---

64 Betrachtet wird ein s-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren mit der Verfahrensfunktion $\underline{\phi}(t_k, \underline{u}_k, \tau_k)$ und gegebenen Koeffizienten $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. Unter der Voraussetzung dass $\underline{f}(t, \underline{u})$ eine Lipschitzbedingung im zweiten Argument erfüllt

$$\|f(t,\underline{u}) - f(t,\underline{v})\| \le L\|\underline{u} - \underline{v}\| \qquad \forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n,$$

zeige man die Lipschitzstetigkeit der Verfahrensfunktion $\underline{\phi}(t_k, \underline{u}_k, \tau_k)$ bezüglich dem zweiten Argument

$$\left\|\underline{\phi}(t_k, \underline{u}, \tau_k) - \underline{\phi}(t_k, \underline{v}, \tau_k)\right\| \le L \sum_{i=1}^{s} |b_i| \, (1+\eta)^{i-1} \, \|\underline{u} - \underline{v}\|, \quad \eta := \tau L \max_{k=2,\ldots,s} \sum_{\ell=1}^{s-1} |a_{k\ell}| \, .$$

65 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u'(t) = 1.1\, t^{0.1}, \qquad u(0) = 0.$$

Man verwende das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung aus der Vorlesung um das Anfangswertproblem im Punkt $t = 1$ näherungsweise zu lösen. Dabei verwende man

a) eine konstante Schrittweite $\tau = \frac{1}{m}$

b) eine adaptive Schrittweite $\tau_k = \left(\frac{k+1}{m}\right)^{5/1.1} - \left(\frac{k}{m}\right)^{5/1.1}$ also $t_k = \left(\frac{k}{m}\right)^{5/1.1}$

für $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Man vergleiche die absoluten Fehler im Punkt $t = 1$.

66 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u'(x) = -42u(x), \qquad u(0) = 1.$$

Um dieses Anfangswertproblem näherungsweise zu lösen, verwende man das explizite bzw. das implizite Eulerverfahren mit einer gleichmäßigen Schrittweite $\tau = \frac{1}{20}$. Man vergleiche die zwei Verfahren mit der exakten Lösung und stelle die berechneten Lösungen im Intervall $[0, 1]$ graphisch dar.

67 Gegeben ist das Einschrittverfahren

$$u_{k+1} = u_k + \tau\left[(1-\theta) f(t_k, u_k) + \theta f(t_{k+1}, u_{k+1})\right] \qquad \text{für } \theta \in [0, 1].$$

Man zeige, dass das Verfahren A-stabil ist genau dann wenn $\theta \ge \frac{1}{2}$ gilt.

Programmierteil.

---

68 Betrachtet werde die parabolische partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0 && \text{für } (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= 0, && \text{für } t \in (0,T), \\ u(x,0) &= \sin(\pi x) && \text{für } x \in (0,1). \end{aligned}$$

Semi-Diskretisierung im Ort führt auf das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} M_h \underline{u}_h'(t) + K_h \underline{u}_h(t) &= \underline{0} \quad \text{für } t \in (0,T), \\ M_h \underline{u}_h(0) &= \underline{g}_h, \end{aligned} \tag{13.1}$$

mit geeignetem $\underline{g}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$. Für $T = 2$ approximiere man die Differentialgleichung (13.1) mit dem expliziten Eulerverfahren. Man wähle eine geeignete gleichmäßige Maschenweite h und eine gleichmäßige Zeitschrittweite τ. Die auftretenden linearen Gleichungssysteme sollen dabei mit einem vernünftigen Lösungsverfahren gelöst werden. Weiters stelle man die approximierten Lösungen grafisch dar (Animation).