---

41 Gegeben sei ein Lipschitz-Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^d$ mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Für das d-dimensionale Modellproblem: Gesucht ist $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) + \underline{b} \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) &= f(x) \qquad && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ (A(x)\nabla u(x)) \cdot \underline{n}(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

leite man eine Variationsformulierung her. Dabei sind f, g_D und g_N skalare Funktionen und $A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\underline{b} : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ genügend reguläre Koeffizienten.

42 Gegeben sei das d-dimensionale Modellproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\nabla u(x)) &= f(x) \qquad && \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) &= g_D(x) && \text{für } x \in \Gamma_D, \\ \nabla u(x) \cdot \underline{n}(x) &= g_N(x) && \text{für } x \in \Gamma_N \end{aligned}$$

mit $|\Gamma_D| > 0$. Für die zugehörige Variationsformulierung zeige man für $f \in L^2(\Omega)$, $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ und $g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ die $H^1(\Omega)$-Beschränktheit und V_0-Elliptizität der Bilinearform $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Weiters zeige man, dass das zugehörige linear Funktional $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

43 Betrachtet werde die Funktion

$$u(x, y) = \sqrt[4]{-\log(\sqrt{x^2 + y^2})}$$

auf dem zweidimensionalen Gebiet

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 0.5\}.$$

Man zeige, dass diese Funktion im Raum $H^1(\Omega)$ liegt, also $u \in H^1(\Omega)$. Ist die Funktion u stetig?

Hinweis: Man transformiere die auftretenden Integrale mit Hilfe der Polarkoordinaten und berechne die jeweiligen Normen.

44 Betrachtet werde das zweidimensionale Referenzelement

$$\hat{T} := \{\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : \xi^{(1)} > 0, \xi^{(2)} > 0 \text{ und } 1 - \xi^{(1)} - \xi^{(2)} > 0\}.$$

Für die Knoten $\xi_1 := (0, 0)$, $\xi_2 := (1, 0)$ und $\xi_3 := (0, 1)$ bestimme man die linearen Formfunktionen $\hat{\varphi}_i : \hat{T} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ mit der Eigenschaft, dass

$$\hat{\varphi}_i(\xi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \text{für alle } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Weiters berechne man für diese Formfunktionen die lokale Steifigkeitsmatrix

$$\hat{K} := [K_{ij}]_{i,j=1}^3, \qquad \text{mit } K_{ij} = \int_{\hat{T}} \nabla\hat{\varphi}_j \cdot \nabla\hat{\varphi}_i \mathrm{d}x \qquad \text{für } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$