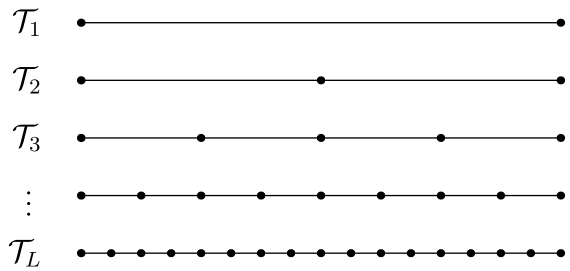
Numerik Partieller Differentialgleichungen WS 2017 / 18
11. Übung Montag, 8. Jänner 2018, 10.15–11.45, S2 054

In den nächsten drei Aufgabe wird der MDS-Vorkonditionierer für das Modellproblem 1D betrachtet. Dazu seien geschachtelte Zerlegungen $\{\mathcal{T}_\ell\}_{\ell=1}^L$ des Intervalls $(0,1)$ gegeben, siehe dazu auch die Abbildung:



Für jede dieser Zerlegungen $\mathcal{T}_\ell$, $\ell = 1, \ldots, L$ betrachten wir die Ansatzräume

$$V_\ell = \{v_\ell \in \mathcal{C}[0,1] : v_{\ell|\tau} \in \mathbb{P}_1(\tau) \text{ für alle } \tau \in \mathcal{T}_\ell \text{ und } v_\ell(0) = 0\}$$

mit den jeweiligen nodalen Basisfunktionen $\{\varphi_{\ell,i}\}_{i=1}^{n_\ell}$, $n_\ell = 2^{\ell-1}$.

$\boxed{50}$ Man betrachte zwei aufeinanderfolgende Zerlegungen $\mathcal{T}_\ell$ und $\mathcal{T}_{\ell+1}$ mit den zugehörigen Ansatzräumen $V_\ell \subset V_{\ell+1}$. Man bestimme die lineare Abbildung $I_\ell^{\ell+1} \in \mathbb{R}^{n_{\ell+1} \times n_\ell}$ mit der man grobe Basisfunktionen $\varphi_{\ell,i}$, $i = 1, \ldots, n_\ell$ durch feine Basisfunktionen $\varphi_{\ell+1,j}$, $j = 1, \ldots, n_{\ell+1}$ darstellen kann, das heißt

$$\varphi_{\ell,i} = \sum_{j=1}^{n_{l+1}} I_\ell^{\ell+1}[j,i]\varphi_{\ell+1,j} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n_\ell.$$

Sei nun $v_\ell \in V_\ell \subset V_{\ell+1}$ mit dem Koeffizientenvektor $\underline{v}_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell}$ bezüglich der Basis $\{\varphi_{\ell,i}\}_{i=1}^{n_\ell}$. Man zeige weiters, dass der Koeffizientenvektor von $v_\ell \in V_{\ell+1}$ bezüglich der Basis $\{\varphi_{\ell+1,i}\}_{i=1}^{n_{\ell+1}}$ gegeben ist durch

$$\underline{v}_{\ell+1} = I_\ell^{\ell+1}\underline{v}_\ell \in \mathbb{R}^{n_{\ell+1}}.$$

$\boxed{51}$ Für $R_L \in V^*$ werden die Vektoren $\underline{r}_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell}$, $\ell = 1, \ldots, L$ definiert als

$$(\underline{r}_\ell, \underline{v}_\ell)_{\ell^2} = \langle R_L, v_\ell \rangle \qquad \text{für alle } v_\ell \in V_\ell$$

mit $v_\ell = \sum_{i=1}^{n_\ell} v_{\ell,i}\varphi_{\ell,i}$ und $\underline{v}_\ell = [v_{\ell,i}]_{i=1}^{n_\ell}$. Für $\ell \in \mathbb{N}, \ell < L$ zeige man dann den Zusammenhang

$$\underline{r}_\ell = I_{\ell+1}^\ell \underline{r}_{\ell+1} \qquad \text{mit } I_{\ell+1}^\ell := (I_\ell^{\ell+1})^\top.$$

$\boxed{52}$ Sei $a : V \times V \to \mathbb{R}$ die Bilineaform vom Modellproblem 1D. Für einen Vektor $\underline{r}_L \in \mathbb{R}^{n_L}$ ist der MDS-Vorkonditionierer $C_L^{-1} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$ gegeben durch

$$C_L^{-1}\underline{r}_L = \underline{w}_L,$$

wobei $\underline{w}_L \in \mathbb{R}^{n_L}$ der Koeffizientenvektor der Funktion

$$w_L = \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_h} w_{\ell,i}\varphi_{\ell,i} \in V_L$$

bezüglich der Basis $\{\varphi_{L,i}\}_{i=1}^{n_L}$ ist. Dabei sind die Koeffizienten $w_{\ell,i}$ gegeben über die Unterraum-Korrektur-Gleichungen

$$a(\varphi_{\ell,i}, \varphi_{\ell,i}) w_{\ell,i} = \langle R, \varphi_{\ell,i} \rangle \qquad \text{für } i = 1, \dots, n_\ell \text{ und } \ell = 1, \dots, L.$$

Man schreibe den Vorkonditionierer C_L^{-1} in Abhängigkeit von $I_\ell^{\ell+1}$ bzw. $I_{\ell+1}^{\ell}$ (siehe Aufgabe 50 und Aufgabe 51) und den Diagonalmatrizen $D_\ell = \mathrm{diag}(K_\ell)$, wobei $K_\ell \in \mathbb{R}^{n_\ell \times n_\ell}$ die Steifigkeitsmatrix bezüglich dem Level ℓ ist.

Programmierteil.

$\boxed{53}$ Man implementiere eine Routine, die es ermöglicht berechnete Lösungen grafisch darzustellen. Zum Beispiel kann man die Lösungen in eine Datei schreiben, die dann von einem anderen Programm eingelesen werden kann.

Eine Möglichkeit bietet das Programm "ParaView" (`http://www.paraview.org/`). Als Dateiformat empfiehlt es sich das "vtk"-Format zu verwenden, siehe `http://www.vtk.org/VTK/img/file-formats.pdf`. In diesem Format können eindimensionale Element als `VTK_LINIE` oder als `VTK_POLY_LINE` dargestellt werden.

$\boxed{54}$ Man implementiere eine Routine, die das vorkonditionierte CG-Verfahren realisiert. Man führe geeignete Tests durch. Dabei wähle man als Vorkonditionierer zum Beispiel die Identität oder andere geeignete Matrizen.