
$\boxed{01}$ Man zeige, dass jede gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$-\big(a(x)\,u'(x)\big)' + b(x)\,u'(x) + c(x)\,u(x) = f(x),$$

mit $a \in \mathcal{C}^1(0,1)$ und b, $c \in \mathcal{C}(0,1)$ geschrieben werden kann als

$$\bar{a}(x)\,u''(x) + \bar{b}(x)\,u'(x) + c(x)\,u(x) = f(x),$$

mit geeigneten Funktionen $\bar{a} \in \mathcal{C}^1(0,1)$ und $\bar{b} \in \mathcal{C}(0,1)$. Man zeige auch die andere Richtung.

$\boxed{02}$ Man leite variationelle Formulierungen für folgende Randwertprobleme her:

(a)
$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) &= f(x) \qquad \text{für } x \in (0,1) \\ u(0) &= g_0 \\ u(1) &= g_1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) &= f(x) \qquad \text{für } x \in (0,1) \\ u(0) &= g_0 \\ u'(1) &= g_1 - \alpha_1\, u(1) \end{cases}$$

$\boxed{03}$ Man betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\big(a(x)\,u'(x)\big)' &= 1 \qquad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) &= 0, \\ a(1)\,u'(1) &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $a(x) = \sqrt{2x - x^2}$. Man zeige, dass $u(x) = \sqrt{2x - x^2}$ eine *klassische* Lösung von (1.1) ist, d.h., $u \in X := \mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^1(0,1] \cap \mathcal{C}[0,1]$. Weiters zeige man, dass

$$\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx = \infty\,.$$

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass $u \notin H^1(0,1)$, d.h., u ist keine *schwache* Lösung.

$\boxed{04}$ Die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen sei gegeben durch

$$u_k(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right], \\ 1 - \frac{1}{2k} - 2k\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{für } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right), \\ 2(1-x) & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}, 1\right]. \end{cases}$$

Man zeige, dass $u_k \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Weiters sei u definiert als

$$u(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2(1-x) & \text{für } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Man untersuche ob gilt, dass u, $u_k \in H^1(0,1)$ oder nicht. Weiters berechne man $\|u_k - u\|_{H^1(0,1)}$ oder verwende geeignete Abschätzungen um zu zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

Man verwende diese Resultate um zu zeigen, dass $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist in $\mathcal{C}^1[0,1]$ bezüglich der H^1-Norm, aber es gibt keinen Grenzwert in $\mathcal{C}^1[0,1]$.

$\boxed{05}$ Man zeige, dass es **keine** Funktion $w \in L^2(0,1)$ gibt mit

$$\varphi(\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 w(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1).$$

Bemerkung: Man betrachte die Folge von Testfunktionen

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} e^{1-\frac{1}{1-n^2(1-2x)^2}} & \text{für } |1-2x| < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$