
In der Vorlesung wurde für die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_0^1 \left[a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\right] \mathrm{d}x \tag{3.1}$$

die Elliptizität auf dem Raum $V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ für den Spezialfall $a = 1$ und $b = c = 0$ gezeigt. In den foglenden drei Übungsaufgaben wollen wir den allgemeinen Fall betrachtet. Dabei wird in allen Aufgaben die Abschätzung

$$a(u,u) \geq a_0 \, |u|^2_{H^1(0,1)} + \int_0^1 b(x)u'(x)u(x)\mathrm{d}x + c_0\|u\|^2_{L^2(0,1)} \tag{3.2}$$

mit

$$a_0 := \inf_{x\in(0,1)} a(x) \quad \text{und} \quad c_0 := \inf_{x\in(0,1)} c(x)$$

benötigt.

$\boxed{12}$ Man zeige die Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ auf dem Raum $V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ unter den Bedingungen, dass

$$a_0 > 0, \quad c_F\|b\|_{L^\infty(0,1)} < a_0, \quad c_0 \geq 0.$$

Dabei ist c_F die Konstante aus der Friedrichs-Ungleichung.

$\boxed{13}$ Man zeige die Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ auf dem ganzen Raum $H^1(0,1)$ unter den Bedingungen, dass

$$a_0 > 0, \quad \|b\|_{L^\infty(0,1)} < 2\sqrt{a_0c_0}, \quad c_0 > 0.$$

Hinweis: Man zeige, dass

$$a(u,u) \geq q(|u|_{H^1(0,1)}, \|u\|_{L^2(0,1)})$$

mit $q(\xi,\eta) := a_0\xi^2 - \|b\|_{L^\infty(0,1)}\xi\eta + c_0\eta^2$. Weiters zeige man, dass

$$q(\xi,\eta) \geq a_0c\xi^2 \quad \text{und} \quad q(\xi,\eta) \geq c_0c\eta^2$$

mit $c = 1 - \frac{\|b\|^2_{L^\infty(0,1)}}{4a_0c_0}$.

$\boxed{14}$ Man zeige die Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$ auf dem Raum $V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ unter den Bedingungen, dass

$$a_0 > 0, \quad b(x) = b_0 \geq 0, \quad c_0 \geq 0,$$

wobei $b_0 \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Man zeige

$$\int_0^1 u'(x)u(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}u(x)^2\Big|_0^1 \geq 0 \quad \forall u \in V_0.$$

$\boxed{15}$ Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, beschränkte und nicht negative Bilinearform auf V, also $a(u,v) = a(v,u)$ und $a(u,u) \geq 0$ für alle $u, v \in V$. Weiters sei $V_0 \subset V$ und $V_g = g + V_0$ mit $g \in V$. Man zeige, dass das Variationsproblem:

$$\text{Gesucht ist } u \in V_g : \quad a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0$$

äquivalent zur Minimierungsaufgabe:

$$\text{Gesucht ist } u \in V_g : \quad \mathcal{J}_a(u) = \min_{v \in V_g} \mathcal{J}_a(v), \quad \text{mit } \mathcal{J}_a(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \langle F, v \rangle$$

ist.