---

61 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u'(t) = e^{-t}, \qquad u(0) = 0.$$

Man verwende

a) das explizite Eulerverfahren

b) das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung aus der Vorlesung

um das Anfangswertproblem im Punkt $t = 1$ näherungsweise zu lösen. Dabei verwende man die gleichmäßigen Zeitschrittweiten $\tau = \frac{1}{m}$ für $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Weiters vergleiche und begründe man die Ergebnisse.

62 Man berechne für das Anfangswertproblem

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

Näherungen für $u(1)$ und $u'(1)$. Dazu schreibe man das Anfangswertproblem zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung um und wende darauf das explizite Eulerverfahren mit den gleichmäßigen Zeitschrittweiten $\tau = \frac{1}{m}$ für $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ an.

63 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u'(t) = -2t, \quad u(0) = u_0.$$

Man zeige, dass das folgende Runge-Kutta Verfahren, das durch die Iterationsvorschrift

$$u_{k+1} = u_k + \frac{\tau}{4}\left[3f(t_k, u_k) + f(t_k + 2\tau, u_k + 2\tau f(t_k, u_k))\right]$$

gegeben ist, die exakte Lösung des Anfangswertproblems für $t \geq 0$ liefert.