Numerik Partieller Differentialgleichungen WS 2017 / 18
7. Übung Montag, 20. November 2017, 10.15–11.45, S2 054

$\boxed{30}$ Man zeige für den Interpolationsoperator $I_h : H^1(0,1) \to V_h$ die Fehlerabschätzung

$$|u - I_h(u)|^2_{H^1(0,1)} \leq \sum_{k=1}^{n_h} h_k^2 \int_{T_k} |u''(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

für alle $u \in \mathcal{C}^2[0,1]$.

Programmierteil.

$\boxed{31}$ Man schreibe eine Assemblier-Routine, die die globale Steifigkeitsmatrix

$$K_h = [K_{ij}]_{i,j=0}^{n_h} \in \mathbb{R}^{(n_h+1)\times(n_h+1)} \quad \text{mit } K_{ij} = \int_a^b \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\mathrm{d}x, \quad i,j = 0,\dots,n_h$$

für das reine Neumann-Randwertproblem und dem Rechengebiet (a,b) assembliert. Dazu berechne man für jedes Element einer gegebenen Zerlegung die lokale Steifigkeitsmatrix und assembliere diese in eine tridiagonale Matrix vom Typ `SMatrix`.

Man teste diese Routine für eine gegebene Zerlegung und gebe die berechnete Steifigkeitsmatrix in der Konsole aus.

$\boxed{32}$ Man schreibe eine Assemblier-Routine, die den globalen Lastenvektor

$$\underline{f}_h = [f_i]_{i=0}^{n_h} \in \mathbb{R}^{n_h+1} \quad \text{mit } f_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x, \quad i = 0,\dots,n_h$$

für eine gegebene Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ assembliert. Dazu berechne man für jedes Element einer gegebenen Zerlegung den approximierten lokalen Elementvektor und assembliere diesen in den globalen Lastenvektor.

Man teste diese Routine für eine gegebene Zerlegung und gebe den berechneten Lastenvektor in der Konsole aus.

$\boxed{33}$ Man schreibe eine Routine, die die Steifigkeitsmatrix von Aufgabe 31 bzw. den Lastenvektor von Aufgabe 32 so modifiziert, sodass anstelle von Neuman-Randbedingungen auch Robin-Randbedingungen vorgegeben werden können, also

$$-u'(a) + \alpha_0 u(a) = g_0 \quad \text{oder} \quad u'(b) + \alpha_1 u(b) = g_1.$$

Man berechne mit dieser Routine die modifizierte Steifigkeitsmatrix bzw. den modifizierten Lastenvektor für einen geeigneten Testfall und gebe diese in der Konsole aus.

$\boxed{34}$ Man schreibe eine Routine, die die Steifigkeitsmatrix von Aufgabe 31 bzw. den Lastenvektor von Aufgabe 32 so modifiziert, sodass anstelle von Neuman-Randbedingungen auch Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben werden können, also

$$u(a) = g_0 \quad \text{oder} \quad u(b) = g_1.$$

Man berechne mit dieser Routine die modifizierte Steifigkeitsmatrix bzw. den modifizierten Lastenvektor für einen geeigneten Testfall und gebe diese in der Konsole aus.

$\boxed{35}$ Man schreibe eine Routine, die den $L^2(a,b)$-Fehler einer berechneten Näherungslösung berechnet. Dazu approximiere man das auftretende Integral mit Hilfe der Mittelpunktsregel, also

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(a,b)} = \sum_{k=1}^{n_h} \int_{T_k} |u(x) - u_h(x)|^2 \, \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n_h} h_k \, |u(x_k^*) - u_h(x_k^*)|^2 \, ,$$

wobei $x_k^* := \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ der Mittelpunkt vom Element $T_k = (x_{k-1}, x_k)$ ist.

Man teste diese Routine für eine gegebene Funktion $u \in \mathcal{C}[a,b]$ und berechne den $L^2(a,b)$-Fehler für die Interpolation $u_h = I_h(u)$ im Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen.