

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik“

PS III

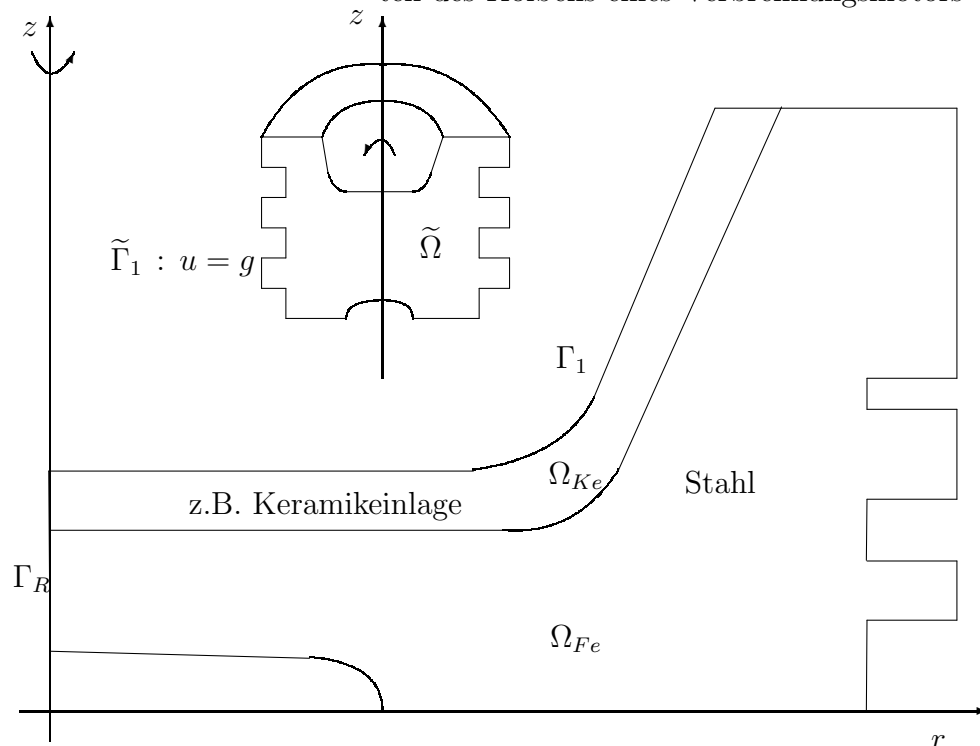
10.11. 2017 (Zeit : 10¹⁵ – 11⁴⁵)

Raum : K 223B : **TP I**

1.4 Weitere 1D und 2D Spezialfälle

1.4.1 Rotationssymmetrische Wärmeleitprobleme mit φ -unabhängigen Eingangsdaten (Teamprojekt 1)

- Modellproblem “Kolben“ : Betrachten das Wärmeleitproblem für den Ober- teil des Kolbens eines Verbrennungsmotors



unter den Voraussetzungen :

1) $\bar{\Omega} = \bigcup_{\varphi} \bar{\Omega} := \{ (r, z, \varphi) : (r, z) \in \bar{\Omega}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \} = \bar{\Omega} \times [0, 2\pi[$,
wobei $\Omega = \Omega_{Ke} \cup \Omega_{Fe}$

2) Daten $\{ \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, f, g, \dots \}$ sind φ -unabhängig,
wobei (x_1, x_2, x_3) -Kartesische Koordinaten,
 (r, z, φ) -Zylinderkoordinaten sind.

Die gesuchte Temperaturverteilung $u(x_1, x_2, x_3) = u(r, z)$ ist damit φ -unabhängig.

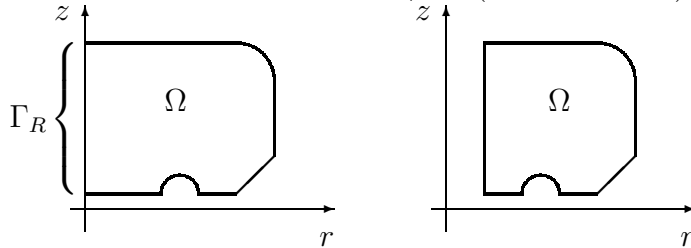
TP Ia Man schreibe die Wärmeleitgleichung

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) &= f(x) \quad x \in \tilde{\Omega} \\ \text{mit den Randbedingungen} \\ u &= g_1 \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \times [0, 2\pi) \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 \times [0, 2\pi) \\ -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} &= \alpha(u - g_3) \quad \text{auf} \quad \tilde{\Gamma}_3 = \Gamma_3 \times [0, 2\pi) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

für den rotationssymmetrischen Fall $\tilde{\Omega} = \bar{\Omega} \times [0, 2\pi)$ mit φ -unabhängigen Eingangsdaten $\{\lambda, f, g_i, \alpha\}$ auf, d.h. durch den Übergang von den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zu Zylinderkoordinaten (r, z, φ) mittels

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z$$

kann der 3D-RWA in $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ eine 2D-RWA im Gebiet Ω zugeordnet werden. Unterscheiden Sie die Fälle $\Gamma_R \neq \emptyset$ (Rbd. auf Γ_R !) und $\Gamma_R = \emptyset$ (Gebiet mit Loch).



TP Ib Man schreibe die differentielle Form der Wärmeleitgleichung für das Modellproblem “Kolben“ Querschnittsgebiet (2D) auf. Beachten Sie das Vorhandensein eines Interfaces zwischen Stahl und Keramikeinlage (Interface-Bedingung).

TP Ic Leiten Sie die **Variationsformulierung**

$$\text{Ges. } u \in \mathbf{V}_g : a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}_0, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{d.h., } \mathbf{V}_g &= ? \\ \mathbf{V}_0 &= ? \\ a(u, v) &= ? \\ \langle F, v \rangle &= ? \end{aligned}$$

her !

TP Id Man zeige, dass eine hinreichend glatte (genaue Angabe der geforderten Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften) Lösung $u \in \mathbf{V}_g$ des Variationsproblems (1.3) das klassische Randwertproblem (d.h. PDgl., Interfacebedingungen, Randbedingungen) löst ! Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang auch die Beziehungen zwischen Integralbilanzformulierung und verallgemeinerte Formulierung !