

- 16 Sei  $V$  ein Hilbertraum. Weiters sei  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $V$ -elliptische und  $V$ -beschränkte Bilinearform mit dem induzierten linearen Operator  $A : V \rightarrow V^*$

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Man zeige für den inversen Operator  $A^{-1} : V^* \rightarrow V$  die Beschränktheitsabschätzung

$$\langle G, A^{-1}F \rangle \leq \frac{c_2^a}{(c_1^a)^2} \|F\|_{V^*} \|G\|_{V^*} \quad \text{für alle } F, G \in V^*$$

und die Elliptizitätsabschätzung

$$\langle F, A^{-1}F \rangle \geq \frac{c_1^a}{(c_2^a)^2} \|F\|_{V^*}^2 \quad \text{für alle } F \in V^*.$$

- 17 Seien  $V$  und  $Q$  Hilberträume. Weiters sei  $A : V \rightarrow V^*$  ein linearer,  $V$ -elliptischer und  $V$ -beschränkter Operator, also

$$\langle Au, v \rangle \leq c_2^a \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{und} \quad \langle Au, u \rangle \geq c_1^a \|u\|_V^2 \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Weiters sei  $B : V \rightarrow Q^*$  ein linearer und beschränkter Operator mit der Eigenschaft, dass

$$\sup_{0 \neq v \in V} \frac{\langle Bv, q \rangle}{\|v\|_V} \geq c_S \|q\|_Q \quad \text{für alle } q \in Q.$$

Für den linearen Operator  $S := BA^{-1}B^* : Q \rightarrow Q^*$ , mit dem adjungierten Operator  $B^* : Q \rightarrow V^*$

$$\langle B^*q, v \rangle = \langle Bv, q \rangle \quad \text{für alle } q \in Q, \text{ und alle } v \in V,$$

zeige man die  $Q$ -Elliptizität

$$\langle Sq, q \rangle \geq \frac{c_1^a (c_S)^2}{(c_2^a)^2} \|q\|_Q^2 \quad \text{für alle } q \in Q$$

und die  $Q$ -Beschränktheit

$$\langle Sp, q \rangle \leq \frac{c_2^a (c_2^b)^2}{(c_1^a)^2} \|p\|_Q \|q\|_Q \quad \text{für alle } p, q \in Q.$$

- 18 Sei  $V$  ein Hilbertraum und  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $V$ -elliptische und  $V$ -beschränkte symmetrische Bilinearform mit den speziellen Konstanten  $c_1^a = c_2^a = 1$ . Für  $F \in V^*$  betrachte man das Variationsproblem:

$$\text{Gesucht ist } u \in V : \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V$$

und die zugehörige Fixpunktiteration

$$u_{k+1} = u_k + \tau \mathcal{R}[F - Au_k] \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0, u_0 \in V \text{ und } \tau = 1.$$

- (a) Was ist der Zusammenhang zwischen der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  und dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_V$ ?
- (b) Was ist der Zusammenhang zwischen der Riesz-Abbildung  $\mathcal{R} : V^* \rightarrow V$  und dem aus der Bilinearform induzierten Operator  $A : V \rightarrow V^*$ ?
- (c) Wieviele Fixpunktiterationen werden benötigt, bis die exakte Lösung angenommen wird?

**19** Betrachtet werde das Modellproblem 1D aus der Vorlesung mit  $g_0 = 0$ : Gesucht ist  $u \in V_0 = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$ , sodass

$$\langle Au, v \rangle := \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + g_1v(1) =: \langle F, v \rangle$$

für alle  $v \in V_0$  erfüllt ist. Man gebe das zur Operatorgleichung

$$w_k = \mathcal{R}[F - Au_k] \quad \text{in } V$$

zugehörige klassische Modellproblem an. Dabei ist  $\mathcal{R} : V_0^* \rightarrow V_0$  die Riesz-Abbildung bzgl. dem Raum  $V_0$ .

**20** Als Vorbereitung für den nächsten Übungszettel suche man sich einen C/C++ Compiler und einen Editor bzw. eine geeignete Entwicklungsumgebung (Eclipse, Code::Blocks, Visual Studio, . . . ) nach eigener Wahl. Weiters erstelle man eine Konsolenanwendung, die den folgenden Text ausgibt:

“Numerik ist super!”