---

36 Gegeben sei das Variationsproblem: Gesucht ist $u \in V_0 := \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$, sodass

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle \qquad \text{für alle } v \in V_0.$$

Dabei ist die Bilinearform gegeben durch

$$a(u,v) := \int_0^1 \left[a_0 u'(x)v'(x) + b_0 u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\right] \mathrm{d}x$$

wobei $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ und $c : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$a_0 > 0, \quad b_0 \geq 0, \quad c(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in (0,1) \quad \text{und} \quad c \in L^\infty(0,1).$$

Die Linearform ist gegeben durch

$$\langle F, v\rangle := \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

mit $f \in L^2(0,1)$. Man zeige, dass die Lösung des Variationsproblems im Sobolev-Raum $H^2(0,1)$ liegt.

37 Gegeben sei der Raum V_0 und die Bilinearform $a : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 36. Für $g \in L^2(0,1)$ wird das duale Problem betrachtet:

$$\text{Gesucht ist } z \in V_0 : \qquad a^*(z,v) = (g,v)_{L^2(0,1)} \qquad \text{für alle } v \in V_0,$$

mit der dualen Bilinearform

$$a^*(u,v) = a(v,u) \qquad \text{für alle } u, v \in V_0.$$

Man zeige, dass die Lösung $z \in V_0$ des dualen Problems in $H^2(0,1)$ liegt. Weiters zeige man, dass die Abschätzung

$$|z|_{H^2(0,1)} \leq c_S \|g\|_{L^2(0,1)} \qquad \text{mit } c_S > 0$$

erfüllt ist.

38 Für $V_g = V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ seien für $a : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ die Voraussetzungen vom Satz von Lax-Milgram erfüllt. Weiters sei $F \in V_0^*$ und V_h sei der Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen mit dem diskreten Teilraum $V_{0,h} = V_0 \cap V_h$. Weiters sei $u \in V_0$ die Lösung des Variationsproblems:

$$\text{Gesucht ist } u \in V_0 : \qquad a(u,v) = F(v) \qquad \text{für alle } v \in V_0.$$

Für eine Folge von Zerlegungen $\{\mathcal{T}_h\}$ mit $h \to 0$ zeige man für die entsprechenden Näherungslösungen $u_h \in V_{0,h}$, dass gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \to 0 \qquad \text{für } h \to 0,$$

auch wenn $u \notin H^2(0,1)$.

Hinweis: Man verwende die Tatsache, dass der Raum $H^2(0,1)$ dicht in $H^1(0,1)$ liegt und benütze weiters das Lemma von Céa.

Programmierteil.

39 Gegeben sei das Modellproblem

$$-u''(x) = \pi^2 \sin(\pi x) \quad \text{für } x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Man bestimme die exakte Lösung für dieses Modelproblem und zeige $u \in H^1(0,1)$. Man schreibe eine Routine, welches dieses Modellproblem näherungsweise für eine gleichmäßige Zerlegung mit 2^n, $n = 1, \ldots, 10, \ldots$ Elementen löst. Für diese Näherungslösungen bestimme man den $L^2(0,1)$-Fehler, indem man die Routine von Aufgabe 35 verwendet. Man stelle den Fehler bezüglich der Maschenweite h grafisch dar und vergleiche diese Resultate mit den theoretischen Aussagen aus der Vorlesung.

40 Für die Klasse `SMatrix` implementiere man die Matrix-Vektor-Multiplikation. Dazu soll der Operator `*` überladen werden, d.h. man implementiere eine Methode der Bauart

```
Vector operator*(const Vector &x) const;
```

welche den Vektor der Matrix-Vektor-Multiplikation zurückgibt. Man teste diese Routine an einem geeigneten Beispiel.