfangsbedingung erfüllt. Für diesen sehr einfachen Fall können wir diese Lösung analytisch berechnen. Da dies im Allgemeinen für komplexere Modelle nicht möglich ist, bedient man sich in solchen Fällen numerischer Verfahren, um die Lösung zu approximieren.

Oft ist es hilfreich, alle im Modell auftretenden Größen so zu skalieren, dass die vorkommenden Zahlen alle in etwa die Größenordnung 1 besitzen. Man spricht hierbei von **Entdimensionalisierung**. Wir betrachten also die skalierten (dimensionslosen) Größen  $\tilde{p}(\tilde{x}_3) := \frac{p(x_3)}{p_0}$  und  $\tilde{x}_3 := \frac{x_3}{\alpha}$ , wobei  $\alpha$  eine noch zu bestimmende Länge ist. Damit erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3}(\tilde{x}_3) = \frac{1}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_3} = \frac{\alpha}{p_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\alpha \frac{g\rho_{m,0}}{p_0} \tilde{p}(\tilde{x}_3).$$

Wir wählen nun

$$\alpha := \frac{p_0}{g\rho_{m,0}} = 8607,3 \frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 8607,3 \frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}} = 8607,3 \text{ m}$$

und erhalten somit das skalierte dimensionslose Anfangswertproblem

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3}(\tilde{x}_3) = -\tilde{p}(\tilde{x}_3), \quad \tilde{p}(0) = 1,$$

dessen Lösung durch  $\tilde{p}(\tilde{x}_3) = \exp(-\tilde{x}_3)$  gegeben ist.

**BEMERKUNG 1.2.** Die barometrische Höhenformel für eine inkompressible Flüssigkeit (z.B. näherungsweise Wasser) hat eine völlig andere Gestalt. Dies liegt an der Gültigkeit eines anderen Materialgesetzes. Für den Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit gilt  $\rho_m(x_3) = \text{const.} = \rho_0$ . Einsetzen in (1.1) ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -g\rho_0, \quad p(0) = p_0.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch  $p(x_3) = p_0 - g\rho_0 x_3$ . Da Wasser bekanntlich eine Dichte von etwa  $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  besitzt, ergibt sich in Wasser ein Druckunterschied von etwa  $10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 10^4 \text{ Pa}$  per Meter, oder etwa 1 bar per 10 m (da  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ).



## KAPITEL 2

### Wärmeleitung

Wir betrachten nun einen Körper, dessen Ausdehnung durch das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  gegeben ist, und der durch innere Wärmequellen ( $f_E(\vec{x}, t)$ ) bzw. -senken erhitzt bzw. gekühlt wird. Außerdem wird der Körper über seinen Rand gekühlt bzw. erhitzt. Gesucht ist nun  $T(\vec{x}, t)$ , also die Temperatur des Körpers am Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$ .

#### 2.1. Die instationäre Wärmeleitungsgleichung in 3D

Bei der Herleitung des Modells gehen wir vom (EES) aus. Aus Kapitel 1 wissen wir, dass dieser gegeben ist durch

$$(EES) \quad \frac{\partial \rho_E}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{q}_E(\vec{x}, t) = f_E(\vec{x}, t).$$

Dies ist **eine (skalare) Gleichung** mit **vier Unbekannten** ( $\rho_E$  und  $\vec{q}_E$ ). Um die Anzahl der Unbekannten auf eine (und zwar die Temperatur  $T(\vec{x}, t)$ ) zu reduzieren, benötigen wir die folgenden **Materialgesetze**.

- Der Wärmefluss  $\vec{q}_E$  hängt linear vom Temperaturgradienten  $\nabla T$  ab, also

$$(2.1) \quad \vec{q}_E(\vec{x}, t) = -\vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla T(\vec{x}, t),$$

wobei  $\vec{\Lambda}(\vec{x})$  mit  $[\vec{\Lambda}] = \frac{\text{J}}{\text{mKs}}$  ein symmetrisch positiv definiten Tensor zweiter Stufe (eine Matrix) ist – der **Wärmeleitungstensor**. Gleichung (2.1) bezeichnet man auch als **Fouriersches Wärmeleitgesetz**. Für den Fall eines isotropen Mediums, d.h. die Leitfähigkeit ist unabhängig von der räumlichen Richtung, gilt  $\vec{\Lambda}(\vec{x}) = \lambda(\vec{x}) \vec{I}$ , wobei  $\vec{I}$  die Einheitsmatrix und  $\lambda(\vec{x})$  die (skalare) Wärmeleitfähigkeit ist.

- Die Wärmemengen-/Energiedichte ist gegeben durch

$$\rho_E(\vec{x}, t) = c \rho_m(\vec{x}) T(\vec{x}, t),$$

wobei  $c$  die spezifische Wärmekapazität mit  $[c] = \frac{\text{J}}{\text{Kkg}}$  ist, und die Massendichte  $\rho_m$  als zeitlich konstant angenommen wird. Hierbei ist  $c$  eine Stoffkonstante, die angibt, wieviel Energie einem Stoff zugeführt werden muss, um 1 kg desselben um 1 Grad Kelvin zu erwärmen.

Durch Einsetzen dieser beiden Materialgesetze in (EES) erhalten wir

$$(2.2) \quad c \rho_m(\vec{x}) \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{x}, t) - \nabla \cdot \left( \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla T(\vec{x}, t) \right) = f_E(\vec{x}, t).$$

Dies ist die instationäre Wärmeleitungsgleichung.

Für den Fall eines isotropen ( $\vec{\Lambda}(\vec{x}) = \vec{I} \lambda(\vec{x})$ ) und homogenen ( $\rho_m(\vec{x}) \equiv \rho_m$  und  $\lambda(\vec{x}) \equiv \lambda$ ) Materials vereinfacht sich (2.2) zu

$$c \rho_m \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{x}, t) - \lambda \Delta T(\vec{x}, t) = f_E(\vec{x}, t)$$

mit dem Laplace-Operator  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

## 2.2. Anfangs- und Randbedingungen der Wärmeleitungsgleichung in 3D

Wir betrachten nun zunächst den stationären Fall, in dem sich (2.2) zu

$$(2.3) \quad -\nabla \cdot \left( \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla T(\vec{x}) \right) = f_E(\vec{x}), \quad \text{in } \Omega$$

vereinfacht. Damit (2.3) eine eindeutige Lösung hat, benötigen wir nun noch geeignete **Randbedingungen**. Aufgrund von physikalischen Überlegungen ist es beispielsweise naheliegend, dass durch die Fixierung der Temperatur am Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$ , d.h.  $T(\vec{x}) = T_0(\vec{x})$  für alle  $\vec{x} \in \partial\Omega$  mit bekanntem  $T_0$ , eine eindeutige Lösung von (2.3) bestimmt ist. Um diese Intuition mathematisch rigoros zu fassen, leiten wir die zu (2.3) gehörige schwache Formulierung/Variationsformulierung her.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass wir die homogene Randbedingung  $T \equiv 0$  auf  $\delta\Omega$  haben. Dann suchen wir die Lösung unseres Problems im Teilraum

$$H_0^1(\Omega) := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$$

des Hilbertraums  $H^1(\Omega)$  (zur Erinnerung: dieser Raum enthält alle quadratisch integrierbaren Funktionen, deren erste schwache Ableitungen ebenfalls quadratisch integrierbar sind). Die Randwerte sind im Sinne des Spursatzes zu verstehen.

Wir multiplizieren nun (2.3) mit einer sogenannten Testfunktion  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , die beliebig gewählt ist. Integration über  $\Omega$  und anschließende partielle Integration ergeben dann

$$(2.4) \quad \int_{\Omega} (\nabla \varphi(\vec{x}))^T \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla T(\vec{x}) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} \varphi(\vec{x}) \left( \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla T(\vec{x}) \right) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \int_{\Omega} f_E(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Da per Definition  $\varphi$  am Rand 0 ist, verschwindet das Randintegral und wir erhalten

$$\int_{\Omega} (\nabla \varphi(\vec{x}))^T \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla T(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega} f_E(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Da  $\vec{\Lambda}$  symmetrisch positiv definit ist, definiert

$$a(\varphi, \psi) := \int_{\Omega} (\nabla \varphi(\vec{x}))^T \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla \psi(\vec{x}) d\vec{x}$$

eine symmetrische positiv definite Bilinearform auf  $H_0^1(\Omega)$ , was man mittels der Poincaré-Ungleichung beweist. Nach dem Satz von Lax-Milgram hat darum folgendes Problem eine eindeutige Lösung:

$$(2.5) \quad \text{Finde } T \in H_0^1(\Omega), \text{ sodass } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ gilt: } a(T, \varphi) = \int_{\Omega} f_E(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Die Bedingung

$$T = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

bezeichnet man als (homogene) **Dirichlet-Randbedingung**, **Randbedingung erster Art** oder **wesentliche (essentielle) Randbedingung**. Physikalisch bedeutet sie, dass am Rand eine bekannte Temperatur vorliegt (im homogenen Fall 0). Die essentielle Randbedingung wird durch die Wahl des Ansatzraumes (hier:  $H_0^1(\Omega)$ ) berücksichtigt. Das heißt, wir suchen die Lösung zu (2.5) nur in der Teilmenge von  $H^1(\Omega)$ , deren Elemente die essentielle Randbedingung erfüllen. Die Gleichung selbst enthält die Randbedingung nicht mehr.

Die Bedingung

$$(\vec{\Lambda} \nabla T) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

bezeichnet man als (homogene) **Neumann-Randbedingung**, **Randbedingung zweiter Art** oder **natürliche Randbedingung**. Physikalisch ist sie so zu interpretieren, dass über den Rand ein bekannter Wärmefluss  $\vec{q}_E \cdot \vec{n}$  auftritt; im homogenen Fall ist der Wärmefluss 0, was heißt, dass der Körper am Rand perfekt isoliert ist. Im Gegensatz zur essentiellen Randbedingung ist die natürliche Randbedingung nicht durch die Wahl des Ansatzraumes erfüllt, sondern wird implizit in der Variationsformulierung (2.5) berücksichtigt. Wir suchen hier die Lösung nun im ganzen Raum  $H^1(\Omega)$ , da wir die Randwerte noch nicht kennen.

**BEMERKUNG 2.1.** Im Fall der Neumann-Randbedingung auf  $\partial\Omega$  ist  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $H^1(\Omega)$  nur noch symmetrisch positiv semidefinit. Die Lösung von (2.5) ist dann nur noch bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Um eine **eindeutige** Lösung zu fixieren, führt man die zusätzliche Bedingung ein, dass  $\int_{\Omega} T \, d\vec{x} = 0$  ist. Man wählt also den Ansatzraum  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ . Zur **Existenz** einer Lösung benötigt man in diesem Fall außerdem die Kompatibilitätsbedingung  $\int_{\Omega} f_E \, d\vec{x} = 0$ .

Neben der Dirichlet- und Neumann-Randbedingung gibt es noch die **Robin-Randbedingung** oder **Randbedingung dritter Art**. Diese ist gegeben durch

$$(\vec{\Lambda} \nabla T) \cdot \vec{n} = \alpha(g - T) \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei  $g$  eine gegebene Funktion auf dem Rand ist (Umgebungstemperatur), und  $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $[\alpha] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{Ks}}$  die sogenannte **Wärmeübergangszahl** ist. Im Allgemeinen kann  $\alpha = \alpha(\vec{x})$  eine Funktion sein. Die physikalische Interpretation dieser Randbedingung ist, dass der Energiefluss am Rand, d.h.  $\vec{q}_E = -\vec{\Lambda} \nabla T$ , proportional (mit Proportionalitätskonstante  $\alpha$ ) zur Temperaturdifferenz zwischen Rand und Umgebung ist. Man sieht leicht, dass für  $\alpha = 0$  die Robin-Randbedingung zur homogenen Neumann-Randbedingung wird (perfekte Isolation). Für  $\alpha \rightarrow \infty$  wird die Robin-Randbedingung hingegen zur Dirichlet-Randbedingung (perfekte ‘‘Kopplung’’ zwischen Rand und Umgebung).

Es gibt auch kompliziertere Randbedingungen, wie etwa nichtlineare Strahlungsrandbedingungen, auf die wir hier nicht eingehen.

Wichtig ist auch der Fall **gemischter Randbedingungen**. Sei dazu der Rand etwa aufgeteilt in zwei disjunkte, nichtleere Mengen  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ . Gemischte Randbedingungen bedeuten nun, dass auf  $\Gamma_D$  Dirichlet-Randbedingungen vorliegen, während auf  $\Gamma_N$  Neumann-Randbedingungen vorliegen.

Der Fall von inhomogener Randbedingung lässt sich leicht auf den homogenen Fall reduzieren. Dazu betrachten wir das Problem mit gemischten Randbedingungen

$$(2.6) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot \left( \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla T(\vec{x}) \right) = f_E(\vec{x}), & \text{in } \Omega \\ T = g, & \text{auf } \Gamma_D \\ (\vec{\Lambda} \nabla T) \cdot \vec{n} = h, & \text{auf } \Gamma_N. \end{cases}$$

Sei nun  $T_g \in H^1(\Omega)$  eine beliebige Funktion mit  $T_g|_{\Gamma_D} \equiv g$ . Es folgt nun, dass  $\tilde{T} := T - T_g$  das folgende Randwertproblem löst.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot \left( \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla \tilde{T}(\vec{x}) \right) = \overbrace{f_E(\vec{x}) + \nabla \cdot (\vec{\Lambda} \nabla T_g)}{=: \tilde{f}_E}, & \text{in } \Omega \\ \tilde{T} = 0, & \text{auf } \Gamma_D \\ (\vec{\Lambda} \nabla \tilde{T}) \cdot \vec{n} = \underbrace{h - (\vec{\Lambda} \nabla T_g) \cdot \vec{n}}_{=: \tilde{h}}, & \text{auf } \Gamma_N. \end{array} \right.$$

Die neue Unbekannte  $\tilde{T}$  erfüllt also nun auf  $\Gamma_D$  die homogene Dirichlet-Randbedingung, weshalb dieser Schritt **Homogenisierung** genannt wird. Da  $\tilde{T} \equiv 0$  auf  $\Gamma_D$ , ist der korrekte Ansatzraum nun

$$H_D^1(\Omega) := \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_{\Gamma_D} \equiv 0\}.$$

Multiplikation mit einer beliebigen Testfunktion  $\varphi \in H_D^1(\Omega)$ , partielle Integration und Einsetzen der Neumann-Randbedingung liefern die folgende Variationsformulierung:

Finde  $\tilde{T} \in H_D^1(\Omega)$ , sodass für alle  $\varphi \in H_D^1(\Omega)$  gilt:

$$a(\tilde{T}, \varphi) = \int_{\Omega} \tilde{f}_E(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\Gamma_N} \varphi \tilde{h} dS(\vec{x}).$$

Die Lösung von (2.6) erhält man dann als  $T := \tilde{T} + T_g$ .

Im instationären Fall benötigen wir neben Randbedingungen eine **Anfangswertbedingung**, damit die zeitabhängige Wärmeleitungsgleichung eindeutig lösbar ist. Unter Beschränkung auf Dirichlet-Randbedingungen lautet das zu lösende System dann

$$\left\{ \begin{array}{ll} c \rho_m(\vec{x}) \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{x}, t) - \nabla \cdot \left( \vec{\Lambda}(\vec{x}) \nabla T(\vec{x}, t) \right) = f_E(\vec{x}, t) & \text{in } \Omega \times (t_0, t_1), \\ T(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) & \text{auf } \partial\Omega \times (t_0, t_1), \\ T(\vec{x}, t_0) = T_0(\vec{x}) & \text{in } \Omega, \end{array} \right.$$

wobei  $T_0$  und  $g$  gegebene Funktionen sind, die die folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllen müssen:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} g(\vec{x}, t) = T_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega.$$

### 2.3. Der Fall springender Materialkoeffizienten

Wir betrachten nun den Fall eines unstetigen Wärmeleitungstensors  $\vec{\Lambda}$  und einer unstetigen Quellendichte  $f_E$ . Ein Beispiel hierfür ist ein Stab, dessen eine Hälfte aus Kupfer und dessen andere Hälfte aus Stahl besteht, und der Quellterm in jedem der beiden Teile durch eine (unterschiedliche) Konstante gegeben ist. Sei also  $\Omega$  das gesamte Gebiet mit Teilgebieten  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ , sodass  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  und  $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega}$ . Dann sei

$$\vec{\Lambda}(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{\Lambda}_1, & \vec{x} \in \Omega_1 \\ \vec{\Lambda}_2, & \vec{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_E(\vec{x}) = \begin{cases} f_E^{(1)}, & \vec{x} \in \Omega_1 \\ f_E^{(2)}, & \vec{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

Zunächst stellen wir fest, dass die schwache Formulierung (2.5) auch dann “Sinn macht”, wenn die Einträge von  $\vec{\Lambda}$  Funktionen in  $L^\infty(\Omega)$  sind und  $f_E \in L^2(\Omega)$ . (Die Bedingung an  $f_E$  kann sogar zu  $f_E \in H^{-1}(\Omega)$  abgeschwächt werden.) Insbesondere besitzt (2.5) auch für diesen Fall eine eindeutige Lösung. Diese rein mathematische Überlegung ist aber noch kein stichfestes Argument dafür, dass in diesem Fall (2.5) auch tatsächlich das physikalisch korrekte Modell darstellt; wir erinnern uns, dass wir bei der Herleitung von (EES) die stetige Differenzierbarkeit von  $\vec{q}_E$  vorausgesetzt haben! Wir betrachten diesen Fall deshalb gesondert.

In jedem Teilgebiet  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$  ist der Energiefluss  $\vec{q}_E$  weiterhin stetig differenzierbar, und somit gilt dort die Wärmeleitungsgleichung in ihrer starken Formulierung (2.3). An der Grenzschicht  $\Gamma_{12} := \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$  sind aber die Ableitungen von  $\vec{\Lambda}$  nicht definiert. Hier benötigen wir die Übergangsbedingungen

$$T_1(\vec{x}) = T_2(\vec{x}) \quad \text{und} \quad (\vec{\Lambda}_1(\vec{x}) \nabla T_1(\vec{x})) \cdot \vec{n}_{12} = (\vec{\Lambda}_2(\vec{x}) \nabla T_2(\vec{x})) \cdot \vec{n}_{12} \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_{12},$$

wobei die Indizes einseitige Grenzwerte anzeigen und  $\vec{n}_{12}$  den Normaleneinheitsvektor auf  $\Gamma_{12}$  von  $\Omega_1$  nach  $\Omega_2$  bezeichnet. Die physikalische Interpretation dieser Übergangsbedingungen ist, dass sowohl die Temperatur als auch der Energiefluss an der Grenzschicht stetig sind.

Die starke Formulierung der stationären Wärmeleitungsgleichung in  $\Omega$  hat dann die Form

$$(2.7) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\vec{\Lambda}_i \nabla T_i(\vec{x})) = f_E^{(i)} & \text{in } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \\ T_1(\vec{x}) = T_2(\vec{x}) & \text{auf } \Gamma_{12}, \\ (\vec{\Lambda}_1(\vec{x}) \nabla T_1(\vec{x})) \cdot \vec{n}_{12} = (\vec{\Lambda}_2(\vec{x}) \nabla T_2(\vec{x})) \cdot \vec{n}_{12} & \text{auf } \Gamma_{12}, \\ T = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei wir homogene Dirichletrandbedingungen angenommen haben. Wir leiten nun noch die schwache Formulierung zu (2.7) her. Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung in (2.7) mit einer Testfunktion  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Integration über  $\Omega_i$  liefert dann

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} -\nabla \cdot (\vec{\Lambda}_i \nabla T(\vec{x})) \varphi \, d\vec{x} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f_E^{(i)} \varphi \, d\vec{x}.$$

Partielle Integration und Berücksichtigung der Randwerte ergibt

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (\nabla \varphi)^T \vec{\Lambda}_i \nabla T \, d\vec{x} - \int_{\Gamma_{12}} \left( \varphi (\vec{\Lambda}_1 \nabla T_1) \cdot \vec{n}_{12} - \varphi (\vec{\Lambda}_2 \nabla T_2) \cdot \vec{n}_{12} \right) dS(\vec{x}) = \int_{\Omega} f_E \varphi \, d\vec{x}.$$

Aufgrund der Übergangsbedingung verschwindet das Integral über die Grenzschicht, und wir erhalten somit

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\nabla \varphi)^T \vec{\Lambda} \nabla T \, d\vec{x}}_{=a(T,\varphi)} = \int_{\Omega} f_E \varphi \, d\vec{x}.$$

Somit erhalten wir exakt dieselbe schwache Formulierung wie zuvor in (2.5). Dies zeigt, dass die schwache Formulierung (2.5) tatsächlich auch im Fall von springenden Koeffizienten gültig bleibt.

**BEMERKUNG 2.2.** Bei der obigen Herleitung haben wir nur die Stetigkeit der Energieflüsse an der Grenzschicht verwendet. Die Stetigkeit der Temperatur wird, ähnlich wie die Dirichletbedingung am Rand, durch die Wahl des Ansatzraumes  $H_0^1(\Omega)$  garantiert.

## 2.4. Energiebetrachtungen

Wir zeigen nun, dass die Lösung von (2.5) auch als Lösung eines Minimierungsproblems gesehen werden kann. Eine derartige Beziehung lässt sich unter sehr abstrakten Annahmen nachweisen, wie der folgende Satz zeigt.

**SATZ 2.3.** Sei  $\mathcal{V}$  ein Vektorraum und  $a(\cdot, \cdot)$  eine auf  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  gegebene, symmetrische positiv definite Bilinearform. Sei  $F \in \mathcal{V}'$  ein lineares Funktional und sei

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - F(v)$$

für  $v \in \mathcal{V}$ . Dann gilt:

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{V}} J(v) \iff \forall v \in \mathcal{V} : a(u, v) = F(v)$$

**BEWEIS.** “ $\Rightarrow$ ”:

Da  $u$  das Minimierungsproblems löst, gilt für beliebiges  $v \in \mathcal{V}$ :

$$\left. \frac{dJ(u + tv)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Somit gilt

$$0 = \frac{1}{2} (a(v, u) + a(u, v) + 2ta(v, v))|_{t=0} - F(v).$$

Unter Verwendung der Symmetrie von  $a(\cdot, \cdot)$  folgt nun unmittelbar die Aussage, da  $v$  beliebig gewählt war.

“ $\Leftarrow$ ”:

Für  $v \in \mathcal{V}$  beliebig haben wir aufgrund der Symmetrie von  $a(\cdot, \cdot)$  und da  $u$  das Variationsproblem löst

$$J(u + v) = \underbrace{\frac{1}{2}a(u, u) - F(u)}_{=J(u)} + \frac{1}{2}a(v, v) + \underbrace{a(u, v) - F(v)}_{=0} = J(u) + \frac{1}{2}a(v, v).$$

Da  $a(v, v) \geq 0$  und  $a(v, v) = 0 \Leftrightarrow v \equiv 0$ , ist  $u$  die eindeutige Lösung des Minimierungsproblems.  $\square$

## 2.5. Modellreduktion – die 1D-Wärmeleitungsgleichung

Falls  $\Omega$  ein Gebiet ist, dessen Ausdehnung in einer oder zwei Koordinatenrichtungen sehr klein ist, lässt sich die 3D-Wärmeleitungsgleichung auf zwei oder eine Dimension reduzieren und somit drastisch vereinfachen. Wir betrachten hier nur den Fall der 1D-Wärmeleitungsgleichung.

Sei

$$\Omega = (0, L) \times \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$$

mit  $R \ll L$  ein langer, dünner Zylinder entlang der  $x_1$ -Achse mit Radius  $R$  und Länge  $L$ . Aufgrund der geringen Ausdehnung in  $x_2$ - und  $x_3$ -Richtung ist es plausibel anzunehmen, dass die Temperatur und die Quellendichte (nahezu) nur von  $x_1$

abhängen. Wir nehmen also an, dass

$$T(\vec{x}) = T(x_1) \quad \text{und} \quad f_E(\vec{x}) = f_E(x_1)$$

gilt. Die Leitfähigkeit sei als skalare Funktion  $\lambda = \lambda(x_1)$  gegeben, und das Fouriersche Wärmeleitgesetz (2.1) vereinfacht sich somit zu

$$\vec{q}_E(x_1) = (-\lambda(x_1)T'(x_1), 0, 0)^T.$$

An den Stirnflächen nehmen wir Dirichlet- und an der Mantelfläche Robin-Randbedingungen an:

$$T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L, \quad \text{und} \quad \vec{q}_E(x_1) \cdot \vec{n} = \alpha(T(x_1) - g(x_1)),$$

wobei  $T_0$ ,  $T_L$  und die Umgebungstemperatur  $g(\cdot)$  gegeben sind.

Wir betrachten nur den stationären Fall. Der (EES) in integraler Form lautet dann

$$\int_{\partial\omega} \vec{q}_E \cdot \vec{n} \, dS(\vec{x}) = \int_{\omega} f_E \, d\vec{x},$$

wobei

$$\omega = (\tilde{x}, \tilde{x} + h) \times \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 + x_3^2 < R^2\} \subset \Omega$$

eine kleine Zylinderscheibe der Länge  $h$  ist. Unter Verwendung der Robin-Randbedingungen und des Fourierschen Wärmeleitgesetzes erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \pi R^2 (\lambda(\tilde{x})T'(\tilde{x}) - \lambda(\tilde{x} + h)T'(\tilde{x} + h)) + 2\pi R \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+h} \alpha(T(x_1) - g(x_1)) \, dx_1 \\ = \pi R^2 \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+h} f_E(x_1) \, dx_1. \end{aligned}$$

Division durch  $h\pi R^2$  und  $h \rightarrow 0$  ergeben unter Verwendung von Lemma 1.1

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} (\lambda T')(\tilde{x}) + \frac{2\alpha}{R} (T(\tilde{x}) - g(\tilde{x})) = f_E(\tilde{x}).$$

Da  $\tilde{x} \in (0, L)$  beliebig gewählt war, erhalten wir mit  $\hat{\alpha} := \frac{2\alpha}{R}$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_1} (\lambda T')(x_1) + \hat{\alpha} T(x_1) = f_E(x_1) + \hat{\alpha} g(x_1), & x_1 \in (0, L) \\ T(0) = T_0, & T(L) = T_L, \end{cases}$$

wobei wir aus Gründen der besseren Notation  $\tilde{x}$  durch  $x_1$  ersetzt haben. Dies ist die stationäre eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (in starker Formulierung).



## KAPITEL 3

### Elastizität

In diesem Kapitel betrachten wir die Verformung elastischer Körper unter der Einwirkung von Oberflächen- und Volumenkräften. Der Begriff “elastisch” bezeichnet hier eine Klasse von Körpern, die nach Wegnahme der Krafteinwirkung wieder in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehren. Im Gegensatz dazu stehen plastische Körper, bei denen die Verformung bei Wegfall der Kräfte zumindest teilweise bestehen bleibt; diese sind aber bedeutend schwieriger zu modellieren und werden in dieser Vorlesung nicht betrachtet.

Wie schon in vorigen Kapiteln verwenden wir ein *Kontinuumsmodell*, das heißt, alle relevanten Größen werden als in jedem Punkt des Körpers definiert angenommen; der Aufbau der Materie aus Atomen, Molekülen etc. wird dabei vernachlässigt.

Gesucht ist schließlich ein Modell, das die Verschiebung  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  eines beliebigen Punktes  $\vec{x}$  in der (ursprünglichen) Referenzkonfiguration  $\Omega$  zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt.

#### 3.1. Kinematik und der Verzerrungstensor

Wir betrachten zunächst nur die Verformung eines beliebigen Körpers, ohne auf die zugrundeliegenden Kräfte einzugehen, was als *Kinematik* bezeichnet wird.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet, das die Referenzkonfiguration des zu betrachtenden Körpers zum Zeitpunkt  $t = 0$  beschreibt. Dies ist üblicherweise der Ruhezustand des betrachteten Objekts oder der Zustand ohne äußere Krafteinwirkung. Im Folgenden verwenden wir zur Beschreibung **Lagrangesche Koordinaten**, was bedeutet, dass sich alle Größen auf die Referenzkonfiguration  $\Omega$  beziehen und nicht auf den deformierten Zustand des Körpers; als Koordinaten dienen uns also Punkte  $\vec{x} \in \Omega$ . Den Ort, an dem sich dieser Massepunkt zum Zeitpunkt  $t$  befindet, drücken wir durch eine Abbildung  $\vec{\phi}(\vec{x}, t)$  aus. Klarerweise gilt  $\vec{\phi}(\vec{x}, 0) = \vec{x}$ . Für fixes  $\vec{x}$  beschreibt

$$\{\vec{\phi}(\vec{x}, t) : t \in (0, T)\}$$

die Raumkurve, die der Massepunkt  $\vec{x}$  im Zeitintervall  $(0, T)$  durchläuft. Es wird immer sinnvoll sein, die Abbildung  $\vec{\phi}$  als stetig differenzierbar in allen Variablen vorauszusetzen. Weiters nehmen wir an, dass für beliebiges, aber fixes  $t$  die Abbildung  $\vec{x} \rightarrow \vec{\phi}(\vec{x}, t)$  invertierbar ist. Dies bedeutet, dass wir jedem Raumpunkt im deformierten Körper eindeutig einen Punkt in der Referenzkonfiguration zuordnen können. Oft wird es bequemer sein, statt mit dem absoluten Ort  $\vec{\phi}$  mit der relativen **Verschiebung**

$$\vec{u}(\vec{x}, t) := \vec{\phi}(\vec{x}, t) - \vec{x}$$

zu arbeiten, die  $\vec{u}(\vec{x}, 0) = 0$  erfüllt.

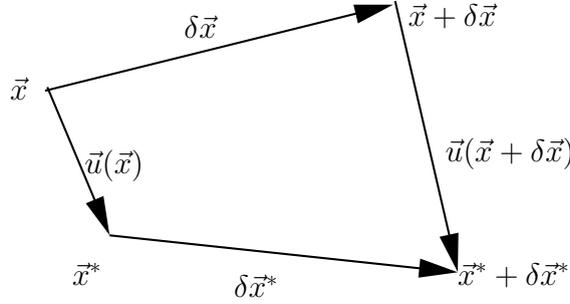


ABBILDUNG 1. Skizze zum Verzerrungstensor.

Wir betrachten nun zwei Punkte  $\vec{x} \in \Omega$  sowie  $\vec{x} + \delta\vec{x} \in \Omega$ , die sich nach Verformung an den neuen Orten

$$\vec{x}^* = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \vec{x}^* + \delta\vec{x}^* = \vec{x} + \delta\vec{x} + \vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x})$$

befinden; siehe Abb. 1. (Wir betrachten hier einen fixen Zeitpunkt  $t$  und lassen das Argument  $t$  weg.) Wir untersuchen nun die durch die Verschiebung verursachte Veränderung des Abstandes  $\delta\vec{x}$ , nämlich

$$\begin{aligned} \|\delta\vec{x}^*\|^2 - \|\delta\vec{x}\|^2 &= \|\vec{x} + \delta\vec{x} + \vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) - (\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}))\|^2 - \|\delta\vec{x}\|^2 \\ &= \|\vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) + \delta\vec{x} - \vec{u}(\vec{x})\|^2 - \|\delta\vec{x}\|^2 \\ &\approx \|\nabla\vec{u}(\vec{x})\delta\vec{x} + \delta\vec{x}\|^2 - \|\delta\vec{x}\|^2 \\ &= \left( (\vec{I} + \nabla\vec{u})\delta\vec{x}, (\vec{I} + \nabla\vec{u})\delta\vec{x} \right) - \|\delta\vec{x}\|^2 \\ &= \left( \delta\vec{x}, (\vec{I} + \nabla\vec{u}^T + \nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^T\nabla\vec{u})\delta\vec{x} \right) - \|\delta\vec{x}\|^2 \\ &= \left( \delta\vec{x}, (\nabla\vec{u}^T + \nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^T\nabla\vec{u})\delta\vec{x} \right). \end{aligned}$$

Die Änderung des Abstandes wird also durch  $\nabla\vec{u}^T + \nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^T\nabla\vec{u}$  beschrieben.  $\frac{1}{2}(\nabla\vec{u}^T + \nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^T\nabla\vec{u})$  bezeichnet man als **Greenschen Verzerrungstensor**.

Oftmals ist die Änderung der Verschiebung sehr viel kleiner als die entsprechende Änderung in  $\vec{x}$  (Bemerkung: für Rotationen um  $\vec{x}$  ist dies beispielsweise nicht erfüllt), also

$$\|\vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x})\| \ll \|\delta\vec{x}\|.$$

Da  $\vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x}) \approx \nabla\vec{u}\delta\vec{x}$ , folgt

$$\|\nabla\vec{u}\delta\vec{x}\| \ll \|\delta\vec{x}\| \quad \Rightarrow \quad \|\nabla\vec{u}\| \ll 1.$$

In diesen Fällen ist es somit gerechtfertigt, den Term  $\nabla\vec{u}^T\nabla\vec{u}$  im Greenschen Verzerrungstensor zu vernachlässigen. Dies führt auf den **linearisierten Verzerrungstensor**

$$\vec{\varepsilon}(\vec{u}) := \frac{1}{2}(\nabla\vec{u}^T + \nabla\vec{u}).$$

Das nächste Resultat charakterisiert den Kern von  $\vec{\varepsilon}(\cdot)$ .

PROPOSITION 3.1. Für ein Verschiebungsfeld  $\vec{u} \in (C^2(\Omega))^3$  gilt

$$\vec{\varepsilon}(\vec{u}) \equiv \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \in \text{RBM} := \{\vec{u}(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{b} : \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3\},$$

wobei  $\text{RBM} = \text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1 \times \vec{x}, \vec{e}_2 \times \vec{x}, \vec{e}_3 \times \vec{x}\}$  der Raum der (linearisierten) Starrkörperverschiebungen (engl.: rigid body modes) ist.

BEWEIS. “ $\Rightarrow$ ”: Sei  $\vec{\varepsilon}(\vec{u}) \equiv \vec{0}$ . Dann gilt für  $i, j, k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\varepsilon_{k,j}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\varepsilon_{j,i}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\varepsilon_{i,k}}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Da alle zweiten Ableitungen aller Komponenten von  $\vec{u}$  verschwinden, muss  $\vec{u}(\vec{x})$  affin linear sein, das heißt es existieren  $\vec{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ , sodass

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{A}\vec{x} + \vec{b}.$$

Nun gilt aber  $\vec{0} \equiv \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T = \vec{A} + \vec{A}^T$ . Das heißt,  $\vec{A}$  ist eine schiefsymmetrische Matrix und hat somit die Form

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit  $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$  folgt nun  $\vec{A}\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$  und somit die Behauptung.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $\vec{u} \in \text{RBM}$ . Mit derselben Matrix  $\vec{A}$  wie oben gilt  $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{A}\vec{x} + \vec{b}$  und somit  $\nabla \vec{u} = \vec{A}$ . Da  $\vec{A}$  schiefsymmetrisch ist, folgt  $\vec{\varepsilon}(\vec{u}) \equiv 0$ .  $\square$

### 3.2. Der Spannungstensor

Bei der Herleitung des mathematischen Modells gehen wir vom (IES) und (DES) aus. Die Geschwindigkeit eines Massepunktes  $\vec{x}$  ist gegeben durch die Zeitableitung der Verschiebung  $\vec{u}$ , also

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t).$$

Sei  $\omega \subset \Omega$  ein beliebiges Teilgebiet. Aus Kapitel 1 wissen wir, dass der (IES) bezüglich  $\omega$  durch

$$\int_{\omega} \rho_m(\vec{x}) \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t_2) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t_1) \right) d\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial\omega} \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) dS(\vec{x}) dt$$

gegeben ist. Hierbei ist  $\rho_m = \rho_m(\vec{x})$  die Massendichte der Referenzkonfiguration, die als konstant in der Zeit angenommen wird.

Wir zeigen nun zunächst, dass ein Tensor zweiter Stufe  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{x}, t)$  (genannt **Spannungstensor**) existiert, sodass für alle  $\vec{x} \in \Omega$  die Oberflächenkraftdichte (Spannung)  $\vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t)$  gegeben ist als

$$(3.1) \quad \vec{\rho}_{F_s} = \vec{\sigma} \vec{n},$$

dass also die Spannung linear vom Normalenvektor der Oberfläche abhängt.

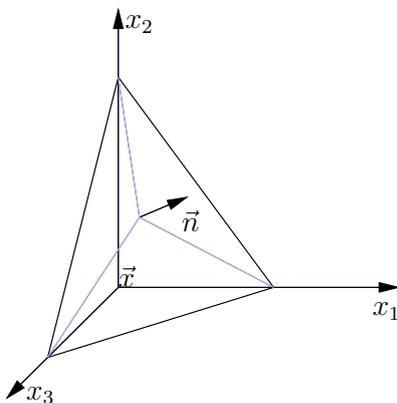


ABBILDUNG 2. Tetraeder  $\omega_\epsilon(\vec{x})$  mit Durchmesser  $\epsilon$ .

LEMMA 3.2 (Cauchy). Sei  $\sigma_{i,j}(\vec{x}, t) := \vec{e}_i^T \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{e}_j, t)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , wobei  $\vec{\rho}_{F_s}$  stetig differenzierbar in  $\vec{x}$  und stetig in  $t$  und  $\vec{n}$  ist. Ferner sei  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$  stetig differenzierbar in  $t$  und  $\vec{\rho}_{F_v}$  stetig in  $t$ . Dann gilt (3.1) für alle  $t$ ,  $\vec{x}$ , und  $\vec{n}$ .

BEWEIS. Sei  $\vec{x} \in \Omega$  und  $\vec{n}$  mit  $\|\vec{n}\| = 1$ . Wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $n_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Wir betrachten nun den Tetraeder  $\omega = \omega_\epsilon(\vec{x})$  mit Durchmesser  $\epsilon > 0$  wie in Abbildung 2. Dabei bezeichnen  $A$  und  $A_i$  die zu  $\vec{n}$  bzw.  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  orthogonalen Flächen von  $\partial\omega$ .

Aus dem (IES) erhalten wir mit  $\omega = \omega_\epsilon(\vec{x})$  nach Division durch  $t_2 - t_1$  und  $t_2 \rightarrow t_1$  mittels Lemma 1.1

$$(3.2) \quad \int_\omega \rho_m(\vec{\xi}) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{\xi}, t) d\vec{\xi} = \int_\omega \vec{\rho}_{F_v}(\vec{\xi}, t) d\vec{\xi} + \int_{\partial\omega} \vec{\rho}_{F_s}(\vec{\xi}, \vec{n}(\vec{\xi}), t) dS(\vec{\xi})$$

wobei wir aus Gründen der Notation  $t_1$  durch  $t$  ersetzt haben.

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt für geeignet gewählte Punkte  $\vec{\xi} \in \omega$ ,  $\vec{\xi}_0 \in A$ ,  $\vec{\xi}_i \in A_i$ , dass

$$|\omega| \left( \rho_m(\vec{\xi}) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{\xi}, t) - \vec{\rho}_{F_v}(\vec{\xi}, t) \right) = \sum_{i=1}^3 |A_i| \vec{\rho}_{F_s}(\vec{\xi}_i, -\vec{e}_i, t) + |A| \vec{\rho}_{F_s}(\vec{\xi}_0, \vec{n}, t).$$

Es ist eine einfache Übung nachzuweisen, dass  $|A_i| = n_i |A|$  gilt. Wir dividieren nun durch  $|A|$  und lassen  $\epsilon \rightarrow 0$ . Da dann  $\frac{|\omega|}{|A|} \rightarrow 0$ , folgt insgesamt

$$\sum_{i=1}^3 n_i \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, -\vec{e}_i, t) + \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) = 0.$$

Da  $\vec{\rho}_{F_s}$  stetig in  $\vec{n}$  ist, folgt mit  $\vec{n} \rightarrow \vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dass

$$\vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, -\vec{e}_i, t) = -\vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{e}_i, t).$$

Somit erhalten wir

$$\vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) = \sum_{i=1}^3 \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{e}_i, t) n_i = \vec{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}$$

mit der Wahl

$$\vec{\sigma}(\vec{x}, t) = [\vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{e}_1, t), \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{e}_2, t), \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{e}_3, t)]. \quad \square$$

Einsetzen von (3.1) in (3.2) mit allgemeinem  $\omega$  liefert

$$\int_{\omega} \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{\omega} \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial\omega} \vec{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n} dS(\vec{x}).$$

Unter Verwendung des Satzes von Gauss und der Beliebigkeit von  $\omega$  erhalten wir

$$(IES) \quad \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) - \nabla \cdot \vec{\sigma}(\vec{x}, t) = \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t),$$

den **Impulserhaltungssatz in differenzieller Form in Lagrangeschen Koordinaten**.

Im Folgenden zeigen wir nun noch, dass der (DES) die Symmetrie des Spannungstensors impliziert.

**LEMMA 3.3.** *Sei  $\vec{\rho}_{F_s}$  stetig differenzierbar in  $\vec{x}$  und stetig in  $t$  und  $\vec{n}$ . Ferner sei  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$  stetig differenzierbar in  $t$  und  $\vec{\rho}_{F_v}$  stetig in  $t$ . Dann ist der Spannungstensor  $\vec{\sigma}$  aus Lemma 3.2 symmetrisch, also  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^T$ .*

**BEWEIS.** Unter Verwendung von Lemma 3.2 hat der (DES) für ein beliebiges Gebiet  $\omega \subset \Omega$  die Gestalt

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \rho_m(\vec{x}) \vec{x} \times \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t_2) - \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t_1) \right) d\vec{x} \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\omega} \vec{x} \times \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial\omega} \vec{x} \times (\vec{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}) dS(\vec{x}) \right] dt. \end{aligned}$$

Lemma 1.1 liefert nach Division durch  $t_2 - t_1$  und  $t_2 \rightarrow t_1$

$$\int_{\omega} \rho_m(\vec{x}) \vec{x} \times \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{\omega} \vec{x} \times \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial\omega} \vec{x} \times (\vec{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n}) dS(\vec{x}),$$

wobei wir wieder zur besseren Notation  $t_1$  durch  $t$  ersetzt haben. Multiplikation mit einem beliebigen Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  und Verwendung der Identität  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  liefern dann

$$(3.3) \quad \vec{a} \cdot \int_{\omega} \rho_m(\vec{x}) \vec{x} \times \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) d\vec{x} = \vec{a} \cdot \int_{\omega} \vec{x} \times \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial\omega} (\vec{a} \times \vec{x})^T \vec{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n} dS(\vec{x}).$$

Für den zweiten Summand der rechten Seite in (3.3) erhalten wir mittels des Satzes von Gauss

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} (\vec{a} \times \vec{x})^T \vec{\sigma}(\vec{x}, t) \vec{n} dS(\vec{x}) \\ = \int_{\omega} \nabla \cdot \left( (\vec{a} \times \vec{x})^T \vec{\sigma}(\vec{x}, t) \right) d\vec{x} \\ = \int_{\omega} \nabla(\vec{a} \times \vec{x}) : \vec{\sigma} + (\vec{a} \times \vec{x}) \cdot (\nabla \cdot \vec{\sigma}) d\vec{x} \\ = \int_{\omega} \nabla(\vec{a} \times \vec{x}) : \vec{\sigma} + (\vec{a} \times \vec{x}) \cdot \left( \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) - \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t) \right) d\vec{x} \\ = \int_{\omega} \nabla(\vec{a} \times \vec{x}) : \vec{\sigma} + \vec{a} \cdot (\vec{x} \times (\rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) - \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t))) d\vec{x}, \end{aligned}$$

wobei wir hier den (IES) und die obige Identität verwendet haben. Außerdem verwenden wir hier das Frobenius-Produkt (doppelte Kontraktion), das für zwei beliebige

Matrizen  $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  durch  $\vec{A} : \vec{B} = \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} B_{i,j}$  definiert ist. Damit erhalten wir zusammen mit (3.3)

$$\int_{\omega} \nabla(\vec{a} \times \vec{x}) : \vec{\sigma} d\vec{x} = 0.$$

Da  $\omega \subset \Omega$  beliebig gewählt war und

$$\nabla(\vec{a} \times \vec{x}) = \nabla \begin{bmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{schiefssymmetrische Matrix}),$$

gilt

$$a_1(\sigma_{3,2} - \sigma_{2,3}) + a_2(\sigma_{1,3} - \sigma_{3,1}) + a_3(\sigma_{2,1} - \sigma_{1,2}) = 0.$$

Da  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.  $\square$

Zur Interpretation des Spannungstensors betrachten wir einen Würfel  $\omega$  um einen Punkt  $\vec{x} \in \Omega$ , der klein genug ist, dass  $\vec{\sigma}$  dort als konstant gelten kann. Wir betrachten nun die ‘‘rechte’’ Seitenfläche des Würfels, also in positiver  $x_1$ -Richtung. Dann ist die Spannung (Oberflächenkraftdichte) an dieser Oberfläche konstant gegeben durch  $\vec{\sigma} \vec{e}_1$ , also die erste Spalte des Spannungstensors. Dabei ist der Diagonaleintrag  $\sigma_{11}$  die **Normalspannung**, die orthogonal auf die Fläche wirkt, und die Einträge  $\sigma_{21}, \sigma_{31}$  die **Scherspannung**, die parallel zur Fläche wirkt.

Aufgrund der Symmetrie von  $\vec{\sigma}$  ist der (IES) ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 9 Unbekannten. Im Folgenden werden wir verschiedene Klassen von Materialien kennenlernen. Die für diese Klassen geltenden Materialgesetze liefern jeweils eine Darstellung von  $\vec{\sigma}$  in Form von  $\vec{u}$ . Wir betrachten die folgenden drei Klassen von Materialien

hyperelastisch  $\supset$  linear elastisch  $\supset$  isotrop linear elastisch,

wobei die Relation ‘‘ $\supset$ ’’ jeweils eine Unterklasse angibt.

### 3.3. Hyperelastische Materialien

**DEFINITION 3.4.** Ein Material heißt **hyperelastisch**, wenn es eine Energiedichtefunktion  $\rho_{E,V} = \rho_{E,V}(\vec{x}, \vec{A}) : \Omega \times \{\vec{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \vec{B} + \vec{I} \in M_+^3\} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass die Verformungsenergie durch  $\int_{\Omega} \rho_{E,V}(\vec{x}, \nabla \vec{u}) d\vec{x}$  gegeben ist, wobei  $M_+^3 := \{\vec{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det(\vec{B}) > 0\}$ . (Beispiel: verschiedene Elastomere.)

**BEMERKUNG 3.5.** Aufgrund der Definition können zwei hinreichend nahe Punkte der Referenzkonfiguration nicht auf denselben Punkt verschoben werden (**lokale** Invertierbarkeit von  $\vec{x} + \vec{u}(\vec{x})$  – garantiert durch  $\det(\nabla(\vec{x} + \vec{u})) = \det(\vec{I} + \nabla \vec{u}) \neq 0$ ). Außerdem kann es lokal keine Spiegelungen geben (garantiert durch  $\det(\nabla(\vec{x} + \vec{u})) > 0$ ).

Wir betrachten nun, was diese Definition für den Spannungstensor bedeutet und nehmen dafür Energiebetrachtungen vor. Die gesamte in einem elastischen Körper gespeicherte Energie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie, deren Dichte gegeben ist durch

$$\rho_{E,K}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \rho_m(\vec{x}) |\partial_t \vec{u}(\vec{x}, t)|^2,$$

sowie der durch Verformung im Körper gespeicherten **elastischen Energie**, die wir zunächst einfach mit  $e(\vec{x}, t)$  bezeichnen.

Eine Änderung der Energie ergibt sich einerseits durch die durch Volumenkräfte geleistete Arbeit. Arbeit ist definiert als das Produkt aus Weg und Kraft entlang des Weges. Wenn der Massepunkt  $\vec{x}$  die Raumkurve  $\gamma$  durchläuft, ist die Arbeit demnach

$$W = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} dt,$$

wobei  $\vec{x}(t) : (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung der Kurve  $\gamma$  ist. In unserem Fall ist die Parametrisierung der Kurve gegeben durch  $\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t)$ , und die Kraft  $\vec{F}$  ist in Lagrange-Koordinaten gegeben durch  $\vec{\rho}_{F_v}$ . Wir erhalten also

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt.$$

Analog ist die Arbeit, die an einem  $x \in \partial\omega$  am Rand durch Spannkraften geleistet wird,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\sigma} \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt.$$

Insgesamt ergibt sich (nach der schon oft verwendeten Division durch  $t_2 - t_1$  und  $t_2 \rightarrow t_1$ ) die Energieerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \left( \frac{1}{2} \rho_m |\partial_t \vec{u}|^2 + e \right) d\vec{x} = \int_{\omega} \vec{\rho}_{F_v} \cdot \partial_t \vec{u} d\vec{x} + \int_{\partial\omega} \vec{\sigma} \vec{n} \cdot \partial_t \vec{u} dS(\vec{x}).$$

Da  $\vec{\sigma} \vec{n} \cdot \partial_t \vec{u} = \vec{\sigma}^T \partial_t \vec{u} \cdot \vec{n}$  und  $\vec{\sigma}$  symmetrisch ist, folgt mit dem Satz von Gauß und der Beliebigkeit von  $\omega$  die Relation

$$\rho_m \partial_t \vec{u} \cdot \partial_t^2 \vec{u} + \partial_t e - \vec{\rho}_{F_v} \cdot \partial_t \vec{u} - \nabla \cdot (\vec{\sigma} \partial_t \vec{u}) = 0.$$

Mit der Produktregel für die Divergenz (A.6) erhalten wir weiters

$$\rho_m \partial_t \vec{u} \cdot \partial_t^2 \vec{u} + \partial_t e - \vec{\rho}_{F_v} \cdot \partial_t \vec{u} - (\nabla \cdot \vec{\sigma}) \cdot \partial_t \vec{u} - \vec{\sigma} : \partial_t \nabla \vec{u} = 0.$$

Nach Einsetzen des differentiellen (IES) für  $\vec{\rho}_{F_v}$  erhalten wir

$$\partial_t e = \vec{\sigma} : \partial_t \nabla \vec{u}.$$

Diese Relation gilt für allgemeine Verschiebungen  $\vec{u}$  sowie eine allgemeine elastische Energie  $e$ . Wenn wir konkret für  $e$  die Energiedichte  $\rho_{E,V}$  für ein hyperelastisches Material einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial t}(\vec{x}, \nabla \vec{u}(\vec{x}, t)) = \vec{\sigma}(\vec{x}, t) : \nabla \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t).$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{i,j}}(\vec{x}, \nabla \vec{u}) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{i,j}(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\vec{x}, t).$$

Da  $\vec{u}$  eine beliebige Verschiebung ist, gilt (betrachte die Fälle  $\vec{u} = tx_j \vec{e}_i$  für  $i, j = 1, 2, 3$ )

$$\frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{i,j}}(\vec{x}, \nabla \vec{u}) = \sigma_{i,j}(\vec{x}, t) \quad \text{für alle } i, j = 1, 2, 3.$$

Wir haben somit die folgende Proposition bewiesen.

PROPOSITION 3.6. *In hyperelastischen Materialien folgt aus dem (EES) (unter Berücksichtigung der Verformungs- und kinetischen Energie, aber unter Vernachlässigung von z.B. thermischer Energie), dass das folgende Materialgesetz gilt:*

$$\sigma_{i,j} = \frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{i,j}}(\vec{x}, \nabla \vec{u}).$$

Obige Relation erlaubt uns, den Spannungstensor in Abhängigkeit von  $\vec{u}$  darzustellen (da  $\rho_{E,V}$  als bekannt vorausgesetzt wird) und somit die Anzahl der Unbekannten im differentiellen (IES) auf drei zu reduzieren.

Hyperelastische Materialien sind in gewissem Sinn die allgemeinsten elastischen Materialien und können im Allgemeinen nichtlinear sein. Im folgenden betrachten wir Spezialfälle, die linear und somit leichter handhabbar sind.

### 3.4. Linear elastisches Material

Linear elastische Materialien sind ein besonders wichtiger Spezialfall von hyperelastischen Materialien, bei denen der Spannungstensor linear von den partiellen Ableitungen von  $\vec{u}$  abhängt.

DEFINITION 3.7. Ein Material heißt **linear elastisch**, wenn die Energiedichtefunktion  $\rho_{E,V}(\vec{x}, \nabla \vec{u})$  gegeben ist als

$$\rho_{E,V}(\vec{x}, \nabla \vec{u}) = \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l=1}^3 D_{i,j,k,l} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

wobei  $\overset{\equiv}{D} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$  mit  $\overset{\equiv}{D}(\vec{x}) = [D_{i,j,k,l}(\vec{x})]_{i,j,k,l=1}^3$  ein Tensor vierter Stufe ist, genannt **Elastizitätstensor**, der für alle  $\vec{x} \in \Omega$  die Symmetrien

$$D_{i,j,k,l} = D_{j,i,k,l} = D_{k,l,i,j} (= D_{i,j,l,k}) \quad \forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$$

erfüllt. Außerdem ist  $\overset{\equiv}{D}$  auf der Menge der symmetrischen Matrizen koerziv, d.h., es existiert ein  $\alpha > 0$ , sodass für jede symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \setminus \{\vec{0}\}$  gilt

$$\overset{\equiv}{D}A : A := \sum_{i,j,k,l=1}^3 D_{i,j,k,l} A_{i,j} A_{k,l} \geq \alpha \|A\|^2.$$

Man beobachte, dass ein Tensor der Form von  $\overset{\equiv}{D}$  als lineare Abbildung von  $3 \times 3$ -Matrizen auf  $3 \times 3$ -Matrizen interpretiert werden kann, da wir für eine allgemeine Matrix  $A$  die neue Matrix

$$B := \overset{\equiv}{D}A \quad \text{mit} \quad B_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 D_{ijkl} A_{kl}$$

definieren können. Wegen der Symmetrien gilt weiters für allgemeine Matrizen  $A, B$ , dass

$$\overset{\equiv}{D}A : B = \overset{\equiv}{D}B : A.$$

BEMERKUNG 3.8. Mit obigen Notationen können wir kürzer schreiben

$$\rho_{E,V}(\vec{x}, \nabla \vec{u}) = \frac{1}{2} \overset{\equiv}{D} \vec{\varepsilon}(\vec{u}) : \vec{\varepsilon}(\vec{u}),$$

und da  $\vec{\varepsilon}(\vec{u})$  symmetrisch ist, folgt mit der Koerzivität von  $\overset{\equiv}{D}$ , dass  $\rho_{E,V}(\vec{x}, \nabla \vec{u}) \geq 0$ .

Nach dieser Definition und Proposition 3.6 wissen wir nun, dass die  $(m, n)$ -te Komponente des Spannungstensors gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n} &= \frac{\partial \rho_{E,V}}{\partial A_{m,n}}(\vec{x}, \nabla \vec{u}) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,l=1}^3 D_{i,j,k,l} \left[ (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{jm}\delta_{in}) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) (\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{lm}\delta_{kn}) \right] \\ (3.4) \quad &= \frac{1}{8} \sum_{k,l=1}^3 D_{m,n,k,l} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{8} \sum_{k,l=1}^3 D_{n,m,k,l} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} \sum_{i,j=1}^3 D_{i,j,m,n} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{8} \sum_{i,j=1}^3 D_{i,j,n,m} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 D_{i,j,m,n} \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{=\varepsilon_{i,j}(\vec{u})} \left( = \sum_{i,j=1}^3 D_{i,j,m,n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Anstelle der komponentenweisen Schreibweise in (3.4) schreiben wir kurz

$$(3.5) \quad \vec{\sigma} = \overset{\equiv}{D} \vec{\varepsilon},$$

wobei  $\vec{\varepsilon}(\vec{u}) = [\varepsilon_{i,j}(\vec{u})]_{i,j=1}^3$  der **linearisierte Verzerrungstensor** ist. Gleichung (3.5) bezeichnet man als das **Hookesche Gesetz**.

BEMERKUNG 3.9.  $\vec{\varepsilon}(\vec{u})$  ist (anders als  $\nabla \vec{u}$ ) symmetrisch und wird auch als **symmetrischer Gradient** von  $\vec{u}$  bezeichnet.

BEMERKUNG 3.10. Wir haben gewisse Symmetrierelationen für  $\overset{\equiv}{D}$  gefordert, tatsächlich sind diese jedoch keine Einschränkung. Der Grund dafür ist, dass sowohl  $\vec{\varepsilon}$  als auch  $\vec{\sigma}$  symmetrisch sind. Für einen beliebigen (nichtsynchronen) Tensor  $\overset{\equiv}{D}'$  lässt sich somit immer ein anderer Tensor  $\overset{\equiv}{D}$  finden, sodass

$$\overset{\equiv}{D}' \vec{\varepsilon} = \overset{\equiv}{D} \vec{\varepsilon} \quad \text{für alle symmetrischen } \vec{\varepsilon}$$

und dass  $\overset{\equiv}{D}$  die obigen Symmetrierelationen erfüllt.

Wir zählen nun noch die Freiheitsgrade. Da wegen Symmetrie  $\vec{\varepsilon}$  und  $\vec{\sigma}$  nur je 6 Freiheitsgrade besitzen, können wir  $\overset{\equiv}{D}$  als lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  auffassen.

Wegen Symmetrie von  $\overset{\rceil}{D}$  selbst ist aber nur das obere Dreieck dieser  $6 \times 6$ -Matrix frei wählbar, und somit hat  $\overset{\rceil}{D}$  21 unabhängige Einträge.

### 3.5. Isotropes linear elastisches Material

DEFINITION 3.11. Ein Material heißt **isotrop** in  $\vec{x} \in \Omega$ , falls die Eigenschaften des Materials im Punkt  $\vec{x}$  nicht von der Richtung abhängen. Ein Material heißt **isotrop**, falls es in jedem Punkt isotrop ist – andernfalls heißt es **anisotrop**.

DEFINITION 3.12. Ein Material heißt **homogen**, falls es in jedem Punkt  $\vec{x} \in \Omega$  dieselben Eigenschaften hat – andernfalls heißt es **inhomogen**.

Wir betrachten nun **isotrope** (nicht notwendigerweise homogene) **linear elastische Materialien**. Für diesen Spezialfall lässt sich der Elastizitätstensor drastisch vereinfachen.

Wir beobachten zunächst, dass  $\overset{\rceil}{D}\vec{\varepsilon}$  eine symmetrische Matrix, nämlich  $\vec{\sigma}$ , ist.

Somit definiert  $\overset{\rceil}{D}$  eine Abbildung von der Menge der symmetrischen Matrizen auf sich selbst. Ferner folgt in **isotropen** Medien, dass die Reihenfolge von Anwendung des Elastizitätstensors und die Wahl des Koordinatensystems (unter Drehungen) egal ist, d.h.

$$\overset{\rceil}{D}(\vec{Q}\vec{\varepsilon}\vec{Q}^T) = \vec{Q}(\overset{\rceil}{D}\vec{\varepsilon})\vec{Q}^T \quad \text{für alle } \vec{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ mit } \vec{Q}^T\vec{Q} = \vec{I} \text{ und } \det \vec{Q} > 0.$$

Der Satz von Rivlin-Ericksen (siehe [EGK11, Satz 5.13]) besagt, dass eine Abbildung genau dann diese Relation erfüllt, wenn gilt

$$\overset{\rceil}{D}\vec{\varepsilon} = a_0(\vec{i}(\vec{\varepsilon}))\vec{I} + a_1(\vec{i}(\vec{\varepsilon}))\vec{\varepsilon} + a_2(\vec{i}(\vec{\varepsilon}))\vec{\varepsilon}^2,$$

wobei  $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  geeignete Funktionen auf dem Vektor  $\vec{i}(\vec{\varepsilon})$  der **Grundinvarianten** von  $\vec{\varepsilon}$  sind. Die Grundinvarianten von  $\vec{\varepsilon}$  sind die Koeffizienten im charakteristischen Polynom von  $\vec{\varepsilon}$ , d.h.

$$\det(\vec{\varepsilon} - \nu\vec{I}) = -\nu^3 + i_1(\vec{\varepsilon})\nu^2 - i_2(\vec{\varepsilon})\nu + i_3(\vec{\varepsilon}).$$

Falls die Eigenwerte von  $\vec{\varepsilon}$  durch  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  und  $\nu_3$  gegeben sind, haben die Grundinvarianten die explizite Form

$$\begin{aligned} i_1(\vec{\varepsilon}) &= \text{spur}(\vec{\varepsilon}) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \\ i_2(\vec{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}(\text{spur}(\vec{\varepsilon})^2 - \text{spur}(\vec{\varepsilon}^2)) = \nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3, \\ i_3(\vec{\varepsilon}) &= \det(\vec{\varepsilon}) = \nu_1\nu_2\nu_3. \end{aligned}$$

Da die durch  $\overset{\rceil}{D}$  definierte Abbildung außerdem (homogen) linear ist, muss gelten, dass  $a_2(\vec{i}(\vec{\varepsilon})) \equiv 0$ ,  $a_1(\vec{i}(\vec{\varepsilon})) \equiv 2\mu$  (= konst.) und  $a_0(\vec{i}(\vec{\varepsilon})) \equiv a_0(i_1(\vec{\varepsilon})) \equiv \lambda \text{spur}(\vec{\varepsilon})$ . Wir nennen die Konstanten  $\mu$  und  $\lambda$  ( $[\mu] = [\lambda] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ) **Lamé-Parameter**. Mit ihnen gilt nun die Darstellung

$$(3.6) \quad (\vec{\sigma} =) \overset{\rceil}{D}\vec{\varepsilon} = \lambda \text{spur}(\vec{\varepsilon})\vec{I} + 2\mu\vec{\varepsilon} = \lambda(\nabla \cdot \vec{u})\vec{I} + 2\mu\vec{\varepsilon}.$$

Allgemein ist  $\mu > 0$  und meist  $\lambda \geq 0$ . Man beachte, dass sie so gewählt sein müssen, dass die Koerzivität von  $\overset{\equiv}{D}$  gilt.

Anstelle der Lamé-Parameter  $\mu$  und  $\lambda$  werden in der Literatur häufig die Größen  $E$  (**Youngscher Elastizitätsmodul**) und  $\nu$  (**Poissonsche Querkontraktionszahl**) verwendet. Diese sind definiert als

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

und besitzen die Einheiten  $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  und  $[\nu] = 1$ . Der Youngsche Elastizitätsmodul und die Poissonsche Querkontraktionszahl erhalten ihre Bedeutung aus folgender Beziehung: Bezogen auf einen Zylinder gibt der Youngsche Elastizitätsmodul die Spannung an, die man an den Stirnflächen anbringen muss, um den Zylinder auf die doppelte Länge zu strecken. Die Poissonsche Querkontraktionszahl ist das negative Verhältnis von relativer Radiusänderung zu relativer Längenänderung (in Abschnitt 3.7 werden wir hierzu ein Beispiel betrachten). Diese beiden Parameter lassen sich somit direkt experimentell ermitteln. Sie lassen sich auch wieder in die Lamé-Parameter umrechnen mittels der Relationen

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

### 3.6. Variationsformulierung und Anfangs- und Randbedingungen

Einsetzen des Hookeschen Gesetzes (3.5) in (IES) liefert

$$(3.7) \quad \rho_m(\vec{x}) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(\vec{x}, t) - \nabla \cdot \left( \overset{\equiv}{D}(\vec{x}) \vec{\varepsilon}(\vec{u}(\vec{x}, t)) \right) = \vec{\rho}_{F_v}(\vec{x}, t).$$

Dies ist nun ein System mit drei Gleichungen und ebensovielen Unbekannten,  $\vec{u}$ . Für den isotropen Fall vereinfacht sich (3.7) zu

$$(3.8) \quad \rho_m \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left( \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \right) = \vec{\rho}_{F_v}.$$

Bei der Suche nach geeigneten Randwerten konzentrieren wir uns auf den stationären (d.h. keine Abhängigkeit von  $t$ ) isotropen Fall. Für den anisotropen stationären Fall gelten analoge Überlegungen. Ähnlich zu der Herangehensweise bei der Wärmeleitungsgleichung multiplizieren wir (3.8) mit einer hinreichend glatten Testfunktion  $\vec{v}$ . Integration über das Gebiet  $\Omega$  liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\rho}_{F_v} \cdot \vec{v} d\vec{x} &= \int_{\Omega} -\nabla \cdot \left( \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \right) \cdot \vec{v} d\vec{x} \\ &= \int_{\Omega} \left( \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \right) : \nabla \vec{v} d\vec{x} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \vec{v}^T \left( \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \right) \vec{n} dS(\vec{x}) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt partielle Integration verwendet haben. Das Randintegral fällt weg, wenn für fast alle  $\vec{x} \in \partial\Omega$  gilt

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \left( \lambda(\vec{x}) \nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}) \vec{I} + 2\mu(\vec{x}) \vec{\varepsilon}(\vec{u}(\vec{x})) \right) \vec{n}(\vec{x}) = \vec{\sigma}(\vec{x}) \vec{n}(\vec{x}) = 0.$$

Analog zur Wärmeleitungsgleichung ist ersteres die (homogene) **Dirichletrandbedingung** und letzteres die (homogene) **Neumannrandbedingung**. Dirichletrandbedingungen geben eine bestimmte Verschiebung auf einem Teil des Randes ( $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ ) vor. Neumannrandbedingungen geben die an einem Teil des Randes ( $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ ) wirkende Oberflächenspannung (Oberflächenkraftdichte) an. Wie bei der Wärmeleitungsgleichung nehmen wir an, dass  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$  und  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  gelten.

Für den Fall, dass das Randintegral verschwindet, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\rho}_{F_v} \cdot \vec{v} \, d\vec{x} &= \int_{\Omega} \left( \lambda(\nabla \cdot \vec{u}) \vec{I} + 2\mu \vec{\varepsilon}(\vec{u}) \right) : \nabla \vec{v} \, d\vec{x} \\ &= \int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \vec{u})(\nabla \cdot \vec{v}) + 2\mu \vec{\varepsilon}(\vec{u}) : \vec{\varepsilon}(\vec{v}) \, d\vec{x} =: a(\vec{u}, \vec{v}), \end{aligned}$$

da allgemein für  $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit  $A = A^T$  gilt:

$$\vec{A} : \vec{B} = \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} B_{i,j} = \sum_{i,j=1}^3 A_{i,j} B_{j,i} = A : B^T.$$

Wir wollen nun kurz erläutern, warum die oben genannten Randwerte sinnvoll sind, also die **Existenz** und **Eindeutigkeit** einer Lösung garantieren. Offensichtlich ist die Bilinearform

$$a(\cdot, \cdot) : (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^3 \times (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^3 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

symmetrisch und beschränkt (falls  $\mu$  und  $\lambda$  beschränkt sind). Um den Satz von Lax-Milgram anzuwenden, benötigen wir außerdem die Koerzivität von  $a(\cdot, \cdot)$ . Diese folgt aus der **Kornschen Ungleichung** (siehe z.B. [BS08, Kapitel 11]): Falls  $|\Gamma_D| > 0$ , dann existiert ein  $\alpha > 0$ , sodass für alle  $\vec{v} \in (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^3$  gilt

$$a(\vec{v}, \vec{v}) \geq 2\mu \|\varepsilon(\vec{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \underbrace{\geq}_{\text{Kornsche Ungl.}} 2\mu\alpha \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Falls  $|\Gamma_D| = 0$ , ist  $a(\cdot, \cdot)$  nur noch auf  $(H_{\Gamma_D}^1(\Omega)/\text{RBM})^3 = (H^1(\Omega)/\text{RBM})^3$  koerziv. (Wir erinnern uns, dass RBM gerade der Kern von  $\vec{\varepsilon}$  ist.) Im Fall von reinen Neumannrandbedingung kann eine Lösung also nur bis auf Starrkörperverschiebungen eindeutig bestimmt werden.

Im instationären Fall benötigt man neben den Randwerten die Anfangswertbedingungen  $\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x})$  und  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_1(\vec{x})$ .

### 3.7. Beispiel: lineare Elastostatik

Im homogenen Fall sind  $\lambda$  und  $\mu$  konstant. Wenn wir auch den stationären Fall annehmen, vereinfacht sich (3.8) zu

$$(3.9) \quad -(\lambda + \nu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \Delta \vec{u} = \vec{\rho}_{F_v},$$

beziehungsweise in den Parametern  $E$  und  $\nu$  ausgedrückt,

$$-\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} = \vec{\rho}_{F_v}.$$

Wir betrachten einen Zylinder

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < L, x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}$$

ohne Volumenkräfte (ignorieren also insbesondere die Schwerkraft). Wir betrachten die Randbedingungen

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(\vec{u})(-e_1) &= -e_1 \quad \text{für } x_1 = 0, & \vec{\sigma}(\vec{u})(e_1) &= e_1 \quad \text{für } x_1 = L, \\ \vec{\sigma}(\vec{u})\vec{n} &= 0 \quad \text{für } \sqrt{x_2^2 + x_3^2} = R.\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Zylinder an der linken und rechten Seite mit einer Einheitskraft gezogen wird, während am Mantel keine Kraft wirkt. Wir verwenden als Ansatz für die Verschiebung die lineare Streckung

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \\ a_2 x_3 \end{pmatrix}$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten  $a_1, a_2$ . Wir sehen leicht, dass  $\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \equiv 0$  und  $\Delta \vec{u} \equiv 0$  und somit die Differentialgleichung (3.9) erfüllt ist.

Der Spannungstensor ist gegeben durch (vgl. (3.6))

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\nabla \cdot \vec{u})\vec{I} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 & & \\ & a_1 + 2a_2 & \\ & & a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_2 \end{pmatrix} \right].\end{aligned}$$

Aus  $\vec{\sigma}(\vec{u})(e_1) = e_1$  erhalten wir die Gleichung

$$a_1 + \frac{\nu}{1-2\nu}(a_1 + 2a_2) = \frac{1+\nu}{E},$$

und aus  $\vec{\sigma}(\vec{u})(e_2) = \vec{\sigma}(\vec{u})(e_3) = 0$  erhalten wir

$$a_2 + \frac{\nu}{1-2\nu}(a_1 + 2a_2) = 0.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist gegeben durch

$$a_1 = \frac{1}{E}, \quad a_2 = -\frac{\nu}{E},$$

und somit ist das gesuchte Verschiebungsfeld

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass sich der Zylinder um das  $\frac{1}{E}$ -fache seiner ursprünglichen Länge verlängert und gleichzeitig sich sein Radius um das  $\frac{\nu}{E}$ -fache verringert. Somit ist der Elastizitätsmodul  $E$  die Kraft, mit der man an den Seiten des Zylinders ziehen muss, um ihn auf die doppelte Länge zu strecken, und die Querkontraktionszahl  $\nu$  gibt an, um welchen Anteil sich der Radius dabei reduziert.

### 3.8. Ebener Spannungs- und ebener Verzerrungszustand

In gewissen Situationen lässt sich die Dimension der Gleichungen der linearen Elastizität reduzieren. Wir gehen hier immer von einem homogenen, isotropen, linear elastischen Material aus.

Beim **ebenen Verzerrungszustand** (engl. *plane strain*) ist der Verzerrungstensor unabhängig von  $x_3$  und liegt nur in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene, also

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Verschiebung  $\vec{u}$  nicht von  $x_3$  abhängt und dass  $u_3$  konstant (null) ist. Dieser Zustand ist annäherungsweise in langen zylindrischen Objekten (weit weg von den Enden) erfüllt, die in  $x_3$ -Richtung viel länger als in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung sind und bei denen die Krafteinwirkung nur in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene liegt.

Die Komponenten des Spannungstensors (3.6) für ein homogenes isotropes Material haben dann die Form

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \\ \sigma_{i3} &= \sigma_{3i} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon$  und somit  $\vec{\sigma}$  unabhängig von  $x_3$  ist, gilt  $\partial_{x_3}\sigma_{33} = 0$  und somit

$$(\nabla \cdot \vec{\sigma})_i = \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \sigma_{ij} = (\lambda + \mu) \partial_{x_i} (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2) + \mu \Delta u_i$$

für  $i = 1, 2$ . Die Gleichungen der linearen Elastizität lassen sich somit mit  $\vec{u}^{(2)}(x_1, x_2) := (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))^T$  und dem entsprechenden Volumenskraftvektor schreiben als

$$-(\lambda + \nu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}^{(2)}) - \mu \Delta \vec{u}^{(2)} = \vec{\rho}_{F_v}^{(2)},$$

was genau die formale zweidimensionale Entsprechung zu (3.9) mit denselben Lamé-Parametern ist.

Beim **ebenen Spannungszustand** (engl. *plane stress*) nimmt man an, dass der Spannungstensor  $\vec{\sigma}$  von  $x_3$  unabhängig ist und dass  $\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0$  für  $i = 1, 2, 3$ . Diese Annahme ist näherungsweise korrekt für dünne Platten, die in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene liegen und bei denen keine Spannung in Normalenrichtung vorliegt. Aus (3.6) folgt dann

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu} \text{spur}(\vec{\varepsilon})$$

und damit weiter

$$(3.10) \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

Somit ist

$$\sigma_{ij} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2.$$

Dies entspricht der zweidimensionalen Form des Hookeschen Gesetzes (3.6), allerdings nun mit dem modifizierten Lamé-Parameter

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Einsetzen in den (IES) liefert die zweidimensionale Gleichung

$$\rho_m \partial_t^2 \vec{u}^{(2)} - \frac{2\mu^2 + 3\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}^{(2)}) - \mu \Delta \vec{u}^{(2)} = \vec{\rho}_{F_v}^{(2)}.$$

Aus (3.10) erhält man für die dritte Komponente

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right).$$

Insbesondere ist also die Verschiebung in  $x_3$ -Richtung in diesem Modell, anders als im ebenen Verzerrungszustand, im Allgemeinen nicht null! Kompliziertere zweidimensionale Plattenmodelle erlauben auch Belastungen in Normalenrichtung.



## KAPITEL 4

### Strömungsdynamik

Wir beschäftigen uns nun mit Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen. Genauer gesagt möchten wir ein mathematisches Modell herleiten, mit dem wir die folgenden Größen bestimmen können:

- Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x}, t)$
- Druckfeld  $p(\vec{x}, t)$
- Massendichtefeld  $\rho_m(\vec{x}, t)$
- Temperaturfeld  $T(\vec{x}, t)$ .

Wir haben es also mit 6 unbekanntenen Größen zu tun.

Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel verwenden wir hier nicht Lagrange-, sondern **Eulersche Koordinaten** zur Beschreibung.

**ERINNERUNG.** Bei der Beschreibung in **Lagrangeschen Koordinaten** betrachtet man alle Größen in Bezug auf die Referenzkonfiguration  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ . Ist also  $\vec{\xi} \in \Omega_0$  der Ortspunkt eines Partikels in der Referenzkonfiguration, so ist beispielsweise  $\vec{v}(\vec{\xi}, t)$  die Geschwindigkeit, die dieser Partikel zur Zeit  $t$  hat.

Bei der Beschreibung in **Eulerkoordinaten** betrachtet man alle Größen in Bezug auf die momentane Konfiguration  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$ . So gibt  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  also beispielsweise die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  jenes Partikels an, der sich zur Zeit  $t$  im Ort  $\vec{x} \in \Omega_t$  befindet.

Sei  $\vec{\xi} \in \Omega_0$  ein Punkt in der Referenzkonfiguration. Dann betrachten wir die Abbildung

$$\vec{x} : \Omega_0 \times (0, \tilde{t}) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (\vec{\xi}, t) \mapsto \vec{x}(\vec{\xi}, t),$$

die  $\vec{\xi}$  in den entsprechenden Punkt  $\vec{x}(\vec{\xi}, t) \in \Omega_t$  in der momentanen Konfiguration überführt. Die Abbildung  $\vec{x}$  habe dabei die folgenden Eigenschaften:

$$(4.1a) \quad \vec{x}(\cdot, 0) \equiv id_{\Omega_0 \rightarrow \Omega_0},$$

$$(4.1b) \quad \vec{x} \in C^1(\Omega_0 \times (0, \tilde{t}), \mathbb{R}^d),$$

$$(4.1c) \quad \vec{x}(\cdot, t) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \text{ ist bijektiv für alle } t \in (0, \tilde{t}),$$

$$(4.1d) \quad \det \left( \nabla_{\vec{\xi}} \vec{x}(\vec{\xi}, t) \right) > 0 \text{ für alle } t \in (0, \tilde{t}) \text{ und } \vec{\xi} \in \Omega_0.$$

Es beschreibt also  $\vec{x}(\vec{\xi}, \cdot)$  die Bahnkurve, die der Punkt  $\vec{\xi}$  der Referenzkonfiguration durchläuft. Die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung im Punkt  $\vec{x} \in \Omega_t$  zur Zeit  $t$  ist dann durch die erste bzw. zweite totale Ableitung dieser Bahnkurve nach  $t$  gegeben, also

$$(4.2a) \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt}(\vec{\xi}, t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\vec{\xi}, t),$$

$$(4.2b) \quad \vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}(\vec{\xi}, t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{x}, t) = \nabla \vec{v} \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (\nabla \vec{v}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

### 4.1. Das Reynoldssche Transporttheorem

Bei Integralen von stetig differenzierbaren Funktionen über die Referenzkonfiguration ist die zeitliche Ableitung des Integrals gleich des Integrals der zeitlichen Ableitung. Da wir nun **zeitlich veränderliche Gebiete** betrachten, gilt diese Kommutativität im Allgemeinen nicht mehr. Wir betrachten hierzu den folgenden Satz.

**SATZ 4.1** (Reynoldssches Transporttheorem). *Die Abbildung  $\vec{x} : \Omega_0 \times (0, \tilde{t}) \rightarrow \mathbb{R}^d$  erfülle (4.1). Außerdem sei  $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\vec{\xi}, t)$  stetig differenzierbar. Dann gilt für alle  $\phi \in C^1(\Omega_t \times (0, \tilde{t}))$*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \phi(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\phi(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) \right] d\vec{x}.$$

**BEWEIS.** Wir geben den Beweis nur in einer Raumdimension, also  $d = 1$ . Für den allgemeinen Fall siehe [EGK11, Satz 5.4]. Mittels (4.2a) und der Koordinatentransformation  $\xi \mapsto x(\xi, t)$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \phi(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \phi(x(\xi, t), t) \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \phi(x, t) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{dx}{dt} \right] d\xi \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} v + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \phi \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] d\xi \\ &= \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\phi v) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] dx. \quad \square \end{aligned}$$

### 4.2. Erhaltungssätze in Eulerkoordinaten

Wie üblich gehen wir bei der Herleitung unseres Modells von Erhaltungssätzen aus. Im Folgenden leiten wir die differenzielle Form des (MES), (IES) und (EES) in Eulerkoordinaten her.

**4.2.1. Massenerhaltungssatz.** Sei  $\omega_0 \subset \Omega_0$  ein beliebiges Teilgebiet und  $\omega_t := \vec{x}(\omega_0, t)$ . Das heißt,  $\omega_0$  ist die Referenzkonfiguration zur momentanen Konfiguration  $\omega_t$  zum Zeitpunkt  $t$ . Die in  $\omega_t$  enthaltene Masse ist somit zu jedem Zeitpunkt gleich der in  $\omega_0$  enthaltene Masse. Damit gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho_m(\vec{x}, t) d\vec{x} = 0.$$

Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems liefert nun

$$\int_{\omega_t} \left[ \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) \right] d\vec{x} = 0.$$

Dies gilt für ein beliebiges Teilgebiet  $\omega_t \subset \Omega_t$ , da  $\omega_0 \subset \Omega_0$  ein beliebiges Teilgebiet ist. Somit folgt

$$\text{(MES)} \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\rho_m(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) = 0 \quad \text{in } \Omega_t.$$

Dies ist der Massenerhaltungssatz (Kontinuitätsgleichung), den wir bereits in Kapitel 1 kennengelernt haben, mit Quelldichte  $f_m \equiv 0$  und Massenflussdichte  $\vec{q}_m = \rho_m \vec{v}$ .

DEFINITION 4.2. Ein Material heißt **inkompressibel**, falls seine Massendichte zeitlich konstant ist, also

$$\frac{d\rho_m}{dt}(\vec{x}, t) = 0.$$

Für inkompressible Materialien gilt damit

$$0 = \nabla \rho_m \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = \nabla \rho_m \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho_m}{\partial t}.$$

Der (MES) liefert (vgl. (A.4))

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \rho_m \cdot \vec{v} + \rho_m \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Da  $\rho_m > 0$ , folgt somit die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Materialien,

$$(4.3) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

**4.2.2. Impulserhaltungssatz.** Wir leiten nun den (IES) in differenzieller Form in Eulerkoordinaten her. Hierzu seien  $\omega_0$  und  $\omega_t$  wie im letzten Abschnitt. Der Impulserhaltungssatz in integraler Form ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{t_2}} (\rho_m \vec{v})(\vec{x}, t_2) d\vec{x} - \int_{\omega_{t_1}} (\rho_m \vec{v})(\vec{x}, t_1) d\vec{x} \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\omega_t} (\vec{f}_a \rho_m)(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial \omega_t} \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) dS(\vec{x}) \right] dt, \end{aligned}$$

wobei die Volumenkraftdichte  $\vec{\rho}_{F_v}$  durch  $\vec{f}_a \rho_m$  mit der Beschleunigung  $\vec{f}_a$  gegeben ist. Ein typischer Fall ist  $\vec{f}_a = -g\vec{e}_3$  mit der Erdbeschleunigung  $g$ , sodass  $\vec{\rho}_{F_v}$  die Erdanziehungskraft ist.

Dividieren durch  $t_2 - t_1$  und  $t_2 \rightarrow t_1$  liefert unter Verwendung von Lemma 1.1

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} (\rho_m \vec{v})(\vec{x}, t) d\vec{x} = \int_{\omega_t} (\vec{f}_a \rho_m)(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial \omega_t} \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) dS(\vec{x}),$$

wobei wir zur besseren Notation  $t_1$  durch  $t$  ersetzt haben. Komponentenweise Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems liefert nun

$$\int_{\omega_t} \frac{\partial(\rho_m \vec{v})}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v} \vec{v}^T) d\vec{x} = \int_{\omega_t} (\vec{f}_a \rho_m)(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial \omega_t} \vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) dS(\vec{x}).$$

Analog zum Fall von Lagrangekoordinaten (vgl. Lemma 3.2) folgert man die Existenz eines symmetrischen Spannungstensors  $\vec{\vec{Z}}$ , sodass  $\vec{\rho}_{F_s}(\vec{x}, \vec{n}, t) = \vec{\vec{Z}}(\vec{x}, t) \vec{n}$ . Damit folgt mit dem Satz von Gauss

$$\int_{\omega_t} \frac{\partial(\rho_m \vec{v})}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\vec{v}(\rho_m \vec{v})^T) d\vec{x} = \int_{\omega_t} (\vec{f}_a \rho_m)(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{\vec{Z}}(\vec{x}, t) d\vec{x}.$$

Da  $\omega_t$  beliebig gewählt war und allgemein gilt, dass  $\nabla \cdot (\vec{f} \vec{g}^T) = (\nabla \vec{f}) \vec{g} + \vec{f}(\nabla \cdot \vec{g})$ , wie man leicht nachrechnet, folgt

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) + (\nabla \vec{v}) \rho_m \vec{v}}_{=\vec{v}(\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}))=0} = \vec{f}_a \rho_m + \nabla \cdot \vec{\vec{Z}} \end{aligned}$$

aufgrund der Kontinuitätsgleichung. Insgesamt erhalten wir damit

$$(IES) \quad \rho_m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \vec{v} \right) - \nabla \cdot \vec{\vec{Z}} = \rho_m \vec{f}_a.$$

Dies ist der (IES) in differenzieller Form in Eulerkoordinaten.

BEMERKUNG 4.3. Häufig schreibt man  $(\nabla \vec{v}) \vec{v}$  als  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ , da

$$(\nabla \vec{v}) \vec{v} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \vec{e}_i \quad \text{und} \quad (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \sum_{i,j=1}^d v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \vec{e}_i.$$

**4.2.3. Energieerhaltungssatz.** Nun betrachten wir den (EES), den wir ebenfalls in differenzieller Form in Eulerkoordinaten herleiten. Seien  $\omega_0$  und  $\omega_t$  wie im letzten Abschnitt. Die gesamte Energie in  $\omega_t$  sei durch die kinetische und thermische Energie gegeben (alle weiteren Effekte werden nicht berücksichtigt). Außerdem betrachten wir nur Änderungen der Energie durch Kraftereinwirkung und thermische Effekte. Der (EES) in integraler Form (nach Division durch  $t_2 - t_1$  und  $t_2 \rightarrow t_1$ ) lautet dann

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \left( \frac{1}{2} \rho_m |\vec{v}|^2 + \rho_m \rho_E \right) d\vec{x} = \int_{\omega_t} (\rho_m \vec{f}_a \cdot \vec{v} + f_E \rho_m) d\vec{x} + \int_{\partial \omega_t} (\vec{v}^T \vec{\vec{Z}} - \vec{q}_E) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}),$$

wobei die Terme wie folgt definiert sind:

$\vec{v}$	Geschwindigkeit	$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\rho_m$	volumenbezogene Massendichte	$[\rho_m] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\rho_E$	massenbezogene Energiedichte	$[\rho_E] = \frac{\text{mJ}}{\text{kg}}$
$\vec{f}_a$	Beschleunigung (z.B. Erdbeschleunigung)	$[\vec{f}_a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$f_E$	massenbezogene Wärmequellendichte	$[f_E] = \frac{\text{J}}{\text{kg s}}$
$\vec{\vec{Z}}$	Spannungstensor	$[\vec{\vec{Z}}] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
$\vec{q}_E$	Energie/Wärmemengenfluss	$[\vec{q}_E] = \frac{\text{mJ}}{\text{m}^2 \text{s}}$

Das Reynoldssche Transporttheorem und der Satz von Gauss liefern nun

$$\begin{aligned} \int_{\omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_m \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \rho_E \right) \right) + \nabla \cdot \left( \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \rho_E \right) \rho_m \vec{v} \right) d\vec{x} \\ = \int_{\omega_t} \rho_m \vec{f}_a \cdot \vec{v} + f_E \rho_m + \nabla \cdot \left( \vec{\vec{Z}} \vec{v} - \vec{q}_E \right) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Da  $\omega_t$  beliebig gewählt war, folgt mit Lemma 1.1 und der Produktregel (A.4)

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \rho_E \right) + \underbrace{\left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \rho_E \right) \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) \right)}_{=0} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \rho_E \right) \cdot \vec{v} \rho_m \\ = \rho_m \vec{f}_a \cdot \vec{v} + f_E \rho_m + \nabla \cdot \left( \vec{\vec{Z}} \vec{v} - \vec{q}_E \right) \end{aligned}$$

aufgrund der Kontinuitätsgleichung (MES). Damit gilt

$$\underbrace{\rho_m \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) \right)}_{=:(*)} + \rho_m \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \rho_m \vec{v} \cdot \nabla \rho_E - \rho_m \vec{f}_a \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \left( \vec{Z} \vec{v} - \vec{q}_E \right) = f_E \rho_m.$$

Des Weiteren beobachten wir, dass (vgl. (A.3))

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} v_j^2 = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = [(\nabla \vec{v}^T) \vec{v}]_i$$

und daher

$$(*) = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}^T) \vec{v} = \vec{v} \cdot \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \vec{v} \right).$$

Nach dem (IES) wissen wir, dass

$$\rho_m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \vec{v} \right) = \rho_m \vec{f}_a + \nabla \cdot \vec{Z}.$$

Damit folgt

$$\vec{v} \cdot \left( \rho_m \vec{f}_a + \nabla \cdot \vec{Z} \right) + \rho_m \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \rho_m \vec{v} \cdot \nabla \rho_E - \rho_m \vec{f}_a \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \left( \vec{Z} \vec{v} - \vec{q}_E \right) = f_E \rho_m.$$

Mit der Produktregel (A.6) folgt

$$(EES) \quad \rho_m \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \rho_m \vec{v} \cdot \nabla \rho_E - (\nabla \vec{v}) : \vec{Z} + \nabla \cdot \vec{q}_E = f_E \rho_m.$$

Dies ist der Energieerhaltungssatz in differenzieller Form in Eulerkoordinaten.

### 4.3. Materialgesetze in der Strömungsdynamik

Der (MES), (IES) und (EES) sind zusammen  $d+2$  Gleichungen mit  $2+2d+\frac{d(d+1)}{2}$  Unbekannten  $(\rho_m, \vec{v}, \vec{Z}, \rho_E, \vec{q}_E)$  (man beachte wieder die Symmetrie von  $\vec{Z}$ ). Wir benötigen also Materialgesetze, um die Zahl der Unbekannten zu reduzieren.

**4.3.1. Fouriersches Wärmeleitgesetz.** Dieses Materialgesetz haben wir bereits in Kapitel 2 kennengelernt. Es ist durch (2.1) gegeben, also

$$\vec{q}_E = -\vec{\Lambda} \nabla T,$$

wobei  $\vec{\Lambda}$  der symmetrisch positiv definite Wärmeleitungstensor und  $T$  die Temperatur ist.

**4.3.2. Konstitutives Gesetz für den Spannungstensor.** Als **nichtviskose Strömung** bezeichnet man eine Strömung ohne innere Reibung. Dies ist physikalisch dann gegeben, wenn Wechselwirkungen zwischen benachbarten Partikeln vernachlässigbar sind, zum Beispiel im Fall von Gasen unter niedrigem Druck. Der Spannungstensor ist dann gegeben durch

$$(4.4) \quad \vec{Z} = -p \vec{I},$$

wobei  $p$  der Druck ist ( $[p] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ ). Dies bedeutet also, dass Oberflächenkräfte innerhalb des Materials nur parallel zum Normalenvektor wirken und nicht vom Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  abhängen.

Von einer **viskose Strömung** spricht man, wenn es erhebliche Reibungseffekte innerhalb des Stoffes gibt. Schnelle Partikel geben dabei durch Wechselwirkungen einen Teil ihrer Bewegungsenergie an benachbarte langsamere Partikel ab und beschleunigen diese dadurch. In diesem Fall erhalten wir für den Spannungstensor zusätzliche Terme

$$(4.5) \quad \vec{\Sigma} = \mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) + \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{I} - p \vec{I}.$$

Man beachte, dass die beiden zusätzlichen Summanden dem Ausdruck (3.6) für den Spannungstensor im Fall der linearen isotropen Elastizität entsprechen. In der Strömungsmechanik bezeichnet man  $\mu$  als **Scherviskosität** und  $\lambda$  als **Volumenviskosität**.

**4.3.3. Materialgesetz für idealisierte Gase und Flüssigkeiten.** In idealisierten Gasen sind der Druck  $p$  und die Dichte  $\rho_m$  proportional zueinander (siehe Kapitel 1). Genauer gesagt besteht die Beziehung

$$(4.6) \quad \frac{p}{\rho_m} = \frac{R}{M} T,$$

wobei  $M$  (mit  $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ ) die **molare Masse** und  $R \approx 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$  die universelle Gaskonstante ist.

**BEMERKUNG 4.4.** Ein Mol ist die Stoffmenge, die in 12 g Kohlenstoff (Isotop C-12) enthalten ist, nämlich etwa  $6,022 \cdot 10^{23}$  Teilchen (Avogadro-Konstante). Die molare Masse beschreibt also die Masse eines Mols des betrachteten Gases.

Des Weiteren gilt für idealisierte Gase, dass die Energiedichte  $\rho_E$  proportional zur Temperatur ist, also

$$(4.7) \quad \rho_E = c_V T,$$

wobei  $c_V$  mit  $[c_V] = \frac{\text{J}}{\text{K m}^3}$  die **spezifische Wärmekapazität** bei konstantem Volumen ist.

Für idealisierte Flüssigkeiten ist  $\rho_m$  konstant, und die Temperatur hat keinen Einfluss.

**BEMERKUNG 4.5.** Für idealisierte Flüssigkeiten bleiben also die vier Unbekannten  $p$  und  $\vec{v}$  und die vier entsprechenden Gleichungen, die durch den (IES) und den (MES) gegeben sind.

Für idealisierte Gase bleiben die fünf Unbekannten  $T$ ,  $\rho_m$  und  $\vec{v}$  und die fünf entsprechenden Gleichungen, die durch den (IES), den (MES) und den (EES) gegeben sind.

#### 4.4. Die Eulerschen Gleichungen der Gasdynamik

Mittels der in den vorherigen Abschnitten hergeleiteten Erhaltungssätzen und gegebenen Materialgesetzen sind wir nun in der Lage, die sogenannten Eulerschen Gleichungen der Gasdynamik aufzustellen. Hierzu verwenden wir den Massenerhaltungssatz für kompressible Materialien sowie das konstitutive Gesetz (4.4) für

nichtviskose Strömungen. Zur besseren Übersicht fassen wir zunächst die benötigten Erhaltungssätze und Materialgesetze zusammen:

$$\text{Erhaltungssätze} \begin{cases} \rho_m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) - \nabla \cdot \vec{Z} = \rho_m \vec{f}_a & \text{(IES)} \\ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0 & \text{(MES)} \\ \rho_m \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \rho_m \vec{v} \cdot \nabla \rho_E - \vec{Z} : \nabla \vec{v} + \nabla \cdot \vec{q}_E = f_E \rho_m & \text{(EES)} \end{cases}$$

$$\text{Materialgesetze} \begin{cases} \vec{Z} = -p \vec{I} \\ \vec{q}_E = -\vec{\Lambda} \nabla T \\ p = \frac{R}{M} T \rho_m \\ \rho_E = c_V T \end{cases}$$

Einsetzen der Materialgesetze in die Erhaltungssätze liefert

$$(4.8) \quad \begin{cases} \rho_m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) + \nabla p = \rho_m \vec{f}_a \\ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0 \\ \rho_m c_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) + \frac{R}{M} T \rho_m \nabla \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (\vec{\Lambda} \nabla T) = f_E \rho_m, \end{cases}$$

wobei wir wieder verwendet haben, dass  $\vec{I} : \nabla \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$ . Dies sind die **Eulerschen Gleichungen der Gasdynamik**.

Für den Fall, dass  $T$  konstant ist, lässt man die letzte Gleichung in (4.8) weg und erhält somit

$$\rho_m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) + \nabla p = \rho_m \vec{f}_a,$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0,$$

also vier Gleichungen mit vier Unbekannten.

#### 4.5. Die Navier-Stokes Gleichungen für viskose Flüssigkeiten

Wir geben nun die Navier-Stokes Gleichungen für viskose Flüssigkeiten im isothermen und inkompressiblen Fall an. Zur besseren Übersicht geben wir auch hier die benötigten Erhaltungssätze an.

$$\text{Erhaltungssätze} \begin{cases} \rho_m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) - \nabla \cdot \vec{Z} = \rho_m \vec{f}_a & \text{(IES)} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 & \text{(MES)} \end{cases}$$

Außerdem benötigen wir das Materialgesetz

$$\text{Materialgesetz} \quad \vec{Z} = \mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) + \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{I} - p \vec{I}$$

für den Spannungstensor im viskosen Fall. Da  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , gilt

$$\nabla \cdot (\nabla \vec{v})^T = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \vec{e}_j = 0.$$

Daher liefert das Einsetzen des Materialgesetzes

$$\rho_m \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) - \mu \Delta \vec{v} + \nabla p = \rho_m \vec{f}_a,$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Dies sind die Navier-Stokes Gleichungen für inkompressible und isotherme Flüssigkeiten. Dies sind vier Gleichungen mit vier Unbekannten  $(\vec{v}, p)$ , da  $\rho_m$  als konstant angenommen wurde. Häufig dividiert man durch  $\rho_m$  und führt die sogenannte **kinematische Viskosität**  $\eta := \frac{\mu}{\rho_m}$  ein ( $[\eta] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ ). Damit erhalten wir

$$(4.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \eta \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_m} \nabla p = \vec{f}_a, \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$

**BEMERKUNG 4.6.** Gleichung (4.9) ist ein kompliziertes nichtlineares System partieller Differentialgleichungen, das analytisch bis heute nicht vollständig verstanden ist. Insbesondere die Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für  $d = 3$  ist ungeklärt und ist eines der sieben Millenium-Probleme des Clay-Instituts mit einer Million US-Dollar Preisgeld. Nichtsdestotrotz sind die Navier-Stokes Gleichungen äußerst nützlich in der numerischen Simulation von Strömungsphänomenen.

**4.5.1. Entdimensionalisierung und Reynoldszahl.** Wir wollen nun die Navier-Stokes-Gleichungen (4.9) entdimensionalisieren, um ein Gleichungssystem mit dimensionslosen Größen zu erhalten. Wir gehen dazu wie in Kapitel 1 für die barometrische Höhenformel vor. Dazu betrachten wir die folgenden **charakteristischen Größen**

- $v^*$ : charakteristische Größe für die Geschwindigkeit,
- $x^*$ : charakteristische Größe für die Länge,
- $p^*$ : charakteristische Größe für den Druck,
- $t^* := \frac{x^*}{v^*}$ : charakteristische Größe für die Zeit,

und die entsprechenden **dimensionslosen Größen**

$$\vec{v} := \frac{\vec{v}}{v^*}, \quad \vec{x} := \frac{\vec{x}}{x^*}, \quad \tilde{p} := \frac{p}{p^*}, \quad \tilde{t} := \frac{t}{t^*}.$$

Nun betrachten wir die einzelnen Terme mit Differentialoperatoren in (4.9).

- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = v^* \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{v^*}{t^*} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tilde{t}}$
- $(\nabla \vec{v}) \vec{v} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \vec{e}_i = v^{*2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_j} \tilde{v}_j = \frac{v^{*2}}{x^*} (\nabla_{\vec{x}} \tilde{v}) \tilde{v}$
- $\Delta \vec{v} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} = \frac{v^*}{x^{*2}} \Delta_{\vec{x}} \tilde{v}$
- $\nabla p = \sum_{i=1}^d \frac{\partial p}{\partial x_i} \vec{e}_i = \frac{p^*}{x^*} \nabla_{\vec{x}} \tilde{p}$
- $\nabla \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{v^*}{x^*} \nabla_{\vec{x}} \cdot \tilde{v}.$

Einsetzen in (4.9) liefert

$$\frac{v^*}{t^*} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{v^{*2}}{x^*} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \eta \frac{v^*}{x^{*2}} \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_m} \frac{p^*}{x^*} \nabla \tilde{p} = \vec{f}_a,$$

wobei sich Differentialoperatoren für Tilde-Funktionen auf die transformierte Ortsvariable  $\vec{x}$  beziehen. Da  $\frac{v^*}{t^*} = \frac{v^{*2}}{x^*}$ , ergibt Multiplikation mit  $\frac{x^*}{v^{*2}}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \underbrace{\frac{\eta}{x^* v^*}}_{=: Re^{-1}} \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_m} \frac{p^*}{v^{*2}} \nabla \tilde{p} = \underbrace{\vec{f}_a \frac{x^*}{v^{*2}}}_{=: \vec{f}_a},$$

wobei die dimensionslose Größe

$$Re = \frac{x^* v^*}{\eta}$$

die sogenannte **Reynoldszahl** ist. Mit der Wahl des charakteristischen Drucks  $p^* := \rho_m v^{*2}$  (beachte:  $[p^*] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{m}^3 \text{s}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ ) erhalten wir also insgesamt die folgenden entdimensionalisierten Navier-Stokes-Gleichungen:

$$(4.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - Re^{-1} \Delta \vec{v} + \nabla \tilde{p} = \vec{f}_a \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$

**4.5.2. Grenzfälle.** In vielen Fällen ist die Reynoldszahl besonders groß oder besonders klein. In solchen Situationen können wir die folgenden Grenzfälle der Navier-Stokes-Gleichungen betrachten.

Wenn  $Re$  sehr groß ist, ist der Term  $\Delta \vec{v}$  vernachlässigbar. Wir erhalten dann

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla \tilde{p} = \vec{f}_a, \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$

Dies sind die **Euler-Gleichungen für nicht-viskose Strömungen**.

Wenn  $Re$  klein ist, dominiert  $Re^{-1} \Delta \vec{v}$  den nicht-linearen Term  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ . Wir erhalten dann

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - Re^{-1} \Delta \vec{v} + \nabla \tilde{p} = \vec{f}_a, \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$

Dies sind die **Stokes-Gleichungen** für langsame, viskose Strömungen. Im Gegensatz zu den allgemeinen Navier-Stokes-Gleichungen sowie den Euler-Gleichungen sind sie linear.

**BEISPIEL 4.1.** Die folgende Tabelle zeigt einige Beispiele für die charakteristischen Größen in verschiedenen Situationen und die daraus resultierenden Reynoldszahlen.

Beispiel	$\vec{x}^*$	$v^*$	$\eta$	$Re$
Strömung um ein Flugzeug	100 m	300 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$3 \cdot 10^9$
Strömung um ein Auto	5 m	20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$10^7$
Kleinstlebewesen im Wasser	$10^{-3}$ m	$10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$10^{-3}$

**BEMERKUNG 4.7.** Wie die oben betrachteten Grenzfälle nahelegen, ist die Größe der Reynoldszahl wichtig für die Art der Strömung. Tatsächlich gibt es in vielen geometrisch ähnlichen Anordnungen einen kritischen Wert  $Re_c$  für die Reynoldszahl. Unterhalb dieses kritischen Wertes ist die Strömung **laminar**, oberhalb **turbulent**. Für Wasserrohre mit kreisförmigem Querschnitt findet man beispielsweise experimentell  $Re_c = 2300$  (siehe [Dem08, Abschnitt 8.8]).

**Laminar** bezeichnet dabei eine Strömung, die sich in Schichten bewegt, die sich untereinander nicht mischen. Im Gegensatz dazu steht eine **turbulente** Strömung, bei der Verwirbelungen auftreten und die Schichten sich vermischen (siehe Abb. 1).

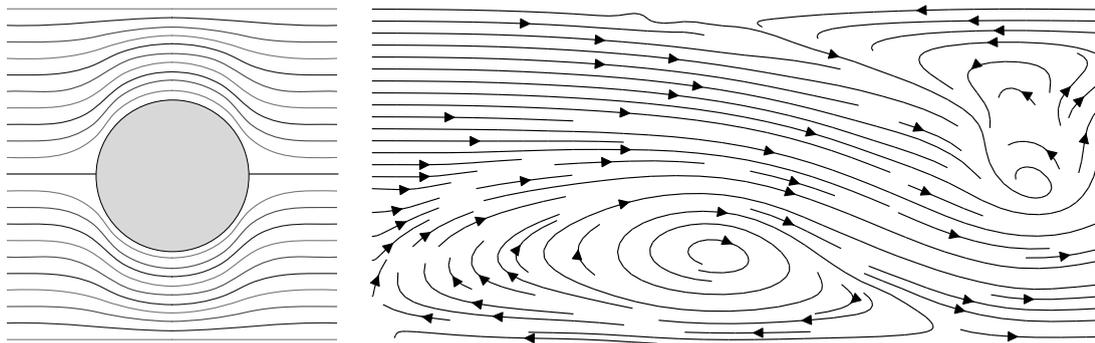


ABBILDUNG 1. Laminare (links) und turbulente (rechts) Strömung.

**4.5.3. Die stationären Stokes-Gleichungen.** Im Fall einer stationären Strömung, wenn sich also das Geschwindigkeitsfeld nicht mit der Zeit ändert, lauten die Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -Re^{-1}\Delta\vec{v} + \nabla p &= \vec{f}_a, \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir die entdimensionalisierten Gleichungen voraussetzen und der Notation halber auf die Tilden verzichten. Wir nehmen zusätzlich die homogene Dirichlet-Randbedingung

$$\vec{v}(\vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$$

an. Man beachte, dass für eine Lösung  $(\vec{v}, p)$  dieses Gleichungssystems auch  $(\vec{v}, p + c)$  für eine beliebige Konstante  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung ist und somit der Druck nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

Multiplikation der ersten Gleichung mit einer geeigneten vektorwertigen Testfunktion  $\vec{w}$ , Integration über  $\Omega$  und partielle Integration liefern

$$Re^{-1} \int_{\Omega} \nabla \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} \, d\vec{x} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{w} \, d\vec{x} = \int_{\Omega} \vec{f}_a \cdot \vec{w} \, d\vec{x} \quad \forall \vec{w} \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

wobei die Randterme wieder wegen der Randbedingung wegfallen. Multiplikation der zweiten Gleichung mit einer skalaren Testfunktion  $q$  und Integration liefert

$$- \int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{v} \, d\vec{x} = 0 \quad \forall q.$$

Wir können nun die Bilinearformen

$$a(\vec{v}, \vec{w}) := Re^{-1} \int_{\Omega} \nabla \vec{v} \cdot \nabla \vec{w} \, d\vec{x},$$

$$b(q, \vec{v}) := - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{v} \, d\vec{x}$$

eingeführen und dann die Variationsformulierung der stationären Stokes-Gleichungen schreiben als: finde  $\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^3$  und  $p \in L_0^2(\Omega)$ , sodass

$$a(\vec{v}, \vec{w}) + b(p, \vec{w}) = (\vec{f}_a, \vec{w}) \quad \forall \vec{w} \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

$$b(q, \vec{v}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega),$$

wobei

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, d\vec{x} = 0 \right\}$$

der Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit Mittelwert 0 ist. Dieser Raum ist darum sinnvoll, weil wie oben erwähnt  $p$  nur bis auf eine Konstante bestimmt ist und wir somit immer durch Subtrahieren des Mittelwerts  $p \in L_0^2(\Omega)$  garantieren können.

Die obige Formulierung ist ein sogenanntes Sattelpunktproblem und ist schwieriger zu behandeln (sowohl was die Theorie der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, als auch die numerische Simulation am Computer betrifft) als ein elliptisches Problem (wie wir es etwa bei der Wärmeleitungsgleichung erhalten haben). Für diesen linearen Fall lassen sich jedoch, anders als bei den nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichungen, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unter recht allgemeinen Voraussetzungen zeigen.

Wir gehen noch kurz auf einige mögliche Randbedingungen und deren physikalische Bedeutung ein. Wir geben hier drei mögliche Fälle an, die auch wieder gemischt an verschiedenen Teilen des Randes auftreten können.

- Wandhaftbedingung:

$$\vec{v}(\vec{x}) = 0$$

Das Fluid befindet sich am entsprechenden Rand im Stillstand, "haftet" dort also an der Wand. Mathematisch ist dies eine homogene Dirichlet-Randbedingung. Diesen Fall haben wir oben angenommen.

- Einströmbedingung:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}_0(\vec{x}) \neq 0$$

Hier ist die Geschwindigkeit am entsprechenden Rand fix vorgeschrieben durch eine gegebene Funktion  $\vec{v}_0$ . Dies ist zum Beispiel dann eine sinnvolle Annahme, wenn Wasser mit einer bekannten und konstanten Geschwindigkeit in ein Rohr gepumpt wird. Dies ist eine nichthomogene Dirichlet-Randbedingung.

- Ausströmbedingung:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = 0$$

Diese Bedingung kann (näherungsweise) dort verwendet werden, wo das Fluid aus dem Rechengebiet ausfließt und keine Änderung des Geschwindigkeitsfelds in Normalenrichtung zu erwarten ist. Dies ist eine homogene Neumann-Randbedingung.

In der Praxis werden auch kompliziertere Bedingungen verwendet, um bestimmte physikalische Effekte zu modellieren.

Anstatt Randbedingungen für  $\vec{v}$  ist es manchmal auch möglich, Randbedingungen für den Druck  $p$  anzunehmen, wie wir in einem Beispiel sehen werden.

## 4.6. Beispiele

**4.6.1. Beispiel 1: Die Couette-Strömung.** Wir betrachten eine viskose Flüssigkeit, die sich zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten mit Normalenvektor  $\vec{e}_3$  und Abstand  $h$  befindet, also

$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < h\}.$$

Die untere Platte ruht, während sich die obere mit Geschwindigkeit  $(v_0, 0, 0)^T$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}$  bewegt. Wir ignorieren den Einfluss der Schwerkraft. Wir haben also die Navier-Stokes-Gleichungen in  $\Omega$  mit Wandhaft-Randbedingungen

$$\vec{v}(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \vec{v}(x_1, x_2, h) = v_0, \quad \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

sowie rechter Seite  $\vec{f}_a = 0$  zu lösen.

Wir suchen eine stationäre Lösung, und es ist naheliegend, einen Ansatz zu wählen, der nur von  $x_3$  abhängt und dessen Geschwindigkeit nur in  $x_1$ -Richtung liegt, also

$$\vec{v}(\vec{x}) = (v(x_3), 0, 0)^T, \quad p(\vec{x}) = p(x_3).$$

Für diesen Ansatzes gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\ v \cdot \nabla \vec{v} &= v(x_3) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} = 0, \\ \nabla p &= (0, 0, p'(x_3))^T, \\ \mu \Delta \vec{v} &= \mu (v''(x_3), 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichungen ergibt somit

$$\mu \begin{pmatrix} v''(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p'(x_3) \end{pmatrix}.$$

Daher ist der Druck konstant und  $v(\cdot)$  linear. Wegen der Randbedingungen ist also das Geschwindigkeitsfeld gegeben durch

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x_3 v_0}{h} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wächst also linear mit dem Abstand zur festen Platte.

**4.6.2. Beispiel 2: Die Pouseille-Strömung.** Wir betrachten wieder eine viskose Strömung zwischen zwei Platten wie bei der Couette-Strömung, aber nun sind beide Platten stationär, also

$$\vec{v}(x_1, x_2, 0) = \vec{v}(x_1, x_2, h) = 0, \quad \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Die Strömung wird nun durch einen Druckunterschied in  $x_1$ -Richtung angetrieben, nämlich

$$p(\vec{x}) = p_1 \quad \text{für } x_1 = 0, \quad p(\vec{x}) = p_2 \quad \text{für } x_1 = L.$$

Wir suchen wieder eine stationäre Lösung und machen den Ansatz

$$\vec{v}(\vec{x}) = (v(x_3), 0, 0)^T.$$

Einsetzen in die Navier-Stokes-Gleichungen ergibt

$$\mu \begin{pmatrix} v''(x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla p.$$

Somit ist  $p$  konstant in  $x_2$ - und  $x_3$ -Richtung, also  $p(\vec{x}) = p(x_1)$ . Da nun aber die linke Seite nur von  $x_3$  und die rechte nur von  $x_1$  abhängt, müssen beide Seiten der Gleichung konstant sein. Somit ist der Druck  $p$  linear zwischen  $p(0) = p_1$  und  $p(L) = p_2$ , also

$$p(x_1) = p_1 + \frac{x_1(p_2 - p_1)}{L}.$$

Somit gilt

$$\mu v''(x_3) = \frac{p_2 - p_1}{L},$$

was zusammen mit den Randbedingungen  $v(0) = v(h) = 0$  die quadratische Lösung

$$v(x_3) = \frac{p_1 - p_2}{2L\mu} x_3(h - x_3)$$

ergibt. Wir erhalten also ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil in  $x_3$ -Richtung, und die maximale Geschwindigkeit ist

$$v_{\max} = v(h/2) = \frac{p_1 - p_2}{8L\mu} h^2.$$

In diesem Fall gilt also: je größer die Scherviskosität  $\mu$ , desto geringer ist die maximale Geschwindigkeit der Strömung.



## KAPITEL 5

### Elektromagnetismus

In diesem letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit Wechselwirkungen von elektrischen und magnetischen Feldern. **Elektrische Felder** üben Kräfte auf geladene Teilchen aus und werden hervorgerufen von elektrischen Ladungen und durch zeitliche Änderungen magnetischer Felder. **Magnetfelder** werden verursacht durch magnetische Materialien, elektrische Ströme oder zeitliche Änderung eines elektrischen Feldes. Beide werden durch die **Maxwell-Gleichungen** beschrieben.

Die Herleitung der Maxwell-Gleichungen erfolgt *nicht* über den bisherigen allgemeinen Ansatz “Erhaltungssätze + Materialgesetze  $\Rightarrow$  Modell”. Maxwell führte sein Gleichungssystem 1864 ein. Streng genommen sind diese Gleichungen postuliert. Ihre Gültigkeit kann aber durch die folgenden Herleitungen plausibel gemacht werden.

#### 5.1. Das elektrische Feld

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall zweier stationärer, elektrisch geladener Teilchen, eines am Ort  $\vec{x}_0$  mit Ladung  $q_0$  und eines am Ort  $\vec{x}$  mit Ladung  $q$ . Die Ladungen können positiv oder negativ sein und haben die Einheit  $[q] = [q_0] = \text{C}$  (Coulomb), wobei  $1 \text{ C} = 1 \text{ A s} \approx 6,24 \cdot 10^{18}$  Elektronenladungen.

Wir betrachten nun die Kraft, die die erste Ladung (“Quellladung”) auf die zweite (“Probeladung”) ausübt. Diese ist kollinear mit dem Richtungsvektor zwischen den beiden Ladungen, ist anziehend, wenn die Ladungen gleichen Vorzeichen haben und sonst abstoßend, und fällt ab mit dem Quadrat des Abstands. Das **Coulombsche Gesetz** lautet genauer

$$\vec{F} = k \frac{qq_0(\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

mit einer Proportionalitätskonstante  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ , wobei  $\epsilon$  ein Materialparameter des vorliegenden Mediums ist, genannt **Permittivität** oder **dielektrische Leitfähigkeit**, die die Durchlässigkeit des Materials für elektrische Felder angibt. Im Vakuum gilt  $\epsilon = \epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$ , und dieser Wert wird **Dielektrizitätskonstante** genannt.

Die Wirkung der Quellladung  $q_0$  auf eine Probeladung  $q$  am Ort  $\vec{x}$  wird beschrieben durch ein Vektorfeld, das **elektrische Feld**  $\vec{E}$ , definiert durch

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x}),$$

womit gilt

$$\vec{E} = k \frac{q_0(\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}, \quad [\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Für ein elektrisches Feld, das von mehreren punktförmigen Quellladungen  $q_0^{(j)}$  an den Orten  $\vec{x}_0^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , generiert wird, gilt das sogenannte Superpositionsprinzip. Dieses besagt, dass das so erzeugte elektrische Feld einfach die Summe der

von den Punktladungen generierten elektrischen Felder ist, also

$$\vec{E}(\vec{x}) = k \sum_{j=1}^N \frac{q_0^{(j)} (\vec{x} - \vec{x}_0^{(j)})}{|\vec{x} - \vec{x}_0^{(j)}|^3},$$

und dessen Kraft auf eine Probeladung  $q$  an  $\vec{x}$  ist wieder  $\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$ . Siehe Abbildung 1 für ein Beispiel.

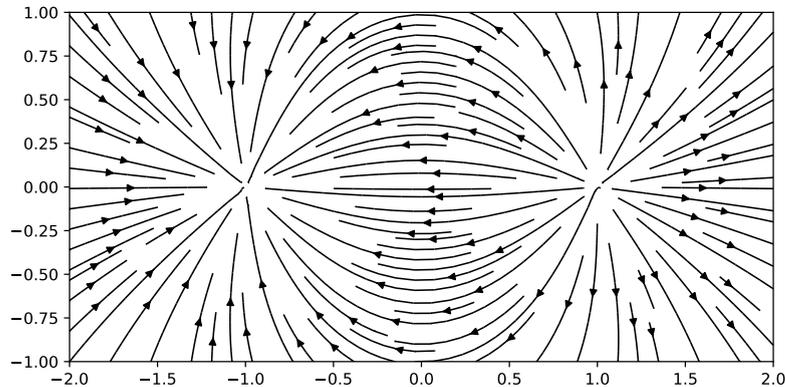


ABBILDUNG 1. Elektrisches Feld  $\vec{E}$  mit einer positiven ( $q = 1$ ) Punktladung an  $(1, 0)$  und einer negativen ( $q = -1$ ) Punktladung an  $(-1, 0)$ .

Wir wollen letztendlich wieder ein Kontinuumsmodell des Elektromagnetismus, weshalb wir eine kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte  $\rho_q$  ( $[\rho_q] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$ ) betrachten. Das dadurch generierte elektrische Feld ist dann durch Faltung definiert als

$$(5.1) \quad \vec{E}(\vec{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_q(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} d\vec{y}.$$

Die Kraft, die dieses elektrische Feld auf eine Probeladung  $q$  am Ort  $\vec{x}$  ausübt, ist wieder

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x}).$$

Wir beobachten, dass

$$(5.2) \quad -\nabla V = \vec{E}$$

mit dem **elektrischen Potenzial**

$$(5.3) \quad V(\vec{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho_q(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y},$$

was prinzipiell aus der Vektoridentität (A.2)

$$\nabla \frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{-\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

folgt. Es gilt  $\frac{[V]}{m} = [\vec{E}] = \frac{N}{C}$  und somit  $[V] = \frac{J}{C} =: V$  (Volt). Da bekanntlich die Rotation des Gradienten 0 ist, folgt

$$(5.4) \quad \nabla \times \vec{E} = 0,$$

womit  $\vec{E}$  ein **konservatives Vektorfeld** ist. Man könnte auch umgekehrt diese Relation direkt aus der Definition (5.1) beweisen und daraus die Existenz eines

Potenzials  $V$  folgern. Für eine Punktladung  $q_0$  an  $\vec{x}_0$  vereinfacht sich das Potenzial auf  $V(\vec{x}) = \frac{kq_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}$ .

Eine weitere wichtige Eigenschaft bezieht sich auf den Fluss des elektrischen Felds durch geschlossene Oberflächen. Wir betrachten hier zunächst den simpleren Fall einer Punktladung.

BEISPIEL 5.1. Gegeben sei eine Punktladung  $q_0$  am Ursprung und somit

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_0\vec{x}}{|\vec{x}|^3}.$$

Durch direkte Rechnung sehen wir zunächst  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  für  $\vec{x} \neq 0$ . Wir betrachten nun eine Kugel  $B$  mit Radius  $r$  um 0 und wollen den elektrischen Fluss durch die Kugeloberfläche berechnen. Es gilt

$$\int_B \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \int_B \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} dS(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \int_B \frac{1}{|\vec{x}|^2} dS(\vec{x}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon} \int_B \frac{1}{r^2} dS(\vec{x}) = \frac{q_0}{\epsilon}$$

oder

$$\int_B \epsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = q_0.$$

In anderen Worten: Der Fluss von  $\epsilon \vec{E}$  durch die Kugeloberfläche ist gleich der gesamten in der Kugel enthaltenen Ladung.

Tatsächlich gilt dies nicht nur für die Kugel, sondern für ein beliebiges  $C^1$ -Gebiet  $\Omega$  mit  $0 \in \Omega$ . Um dies zu sehen, nehmen wir wieder eine Kugel  $B$  mit Radius  $r$ , der klein genug ist, dass  $B \subset \Omega$ . Wir erhalten dann mit dem Satz von Gauss

$$\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \int_{\Omega \setminus B} \nabla \cdot \vec{E} dx + \int_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}).$$

Da  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  in  $\Omega \setminus B$ , folgt die gewünschte Aussage

$$\int_{\partial\Omega} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = q_0.$$

Über das Superpositionsprinzip lassen sich die obigen Beobachtungen direkt auf den Fall mehrerer Punktladungen übertragen. Im Fall einer kontinuierlichen Ladungsverteilung gilt der folgende Satz.

**SATZ 5.1 (Gesetz von Gauss).** Für ein beliebiges  $C^1$ -Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und ein elektrisches Feld der Form (5.1) gilt

$$(5.5) \quad \int_{\partial\Omega} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \int_{\Omega} \rho_q d\vec{x}.$$

Für den Fall, dass  $\epsilon \vec{E}$  stetig differenzierbar ist, folgt mittels des Satzes von Gauss aufgrund der Beliebigkeit von  $\Omega$  die differenzielle Form

$$(5.6) \quad \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_q.$$

Einsetzen von (5.2) liefert

$$(5.7) \quad -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_q.$$

Zusammen bezeichnet man (5.4) und (5.6) auch als **Grundgleichungen der Elektrostatik**.

**BEMERKUNG 5.2.** Es sei an dieser Stelle explizit darauf hingewiesen, dass das Gesetz von Gauss (5.5) auch dann gültig ist, wenn  $\epsilon \vec{E}$  nicht stetig differenzierbar ist (siehe Abschnitt 5.1.3).

Für den Fall eines homogenen Mediums (also  $\epsilon \equiv konst.$ ) vereinfacht sich (5.7) zur **Poissongleichung**

$$-\Delta V = \rho_q / \epsilon.$$

Tatsächlich löst  $V$  aus (5.3) diese Gleichung.

**5.1.1. Ladungsbilanz.** Analog zum (MES) und (EES) ist der folgende Zusammenhang für die Ladung in einem Gebiet  $\Omega$  sinnvoll: Die Änderung der Ladung in  $\Omega$  im Zeitintervall  $(t_1, t_2)$  ist gegeben durch den gesamten Ladungsfluss durch  $\partial\Omega$  im selben Zeitintervall. Den Ladungsfluss bezeichnen wir auch als **elektrische Stromdichte**  $\vec{j}$ , mit

$$[\vec{j}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{ s}} = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}.$$

Man beachte, dass  $\vec{j}$  die flächenbezogene Dichte der Stromstärke  $I$  mit  $[I] = \text{A}$  ist. Damit gilt

$$\int_{\Omega} \rho_q(\vec{x}, t_2) d\vec{x} - \int_{\Omega} \rho_q(\vec{x}, t_1) d\vec{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \vec{j} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) dt.$$

Division durch  $t_2 - t_1$  und  $t_2 \rightarrow t_1$  liefert mittels Lemma 1.1

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho_q}{\partial t} d\vec{x} = - \int_{\partial\Omega} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}).$$

Mit dem Satz von Gauss und der Beliebigkeit von  $\Omega$  folgt daraus die **Kontinuitätsgleichung**

$$(5.8) \quad \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

**5.1.2. Ohmsches Gesetz.** Wir haben gesehen, dass elektrische Felder Kräfte auf elektrisch geladene Teilchen ausüben. Falls diese Teilchen beweglich sind, sich also in einem **elektrisch leitfähigen Material** befinden, werden sie durch diese Kräfte beschleunigt; dagegen wirkt der elektrische Widerstand. Mit der **Leitfähigkeit**  $\sigma$  gilt das **Ohmsche Gesetz**

$$(5.9) \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Falls  $\sigma \equiv konst.$ , spricht man von einem **Ohmschen Material**. Es gilt  $\frac{\text{A}}{\text{m}^2} = [\sigma] \frac{\text{N}}{\text{C}}$  und somit

$$[\sigma] = \frac{\text{A C}}{\text{N m}^2} = \frac{\text{A C}}{\text{m J}} = \frac{\text{A}}{\text{V m}} = \frac{1}{\Omega \text{ m}}$$

mit der Einheit Ohm  $\Omega := \frac{\text{V}}{\text{A}}$ .

**BEMERKUNG 5.3.** Für den Fall, dass keine Ströme fließen, d.h.  $\vec{j} \equiv \vec{0}$ , ist nach dem Ohmschen Gesetz  $\vec{E} \equiv \vec{0}$  und  $V \equiv konst.$  In diesem Fall herrscht im Leiter kein elektrisches Feld und der Leiter kann als Äquipotenzialebene betrachtet werden.

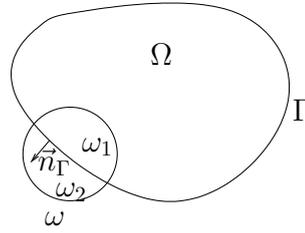


ABBILDUNG 2. Ohmsches Material in  $\Omega$  mit Rand  $\Gamma$  und lokaler Randumgebung  $\omega$ .

**5.1.3. Elektrostatik in Leitern, Oberflächenladungen.** Da wir uns im stationären Fall befinden, gilt

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} \equiv 0.$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (5.8) folgt

$$\nabla \cdot \vec{j} \equiv 0.$$

Wir nehmen an, dass ein homogenes ohmsches Material vorliegt. Dann gilt aufgrund von (5.6) und (5.9)

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho_q \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \vec{E} \equiv 0,$$

was

$$\rho_q \equiv 0$$

impliziert.

INTERPRETATION. Im stationären Fall ist die Ladungsdichte im **Inneren** eines **leitfähigen ohmschen** Mediums gleich Null. Alle Ladung sammelt sich an dessen Oberfläche  $\Gamma$ .

Diese Interpretation drängt die Frage auf, wie sich das elektrische Feld an  $\Gamma$  verhält. Da alle Ladung auf  $\Gamma$  konzentriert ist, führen wir die **Flächenladungsdichte**  $\rho_\Gamma$  ein. Sei nun  $\omega$  ein beliebiges Gebiet, für das  $\omega \cap \Gamma \neq \emptyset$  gilt. Ferner definieren wir  $\omega_1 := \omega \cap \Omega$  und  $\omega_2 := \omega \setminus \overline{\Omega}$  (siehe Abbildung 2).

Da die gesamte Ladung auf der Oberfläche  $\Gamma$  lokalisiert ist, wissen wir wegen (5.6), dass in  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gilt  $\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0$ . Daraus folgt

$$0 = \int_{\omega_1} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) d\vec{x} + \int_{\omega_2} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) d\vec{x}.$$

Man beachte, dass die rechte Seite im Allgemeinen **nicht** gleich  $\int_{\omega} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) d\vec{x}$  ist, da  $\epsilon \vec{E}$  bei  $\omega \cap \Gamma$  nicht notwendigerweise stetig oder gar differenzierbar ist. Tatsächlich ist  $\epsilon_1|_{\omega \cap \Gamma} \neq \epsilon_2|_{\omega \cap \Gamma}$ , wobei  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , den zu  $\omega_i$  gehörigen einseitigen Grenzwert von  $\epsilon$  bezeichnet. Anwendung des Satzes von Gauss liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial \omega_1} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) + \int_{\partial \omega_2} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) \\ &= \int_{\partial \omega} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) + \int_{\Gamma \cap \omega} \underbrace{(\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2) \cdot \vec{n}_\Gamma}_{=:[\epsilon \vec{E} \cdot \vec{n}_\Gamma]} dS(\vec{x}), \end{aligned}$$

wobei  $\vec{E}_i$ ,  $i = 1, 2$ , den zu  $\omega_i$  gehörigen einseitigen Grenzwert von  $\vec{E}$  und  $\vec{n}_\Gamma$  den Normalenvektor von  $\omega_1$  nach  $\omega_2$  bezeichnet.

Das Gesetz von Gauss (5.5) bezüglich  $\omega$  hat die Form

$$\int_{\partial\omega} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \int_{\Gamma \cap \omega} \rho_\Gamma dS(\vec{x}).$$

Durch Einsetzen folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$0 = \int_{\Gamma \cap \omega} \left( \rho_\Gamma + [\epsilon \vec{E} \cdot \vec{n}_\Gamma] \right) dS(\vec{x}),$$

und da  $\omega$  beliebig gewählt war,

$$[\epsilon \vec{E} \cdot \vec{n}_\Gamma] = -\rho_\Gamma.$$

Mithilfe des elektrostatischen Potentials lässt sich dies auch schreiben als

$$[\epsilon \nabla V \cdot \vec{n}_\Gamma] = \rho_\Gamma.$$

Diese beiden Beziehungen bezeichnet man als **Sprungbedingung**.

BEISPIEL 5.2 (Plattenkondensator). Wir betrachten zwei zur  $x_1, x_2$ -Ebene parallele Leiterplatten mit Abstand  $a$  (siehe Abbildung 3), wobei die Platte bei  $x_3 = 0$  das konstante Potenzial  $V_1$  und die bei  $x_3 = a$  das konstante Potenzial  $V_2$  besitzt. Ferner sei das Dielektrikum zwischen den beiden Leiterplatten homogen mit Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ . Wir sind interessiert am elektrischen Feld  $\vec{E}$ ; um die Rechnung

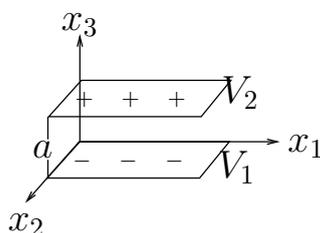


ABBILDUNG 3. Plattenkondensator mit Plattenabstand  $a$ .

zu vereinfachen, arbeiten wir stattdessen mit dem Potenzial  $V(\vec{x})$ . Aufgrund von Symmetrieüberlegungen gilt  $V(\vec{x}) = V(x_3)$  und  $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(x_3)$ . Da im Dielektrikum keine Ladungen vorliegen, gilt wegen (5.7)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0, \quad V(x_3 = 0) = V_1, \quad V(x_3 = a) = V_2.$$

Die eindeutige Lösung dieses Problems ist

$$V(x_3) = V_1 + x_3 \frac{V_2 - V_1}{a},$$

und es folgt

$$\vec{E}(x_3) = -\nabla V(x_3) \equiv \frac{V_1 - V_2}{a} \vec{e}_3.$$

Da wir uns im statischen Fall befinden, wo keine Ströme fließen, gilt in den Leiterplatten  $\vec{E} \equiv \vec{0}$ . Damit folgt aus der Sprungbedingung für die Flächenladungsdichte  $\rho_\Gamma^{(i)}$  der  $i$ -ten Platte

$$\rho_\Gamma^{(1)} = -[\epsilon \vec{E} \cdot \vec{n}] = \epsilon \vec{E} \cdot \vec{e}_3 = \frac{\epsilon}{a} (V_1 - V_2)$$

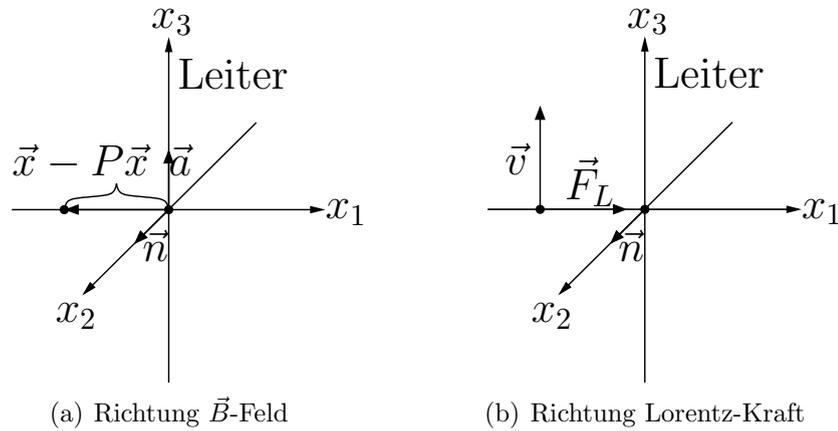


ABBILDUNG 4. Stromdurchflossener Leiter und Probeladung  $q$  an der Stelle  $\vec{x}$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$ .

und

$$\rho_{\Gamma}^{(2)} = -[\epsilon \vec{E} \cdot \vec{n}] = -\epsilon \vec{E} \cdot \vec{e}_3 = \frac{\epsilon}{a}(V_2 - V_1).$$

In der Realität haben Leiterplatten natürlich einen endlichen Flächeninhalt  $A$ . Zwischen der gesamten Ladung  $Q = A\rho_{\Gamma}$  auf einer Leiterplatte und der Potentialdifferenz  $U = V_2 - V_1$  besteht dann der Zusammenhang

$$Q = \frac{\epsilon A}{a}U.$$

Die Größe  $\frac{\epsilon A}{a} =: C$  bezeichnet man als **Kapazität** mit der Einheit  $[C] = \frac{C}{V} = F$  (Farad). Die Potentialdifferenz  $U$  bezeichnet man als (**elektrische**) **Spannung**.

## 5.2. Das magnetische Feld

Wir beschäftigen uns nun mit stationären magnetischen Feldern. Bislang haben wir die Kraft betrachtet, die ruhende elektrische Ladungen auf andere Ladungen ausüben; dieser Effekt wird vom elektrischen Feld verursacht. Es stellt sich heraus, dass **bewegte** Ladungen, etwa solche, die durch einen Leiter fließen, eine Kraft auf andere bewegte Ladungen ausüben. Diese Kraft wird durch ein zweites Vektorfeld beschrieben, das **Magnetfeld**.

**5.2.1. Die Lorentz-Kraft.** Experimentell beobachtet man, dass ein stromdurchflossener Leiter mit Richtungsvektor  $\vec{a}$  ( $|\vec{a}| = 1$ ) eine Kraft  $\vec{F}_L$  auf **bewegte** Ladungen  $q$  ausübt.  $\vec{F}_L$  bezeichnet man als **Lorentz-Kraft**. Das Feld, das diese Kraft bedingt, bezeichnet man als **Magnetfeld**. Die Kraftgröße ist dabei proportional zur **Stromstärke**  $I$ , zur **Ladung**  $q$ , zum **reziproken Abstand**  $\frac{1}{|\vec{x} - P\vec{x}|}$  ( $\vec{x}$ : Ort der Ladung  $q$ ,  $P\vec{x}$ : Projektion von  $\vec{x}$  auf  $\vec{a}$ ) und zur **Geschwindigkeit**  $|\vec{v}|$  der bewegten Ladung. Sei

$$\vec{n} := \frac{\vec{a} \times (\vec{x} - P\vec{x})}{|\vec{a} \times (\vec{x} - P\vec{x})|}$$

der Normalenvektor der von  $\vec{a}$  und  $\vec{x} - P\vec{x}$  aufgespannten Ebene. Die Krafrichtung ist dann senkrecht zu  $\vec{v}$  und  $\vec{n}$  (siehe Abbildung 4). Mit der Proportiona-

litätskonstante  $k$  besteht also der Zusammenhang

$$\vec{F}_L = \frac{kqI}{|\vec{x} - P\vec{x}|^2} \vec{v} \times (\vec{a} \times (\vec{x} - P\vec{x})). \quad (\text{Lorentz-Kraft})$$

Dies motiviert die Definition der **magnetischen Induktion**  $\vec{B}$  als

$$(5.10) \quad \vec{B}(\vec{x}) := \frac{kI}{|\vec{x} - P\vec{x}|^2} \vec{a} \times (\vec{x} - P\vec{x}). \quad (\vec{B}\text{-Feld})$$

Damit lässt sich die Lorentz-Kraft schreiben als

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Offensichtlich gilt  $N = C \frac{m}{s} [\vec{B}]$  und somit  $[\vec{B}] = \frac{Ns}{Cm} = \frac{Js}{Cm^2} = \frac{Vs}{m^2} =: T$  (Tesla).

Um zu einer **kontinuierlichen Formulierung** der Lorentz-Kraft zu gelangen, betrachten wir die zu  $\vec{F}_L$  und  $q\vec{v}$  gehörigen Dichten  $\vec{f}_L$  und  $\vec{j}$ , mit  $[\vec{f}_L] = \frac{N}{m^3}$  und  $[\vec{j}] = \frac{Cm}{m^3s} = \frac{C}{m^2s} = \frac{A}{m^2}$  (**elektrische Stromdichte**). Für eine Kugel  $B_r(\vec{x})$  mit  $r > 0$  ist dann die Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L(B_r(\vec{x}))$  auf die in  $B_r(\vec{x})$  enthaltenen Ladungen  $q(B_r(\vec{x}))$  gegeben durch

$$\vec{F}_L(B_r(\vec{x})) = q(B_r(\vec{x}))(\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) + \mathcal{O}(r)),$$

wobei  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  als hinreichend glatt (etwa  $C^1$ ) angenommen wurden. Division durch  $|B_r(\vec{x})|$  und  $r \rightarrow 0$  liefert nun

$$\vec{f}_L(\vec{x}) = \rho_q(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

und damit

$$\vec{f}_L = \vec{j} \times \vec{B}.$$

**BEISPIEL 5.3.** Wir betrachten zwei gerade, zur  $x_3$ -Achse parallele stromdurchflossene Leiter der Länge  $L$  mit Abstand  $a$ . Der erste Leiter schneide die  $x_1$ -Achse an der Stelle 0, der zweite an der Stelle  $a$ . Die Stromstärke sei durch  $I_1$  bzw.  $I_2$  gegeben. Das  $\vec{B}$ -Feld des ersten Leiters ist dann

$$\vec{B}_1(\vec{x}) = \frac{kI_1}{x_1^2 + x_2^2} \vec{e}_3 \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{kI_1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Insbesondere gilt damit  $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(x_1, x_2)$ , was ohnehin aus Symmetriegründen klar ist. Damit ist die Lorentz-Kraft auf den zweiten Leiter gegeben durch

$$\vec{F}_{L,2} = \int_0^L I_2 \vec{e}_3 \times \vec{B}_1(a, 0) dx_3 = LI_2 \vec{e}_3 \times \vec{B}_1(a, 0) = \frac{LI_2 I_1 k}{a^2} \vec{e}_3 \times \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{LI_2 I_1 k}{a} \vec{e}_1.$$

Wie wir sehen, ist die Lorentz-Kraft **anziehend**, wenn die Ströme dieselbe Richtung haben. Ansonsten ist sie **abstoßend**.

**BEMERKUNG 5.4.** Laut SI-Definition ist 1 Ampère gerade die Stromstärke, die im Vakuum bei unendlich langen, geraden, parallelen Leitern mit einem gegenseitigen Abstand von 1 m eine Kraft von  $2 \cdot 10^{-7}$  N pro m Leiterlänge hervorruft. Die Proportionalitätskonstante in der Lorentz-Kraft ist daher  $k = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ .

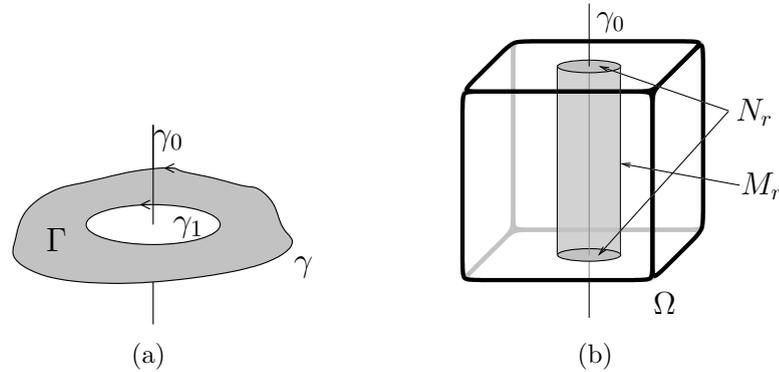


ABBILDUNG 5. Skizze zu Satz 5.5.

**5.2.2. Grundgleichungen der Magnetostatik.** Wir leiten nun zwei Gleichungen her, die das  $\vec{B}$ -Feld aus (5.10) im stationären Fall erfüllt. Konkret interessieren uns, analog zum elektrischen Feld, wieder die Divergenz und die Rotation des  $\vec{B}$ -Felds. Zur einfacheren Notation führen wir die Funktion

$$(5.11) \quad \vec{w}(\vec{x}) := \frac{1}{|\vec{x} - P\vec{x}|^2} \vec{a} \times (\vec{x} - P\vec{x})$$

mit  $|\vec{a}| = 1$  ein, sodass  $\vec{B} = kI\vec{w}$ .

**SATZ 5.5.** Sei  $\gamma_0$  eine Gerade mit Richtungsvektor  $\vec{a}$ ,  $P$  die Projektion auf  $\gamma_0$  und für  $\vec{x} \notin \gamma_0$  sei  $\vec{w}(\vec{x})$  gegeben durch (5.11). Sei

- $\gamma$  eine glatte orientierte geschlossene Kurve mit  $\gamma \cap \gamma_0 = \emptyset$ , die  $\gamma_0$  einmal in mathematisch positiver Richtung umläuft (siehe Abbildung 5(a)).
- $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand  $\partial\Omega$ . Die Schnittmenge  $\partial\Omega \cap \gamma_0$  bestehe aus isolierten Punkten, in denen die Tangentialebene von  $\partial\Omega$  nicht parallel zu  $\gamma_0$  verlaufe (siehe Abbildung 5(b)).

Dann gilt

$$(1) \quad \oint_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{x} = 2\pi,$$

$$(2) \quad \int_{\partial\Omega} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = 0.$$

**BEWEIS.** O.B.d.A. nehmen wir an, dass unser kartesisches Koordinatensystem  $\vec{e}_3 = \vec{a}$  erfüllt und der Ursprung auf  $\gamma_0$  liegt. Für  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  mit  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$  gilt

$$\vec{w}(\vec{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \vec{e}_3 \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man verifiziert durch direktes Nachrechnen, dass für  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$  gilt

$$(5.12) \quad \nabla \times \vec{w} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \vec{w} = 0.$$

(1) Sei  $\gamma_1$  ein orientierter Kreis in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene mit Radius  $r$ , der  $\gamma_0$  in positiver Richtung umläuft. Dann ist

$$\vec{x} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}(\varphi) := [r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), 0]$$

eine Parametrisierung von  $\gamma_1$ . Da  $\frac{d\vec{x}}{d\varphi} = [-r \sin(\varphi), r \cos(\varphi), 0]$ , gilt damit

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_1} \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{x_1(\varphi)^2 + x_2(\varphi)^2} \begin{bmatrix} -x_2(\varphi) \\ x_1(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

Damit ist (1) für Kreise gezeigt. Sei nun  $\Gamma$  eine Fläche mit Rand  $\gamma \cup \gamma_1$ . Dann gilt wegen (5.12) und des Satzes von Stokes

$$\vec{0} = \int_{\Gamma} \nabla \times \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \oint_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{x} - \underbrace{\oint_{\gamma_1} \vec{w} \cdot d\vec{x}}_{=2\pi} \Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{x} = 2\pi.$$

(2) Falls  $\gamma_0$  das Gebiet  $\Omega$  nicht schneidet, dann folgt die gewünschte Aussage sofort mit dem Satz von Gauss aus (5.12). Sei ansonsten  $N_r := \{\vec{x} \in \partial\Omega \mid \text{dist}(\vec{x}, \gamma_0) \leq r\}$ . Offensichtlich gilt dann

$$\int_{\partial\Omega} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \int_{N_r} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) + \int_{\partial\Omega \setminus N_r} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}).$$

Sei nun  $\Omega_r := \{\vec{x} \in \Omega \mid \text{dist}(\vec{x}, \gamma_0) > r\}$  und  $M_r := \{\vec{x} \in \partial\Omega_r \mid \text{dist}(\vec{x}, \gamma_0) = r\}$  die Mantelfläche des aus  $\Omega_r$  herausgeschnittenen Zylinders. Mit diesen Definitionen gilt  $\partial\Omega_r = (\partial\Omega \setminus N_r) \cup M_r$ . Aufgrund von (5.12) und des Satzes von Gauss wissen wir dann, dass

$$0 = \int_{\Omega_r} \nabla \cdot \vec{w} d\vec{x} = \int_{\partial\Omega_r} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \int_{\partial\Omega \setminus N_r} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) + \int_{M_r} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}).$$

Auf  $M_r$  ist  $\vec{n}(\vec{x})$  parallel zu  $\vec{x} - P\vec{x}$  und daher  $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ . Das letzte Integral verschwindet somit. Es folgt, dass

$$\int_{\partial\Omega \setminus N_r} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = 0$$

für alle  $r > 0$  und es bleibt zu zeigen, dass  $\int_{N_r} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$ . Für  $0 < t \leq r$  sei  $n_t := \{\vec{x} \in N_r \mid \text{dist}(\vec{x}, \gamma_0) = t\}$ . Da die Tangentialebenen von  $\partial\Omega$  in  $\partial\Omega \cap \gamma_0$  nicht parallel zu  $\gamma_0$  verlaufen und es nur endlich viele Schnittpunkte gibt, gilt  $|n_t| = \mathcal{O}(t)$ . Damit folgt

$$\left| \int_{N_r} \vec{w} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) \right| \leq \int_0^r \int_{n_t} \underbrace{|\vec{w}|}_{=\frac{1}{t}} \underbrace{|\vec{n}|}_{=1} ds dt \leq C \int_0^r dt = Cr \rightarrow 0 \text{ mit } r \rightarrow 0. \quad \square$$

Multiplikation von (1) und (2) aus Satz 5.5 mit  $kI$  liefert

$$(5.13) \quad \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu I \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = 0,$$

wobei  $\mu := 2\pi k$  die **magnetische Permeabilität** bezeichnet. Im Vakuum gilt  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ . Unter Verwendung der kontinuierlichen Stromdichte  $\vec{j}$  legt dies (analog zum stetigen Fall des Gesetzes von Gauss, Satz 5.1) den Zusammenhang

$$(5.14) \quad \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{x} = \int_{\Gamma} \mu \vec{j} \cdot \vec{n} dS(\vec{x})$$

nahe, wobei  $\Gamma$  eine beliebige Fläche mit Rand  $\gamma$  ist und der Normalenvektor  $\vec{n}$  so orientiert ist, dass  $\gamma$  ihn im positiven Sinn umkreist. Um zu zeigen, dass die rechte Seite für verschiedene Flächen mit Rand  $\gamma$  gleich ist, betrachten wir  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  mit Rand  $\gamma$ . Sei  $\Omega$  das von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  eingeschlossene Volumen. Im stationären Fall haben wir aufgrund der Kontinuitätsgleichung (5.8)  $\nabla \cdot \vec{j} \equiv 0$ . Somit gilt

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{j} d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{j} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \int_{\Gamma_1} \vec{j} \cdot \vec{n}_1 dS(\vec{x}) - \int_{\Gamma_2} \vec{j} \cdot \vec{n}_2 dS(\vec{x}),$$

was die gewünschte Aussage war.

Mittels des Satzes von Stokes folgt aus (5.14)

$$\int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = \int_{\Gamma} \mu \vec{j} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}).$$

Da  $\gamma$  mit entsprechendem  $\Gamma$  beliebig gewählt war, folgt

$$(5.15) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (\text{Ampèresches Gesetz}).$$

Aufgrund der zweiten Gleichung in (5.13) folgt mittels des Satzes von Gauss und der Beliebigkeit von  $\Omega$

$$(5.16) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

wobei  $\vec{B}$  als hinreichend glatt angenommen wurde. (5.15) und (5.16) bezeichnet man auch als **Grundgleichungen der Magnetostatik**.

### 5.3. Die Maxwell-Gleichungen

Wir fassen nun die Ergebnisse der beiden vorherigen Abschnitte zusammen. Aus (5.4), (5.16), (5.6) und (5.15) erhalten wir

$$(5.17) \quad \left( \begin{array}{c} \text{Stationäre} \\ \text{Maxwell-Gleichungen} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_q, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{E} = \vec{0}, \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}. \end{array} \right.$$

Dies sind die **stationären Maxwell-Gleichungen**, d.h.  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  sind zeitlich konstant. Experimentell beobachtet man im instationären Fall die folgenden zwei Phänomene:

- (1) Zeitlich veränderliche  $\vec{B}$ -Felder erzeugen  $\vec{E}$ -Felder.
- (2) Zeitlich veränderliche  $\vec{E}$ -Felder erzeugen  $\vec{B}$ -Felder.

**5.3.1. Zeitlich veränderliche  $\vec{B}$ -Felder.** Sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve und  $\Gamma$  eine Fläche mit Rand  $\gamma$ . Der **magnetische Fluss** durch  $\Gamma$  ist definiert als  $\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS(\vec{x})$ .

Experimentell findet man, dass der Strom entlang  $\gamma$  proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses ist, also

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) \sim \oint_{\gamma} \vec{j} \cdot d\vec{x}.$$

Seien  $\gamma$  und  $\Gamma$  mit Rand  $\gamma$  beliebig, aber zeitlich konstant. Aus dem Ohmschen Gesetz wissen wir, dass  $\vec{j}$  proportional zu  $\vec{E}$  ist. Mit einer Proportionalitätskonstante  $k$  gilt also

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = k \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{x}.$$

Der Satz von Stokes impliziert nun

$$\int_{\Gamma} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{n} dS(\vec{x}) = k \int_{\Gamma} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS(\vec{x}),$$

wobei wir verwendet haben, dass  $\Gamma$  zeitlich konstant ist. Da  $\Gamma$  beliebig ist, gilt

$$\frac{d\vec{B}}{dt} - k \nabla \times \vec{E} = \vec{0}.$$

Im SI-Einheitensystem ist die Proportionalitätskonstante gerade  $-1$ . Damit gilt also

$$(5.18) \quad \frac{d\vec{B}}{dt} + \nabla \times \vec{E} = \vec{0},$$

was man als **Faradaysches Induktionsgesetz** bezeichnet.

**BEMERKUNG 5.6.** Im elektrostatischen Fall haben wir hergeleitet, dass  $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ . Wie wir nun sehen, ist das im zeitabhängigen Fall nicht mehr gültig; stattdessen ist die Rotation des elektrischen Felds gegeben durch die zeitliche Änderung des magnetischen Felds.

**5.3.2. Zeitlich veränderliche  $\vec{E}$ -Felder.** Aufgrund von (5.6) und der Kontinuitätsgleichung (5.8) wissen wir, dass

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_q \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Ableiten der ersten Gleichung nach  $t$  liefert  $\nabla \cdot (\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = \frac{\partial \rho_q}{\partial t}$ . Einsetzen dieses Ausdrucks in die zweite Gleichung ergibt

$$\nabla \cdot \left( \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right) = 0.$$

Damit folgt aus einem bekannten Satz der Vektoranalysis (siehe z.B. [Jän02, Kapitel 29]), dass ein Vektorpotenzial  $\vec{\phi}$  zu  $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$  existiert, also

$$\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} = \nabla \times \vec{\phi}.$$

Da im stationären Fall  $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j}$  gilt, **postulierte** Maxwell, dass  $\vec{\phi} = \mu^{-1} \vec{B}$ . Damit gilt

$$(5.19) \quad \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \nabla \times \vec{B} + \mu \vec{j} = \vec{0},$$

was man als **Ampère-Maxwellsches Gesetz** bezeichnet.

**5.3.3. Instationäre Maxwell-Gleichungen.** Zusammenfassend erhalten wir mit (5.6), (5.16), (5.18) und (5.19),

$$(5.20) \quad \left( \begin{array}{c} \text{Instationäre} \\ \text{Maxwell-Gleichungen} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_q, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \\ \nabla \times \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j}. \end{array} \right.$$

Ein sehr wichtiges Teilgebiet des Elektromagnetismus sind **elektromagnetische Wellen**, deren Existenz aus den Maxwell-Gleichungen hergeleitet werden kann. Anwendungen elektromagnetischer Wellen sind z.B. Funk, Radio, Fernsehen, Radar, Röntgen, Licht, ...

Wir betrachten die instationären Maxwell-Gleichungen für den Fall  $\vec{j} \equiv \vec{0}$  und  $\rho_q \equiv 0$ . Anwendung von  $\frac{\partial}{\partial t}$  bzw.  $\nabla \times$  auf die vierte bzw. dritte Maxwell-Gleichung liefert

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \vec{0}.$$

Durch Summieren ergibt dies

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \vec{0}.$$

Da  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \nabla \cdot \vec{E} - \Delta \vec{E}$  und da wegen der ersten Maxwell-Gleichung  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  gilt, folgt

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0}.$$

Diese partielle Differentialgleichung bezeichnet man auch als **Wellengleichung**. Mit  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$  folgt

$$(5.21) \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = \vec{0}.$$

Analog erhält man durch Anwendung von  $\frac{\partial}{\partial t}$  bzw.  $\nabla \times$  auf die dritte bzw. vierte Maxwell-Gleichung die Wellengleichung für das  $\vec{B}$ -Feld,

$$(5.22) \quad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{B} = \vec{0}.$$

Wir setzen nun

$$(5.23) \quad \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - t).$$

Da, wie man leicht berechnet,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x_i^2} = -\vec{E}_0 k_i^2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - t),$$

ist (5.23) eine Lösung von (5.21), wobei  $\vec{E}_0 = \text{const.}$  die **Amplitude** und  $\vec{k}$  der **Wellenvektor** mit  $|\vec{k}| = c^{-1}$  ist. Die Richtung von  $\vec{k}$  gibt die Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  an, und der Betrag  $|\vec{k}|$  die inverse Geschwindigkeit. Damit ist  $c$  die **Lichtgeschwindigkeit**. Tatsächlich gilt mit den früher genannten Werten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  im Vakuum

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,0 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Abschließend betrachten wir nun noch, wie die Richtungen der Vektoren  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{k}$  und  $\vec{B}$  zueinander stehen. Da  $\nabla \cdot \vec{E} \equiv 0$ , gilt für die ebene Welle (5.23)

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - t)) \\ &= \vec{E}_0 \cdot \nabla \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - t) \\ &= \vec{E}_0 \cdot \vec{k} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - t). \end{aligned}$$

Daher ist  $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$ , das heißt, die Amplitude des  $\vec{E}$ -Feldes ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (**transversale Welle**). Im Gegensatz dazu stehen **longitudinale Wellen**, deren Amplitude in Richtung der Ausbreitungsrichtung liegt; dies ist etwa bei Schallwellen der Fall. Einsetzen von (5.23) in die dritte Maxwell-Gleichung liefert

$$0 = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{k} \times \vec{E}_0) \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - t).$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist durch

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = (\vec{k} \times \vec{E}_0) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - t)$$

gegeben. Somit hat das  $\vec{B}$ -Feld eine Wellenform ganz ähnlich zum  $\vec{E}$ -Feld (5.23) mit gleichem Wellenvektor  $\vec{k}$  und gleicher Phase, jedoch mit einer Amplitude  $\vec{k} \times \vec{E}_0$ , die senkrecht sowohl zur Ausbreitungsrichtung als auch zum elektrischen Feld steht.

## ANHANG A

### Rechenregeln

Im Folgenden ist  $\vec{A}$  ein Matrixfeld,  $\vec{u}, \vec{v}$  sind Vektorfelder, und  $\rho$  ist ein skalares Feld. Alle diese Funktionen hängen von der Ortsvariablen  $\vec{x}$  ab, auf die sich alle Differentialoperatoren beziehen.

$$(A.1) \quad \nabla |\vec{x}|^2 = 2\vec{x}$$

$$(A.2) \quad \nabla \frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{-\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \text{für } \vec{x} \neq 0$$

$$(A.3) \quad \nabla |\vec{v}|^2 = 2(\nabla \vec{v}^T) \vec{v}$$

Alle folgenden Produktregeln lassen sich aus der skalaren Produktregel durch komponentenweise Betrachtung herleiten.

$$(A.4) \quad \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \nabla \rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v}$$

$$(A.5) \quad \nabla \cdot (\vec{u} \vec{v}^T) = (\nabla \vec{u}) \vec{v} + \vec{u} (\nabla \cdot \vec{v})$$

$$(A.6) \quad \nabla \cdot (\vec{A} \vec{u}) = (\nabla \cdot \vec{A}) \cdot \vec{u} - \vec{A} : \nabla \vec{u}$$



## Literaturverzeichnis

- [BS08] Brenner, S. und R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Band 15 der Reihe *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third Auflage, 2008.
- [Dem08] Demtröder, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2008.
- [EGK11] Eck, C., H. Garcke und P. Knabner: *Mathematische Modellierung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2011.
- [Jän02] Jänich, K.: *Mathematik 2*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2002.



## Index

- $\rho$ , 2
- $q$ , 2
- Ampère-Maxwellsches Gesetz, 59
- Coulombsches Gesetz, 47
- DES, *siehe* Drehimpulserhaltungssatz
- Dichte, 2
- Dielektrizitätskonstante, 47
- Drehimpulserhaltungssatz, 5
- ebener Spannungszustand, 30
- ebener Verzerrungszustand, 30
- EES, *siehe* Energieerhaltungssatz
- Elastizitätstensor, 24
- elektrische Spannung, 53
- elektrisches Feld, 47
- elektromagnetische Wellen, 59
- Energieerhaltungssatz, 4, 36
- Entdimensionalisierung, 6, 40
- Erhaltungssatz, 3
- Euler-Gleichungen, 41
- Eulersche Koordinaten, 33
- Faradaysches Induktionsgesetz, 58
- Fluss, 2
- Fouriersches Wärmeleitgesetz, 9
- Greenscher Verzerrungstensor, 18
- homogen, 26
- Hookesches Gesetz, 25
- hyperelastisch, 22
- ideales Gas, 6, 38
- IES, *siehe* Impulserhaltungssatz
- Impulserhaltungssatz, 5, 35
- isotrop, 9, 26
- Kapazität, 53
- Kinematik, 17
- kinematische Viskosität, 40
- Lagrangesche Koordinaten, 17, 33
- Lamé-Parameter, 26
- Lorentz-Kraft, 53
- Massenerhaltungssatz, 4, 34
- Materialgesetz, 3, 6
- Maxwell-Gleichungen
  - instationäre, 59
  - stationäre, 57
- MES, *siehe* Massenerhaltungssatz
- Modell, 3
- molare Masse, 38
- Normalspannung, 22
- Ohmsches Gesetz, 50
- Permittivität, 47
- Poissonsche Querkontraktionszahl, 27
- Reynoldszahl, 41
- Scherspannung, 22
- Scherviskosität, 38
- SI-Einheiten, 1
- Spannungstensor, 19
- spezifische Wärmekapazität, 9, 38
- Stokes-Gleichungen, 41
- universelle Gaskonstante, 38
- Volumenviskosität, 38
- Wärmeübergangszahl, 11
- Wärmeleitungstensor, 9
- Youngscher Elastizitätsmodul, 27