

Für die folgenden Aufgaben seien zwei separable Hilberträume V und H gegeben, mit den Eigenschaften:

- $V \subset H$ liegt dicht in H .
- Es existiert eine Konstante $c > 0$, mit

$$\|v\|_H \leq c\|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V.$$

Wir betrachten dann das Variationsproblem: Gesucht ist $u \in H^1((0, T), V; H)$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v)_H + a(u(t), v) &= \langle F(t), v \rangle & \forall v \in V \quad \forall t \in (0, T) \text{ fast überall,} \\ u(0) &= u_0 & \text{in } H \end{aligned} \quad (12.1)$$

erfüllt ist.

- 55** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $u \in H^1((0, T), V; H)$ eine Lösung von (12.1) ist, genau dann wenn $u_\lambda \in H^1((0, T), V; H)$ Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_\lambda(t), v)_H + a_\lambda(u_\lambda(t), v) &= \langle F_\lambda(t), v \rangle & \forall v \in V \quad \forall t \in (0, T) \text{ fast überall,} \\ u_\lambda(0) &= u_0 & \text{in } H \end{aligned} \quad (12.2)$$

ist, mit

$$u_\lambda(t) = e^{-\lambda t}u(t), \quad a_\lambda(u, v) = a(u, v) + \lambda(u, v)_H, \quad F_\lambda = e^{-\lambda t}F(t).$$

- 56** Sei $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine V -beschränkte Bilinearform. Man zeige, falls eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Gårding-Ungleichung

$$a(v, v) + \lambda\|v\|_H^2 \geq c_1^a\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

erfüllt ist, dann ist das Problem (12.1) eindeutig lösbar für jedes $F \in L^2((0, T), V^*)$ und $u_0 \in H$.

- 57** Man zeige, es existiert eine Konstante $c_{tr} > 0$, sodass die Ungleichung

$$\max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_H \leq c_{tr}\|v\|_{H^1((0, T), V; H)}$$

für alle $v \in C^1([0, T], V)$ erfüllt ist.

- 58** Sei $V_h \subset V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$ der Raum der stetigen und stückweise linearen Funktionen bezüglich einer gleichmäßigen Zerlegung des Intervalls $(0, 1)$ mit der Maschenweite $h > 0$. Für die nodalen Basisfunktionen $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_h}$ seien weiters die Massematrix und die Steifigkeitsmatrix gegeben durch

$$M_h := \left[\int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx \right]_{i,j=1}^{n_h} \quad \text{und} \quad K_h := \left[\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx \right]_{i,j=1}^{n_h}.$$

Für die Matrix $M_h^{-1}K_h$ gebe man eine Abschätzung in der Operatornorm

$$\|M_h^{-1}K_h\|_{M_h} := \sup_{\underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_h}} \frac{(M_h^{-1}K_h \underline{v}_h, \underline{v}_h)_{M_h}}{(\underline{v}_h, \underline{v}_h)_{M_h}}, \quad (\underline{v}_h, \underline{v}_h)_{M_h} := (M_h \underline{v}_h, \underline{v}_h)_{\ell_2} \quad \forall \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$$

an.

Programmierteil.

- 59 Man implementiere eine Routine, die die Anwendung des MDS-Vorkonditionierers von Aufgabe 52 realisiert. Dazu stelle man für eine gegebene Hierarchie die Steifigkeitsmatrizen auf und berechne die Inverse der Diagonalmatrizen. Weiters wird die Realisierung der Transferoperatoren $I_\ell^{\ell+1}$ bzw. $I_{\ell+1}^\ell$ benötigt, siehe dazu Aufgabe 50 und Aufgabe 51.
- 60 Man verwende das vorkonditionierte CG-Verfahren um die linearen Gleichungssysteme von Aufgabe 46 näherungsweise zu lösen. Dazu verwende man den Vorkonditionierer von Aufgabe 59. Weiters stelle man die Anzahl der benötigten CG-Iterationen bezüglich der Dimension n_h grafisch dar.